高中数学奥林匹克
基础知识及题解

陶文中　主编　（上册）

科学技术文献出版社

高中数学奥林匹克基础知识及题解

（上册）

主　编　陶文中

副主编　齐振东　揭　英

编　者　陈　娴　陶文中　袁素芬

　　　　王永俊　单志惠　罗小伟

科学技术文献出版社

（京）新登字130号

高中数学奥林匹克
基础知识与题解
（上册）

陶文中　主编

科学技术文献出版社出版
（北京复兴路15号　邮政编码　100038）
河北玉田印机彩印厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
787×1092毫米　32开本　14印张　300千字
1994年10月第1版　1997年2月第3次印刷
印数15001—20000册
ISBN 7-5023-2175-6/G・512
定　价：14.00元

前　言

近几年来，中小学生数学奥林匹克学习活动在我国迅速发展，一年一度的全国小学、初中和高中数学竞赛吸引了成千上万的中小学生，从小爱数学、赛数学已在全国蔚成风气。

为了帮助高中学生学习奥林匹克数学，在竞赛中取得更好成绩，我们结合多年数学竞赛辅导的经验，继编写《小学数学奥林匹克基础知识及题解》及《中学数学奥林匹克基础知识及题解》(初中)之后，又编写了高中上、下两个分册。两册书围绕高中数学知识，选择基础性强，应用性广的重点教学内容作为专题，同时又根据高中数学竞赛的需要，开设竞赛数学专题讲座。力求做到选题典型、新颖，注意广度和深度，注重从方法上、从能力培养的角度上探究解题思路。

本书上册以高中代数为主，下册以高中立体几何和解析几何为主。为便于读者学习，每个专题都由"知识要点、要点分析、解题指导、练习、提示与解答"五部分内容组成；每讲专题后附的练习题有 A、B 两组，A 组为高考水平训练题，B 组为竞赛水平训练题。A、B 组的题量比大致为 6∶4。由此可见，本书起点适度，难度恰当，适用面广，既可作高中数学奥林匹克竞赛的辅导读物，也可作高中生的课外提高性读物及教师的教学参考书。

参加本书编写工作的有陈娴(上册第一、二、四、五讲)、袁素芬(上册第十讲)、王永俊(上册第十一讲、下册第十二、十三、十四、十五讲)、单志惠(上册第十二讲)、罗小伟(上册第十三讲)、张程(下册第一、二、三、五讲)、张秀平(下册第四、六、七讲)、王人伟(下册第八、九讲)、王人倜(下册第十、十一讲)

及陶文中(其余各专题共十讲)等同志。北京教育学院陶晓永副教授为本书积极策划、指导,在此表示深切的感谢!

限于水平和时间,书中如有错误与不妥之处,诚盼赐教指正。

科学技术文献出版社,以社会效益为重,出版这套奥林匹克丛书,我们表示衷心的感谢。

陶文中

1994年3月20日

目　　录

第一讲　集合与映射

一、知识要点 ………… 1
1. 掌握集合的有关概念
2. 掌握集合间的各种关系，准确使用符号表示
3. 映射的有关概念
二、要点分析 ………… 1
三、解题指导 ………… 4
四、练习 ………… 11
五、提示与解答 …… 15

第二讲　幂函数、指数函数、对数函数

一、知识要点 ……… 18
1. 幂函数
2. 指数函数与对数函数
3. 指数方程与对数方程
4. 解指数不等式和对数不等式
二、要点分析 ……… 18
三、解题指导 ……… 20
四、练习 ………… 42
五、提示与解答 …… 48

第三讲　一元二次方程根的分布

一、知识要点 ……… 55
1. 一元二次方程根的基本分布——零分布
2. 一元二次方程根的非零分布——k分布
二、要点分析 ……… 55
三、解题指导 ……… 70
四、练习 ………… 76
五、提示与解答 …… 78

第四讲　三角恒等式与三角不等式

一、知识要点 ……… 82
1. 三角恒等变形的依据
2. 三角恒等变形公式
3. 三角变换涉及范围
二、要点分析 ……… 82
三、解题指导 ……… 86
四、练习 ………… 101
五、提示与解答 …… 104

第五讲　反三角函数与三角方程

一、知识要点……… 112
二、要点分析……… 112
三、解题指导……… 116
四、练习…………… 126
五、提示与解答…… 131

第六讲　二元不等式(组)与平面区域

一、知识要点……… 136
1. 二元一次不等式与平面区域划分的判定
2. 二元一次不等式组与平面区域
3. 二元二次不等式组与平面区域
二、要点分析……… 136
三、解题指导……… 139
四、练习…………… 143
五、提示与解答…… 145

第七讲　数学归纳法

一、知识要点……… 148
1. 皮亚诺公理
2. 最小数原理
3. 第一数学归纳法
4. 第二数学归纳法
二、要点分析……… 149
三、解题指导……… 150
四、练习…………… 170
五、提示与解答…… 172

第八讲　递归数列及其应用

一、知识要点……… 178
1. 递归数列定义
2. 递归数列分类
3. 递推方法
二、要点分析……… 178
三、解题指导……… 180
四、练习…………… 193
五、提示与解答…… 195

第九讲　函数方程

一、知识要点……… 198
1. 函数方程的定义
2. 函数方程解的定义
3. 解函数方程的定义
4. 函数方程的常用解法
二、要点分析……… 198

三、解题指导……… 203
四、练习…………… 213
五、提示与解答…… 215

第十讲　不等式及其应用

一、知识要点……… 222
1. 不等式的定义
2. 研究不等式的基础——实数性质
3. 不等式的性质
4. 同解不等式
5. 绝对值的性质
6. 几个重要不等式
二、要点分析……… 226
三、解题指导……… 233
四、练习…………… 244
五、提示与解答…… 246

第十一讲　复数和单位根

一、知识要点……… 248
1. 复数的概念
2. 复数的运算
3. 复数的方程
二、要点分析……… 249
三、解题指导……… 249
四、练习…………… 267
五、提示与解答…… 270

第十二讲　排列组合与二项式定理

一、知识要点……… 274
1. 加法原理和乘法原理
2. 排列与组合的定义
3. 排列公式和组合公式
4. 组合数的两个性质
5. 二项式定理
6. 二项式的通项公式
7. 二项式系数的主要性质
二、要点分析……… 275
三、解题指导……… 278
四、练习…………… 286
五、提示与解答…… 289

第十三讲　简单初等数论问题

一、知识要点……… 291
1. 辗转相除法(欧几里得除法)
2. 同余
3. 剩余类
4. 费尔马小定理

5. 高斯函数
6. 无穷(限)递降法
二、要点分析……… 294
三、解题指导……… 295
四、练习…………… 337
五、提示与解答…… 340

第十四讲　图形覆盖初步

一、知识要点……… 342
1. 图形覆盖的定义
2. 图形覆盖的性质
3. 图形覆盖的有关定理
二、要点分析……… 342
三、解题指导……… 345
四、练习…………… 360
五、提示与解答…… 362

第十五讲　数学应用与建模初步

一、知识要点……… 367
1. 数学模型
2. 数学建模方法
二、要点分析……… 367
三、解题指导……… 370
四、练习…………… 380
五、提示与解答…… 383

附录

北京市1989年中学生数学竞赛高中一年级试题及解答 ……………………… 385
北京市1990年中学生数学竞赛高中一年级初试试题 ……………………… 390
北京市1990年中学生数学竞赛高中一年级复试试题 ……………………… 393
1990年竞赛初、复试试题解答 ……………………… 395
北京市1991年中学生数学竞赛高中一年级初试试题 ……………………… 404
北京市1991年中学生数学竞赛高中一年级复试试题 ……………………… 407
1991年竞赛初、复试试题解答 ……………………… 410
北京市1992年中学生数

学竞赛高中一年级初试试题
…………………………… 415
北京市 1992 年中学生数
学竞赛高中一年级复试试题
…………………………… 418
1992 年竞赛初、复试试
题解答 ………………………… 420
北京市 1993 年中学生数
学竞赛高中一年级初试试题
…………………………… 424
北京市 1993 年中学生数
学竞赛高中一年级复试试题
…………………………… 426
1993 年竞赛初、复试试
题解答 ………………………… 428

第一讲　集合与映射

一、知识要点

1. 掌握集合的有关概念

(1)了解集合概念，正确运用符号表示元素与集合的关系($\in$，$\notin$)；

(2)熟练掌握集合的表示法；

(3)认识集合元素的特征：确定性、互异性和无序性.

2. 掌握集合间的各种关系，准确使用符号表示

(1)子集："$\subseteq$"；真子集："$\subset$或$\supset$"；等集"$=$"，特别是空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

(2)交集($\cap$)、并集($\cup$)、全集(I)、补集($\overline{A}$)及其性质：

$$A\cap\overline{A}=\varnothing, A\cup\overline{A}=I$$

$$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$$

$$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$$

3. 映射的有关概念

(1)映射　每一原象必须有唯一的象；

(2)一一映射　原象与象一对一；

(3)逆映射　在一一映射条件下，由象到原象的对应.

二、要点分析

1. 集合的概念

集合是一个不定义的概念，集合中的元素有两个特征：

(1)确定性　设 A 是一个给定的集合，α 是某一具体对象，则 α 或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，两者必居其一，即 $\alpha \in A$ 与 $\alpha \notin A$ 仅有一种情况成立；

(2)互异性　一个给定集合中的元素是指互不相同的对象，即同一集合中不应重复出现同一元素；

(3)无序性

2. 集合的表示方法

主要有列举法、描述法、区间法、语言叙述法. 常用数集如 N、Z、Q、R 应熟记.

3. 要掌握实数集的子集与数轴上的点集的互相转换，有序实数对的集合与平面上的点集的互相转换. 对于方程和不等式的解集，要注意它们的几何表示

4. 子集、真子集及相等集

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \subset B$ 或 $A = B$；

(2) $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $A \neq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $A \not\supseteq B$；

(3) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$.

5. 一个 n 阶集合（即由 n 个元素组成的集合）有 2^n 个不同的子集，其中有 $2^n - 1$ 个非空子集，也有 $2^n - 1$ 个真子集.

6. 集合的交、并、补运算

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$，$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$，$\overline{A} = \{x \mid x \in I$ 且 $x \notin A\}$.

要掌握有关集合的几个运算律：

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2)结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3)分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(4)0－1律　$A\cup\varnothing=A, A\cap I=A$;

$A\cup I=I, A\cap\varnothing=\varnothing$;

(5)等幂律　$A\cup A=A, A\cap A=A$;

(6)吸收律　$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$;

(7)求补律　$A\cup\overline{A}=I, A\cap\overline{A}=\varnothing$;

(8)反演律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

7. 必须掌握有限集合所含元素个数的几个简单性质

设 $n(X)$ 表示集合 X 所含元素的个数

(1)$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

当 $A\cap B=\varnothing$ 时，则有 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$.

(2)$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$.

8. 映射、一一映射、逆映射

(1)映射　设 A、B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f:A\to B$. 上述映射定义中的 A、B，可以是点集，数集，也可以是其他集合.

和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a(在 f 下)的象，a 叫做 b 的原象. A 中的任何一个元素都有象，并且象是唯一的.

(2)一一映射　设 A、B 是两个集合，$f:A\rightarrow B$ 是从集合 A 到集合 B 的映射，如果在这个映射的作用下，对于集合 A 中的不同元素，在集合 B 中有不同的象，且 B 中的每一个元素都有原象，那么这个映射叫做 A 到 B 上的一一映射.

(3)逆映射　设 $f:A\rightarrow B$ 是集合 A 到集合 B 上的一一映射，如果对于 B 中的每一个元素 b，使 b 在 A 中的原象 a 和它对应，这样所得映射叫做映射 $f:A\rightarrow B$ 的逆映射，记作 $f^{-1}:B\rightarrow A$.

注意　只有一一映射，才有逆映射.

要能根据这三个概念的定义，准确地判断一个给定的对应是不是映射，是不是一一映射，并能求出一一映射的逆映射.

三、解题指导

例 1　设 $A=\{a\,|\,a=x^2-y^2, x,y\in Z\}$，求证：(1)$2k-1\in A(k\in Z)$；(2)$4k-2\overline{\in} A(k\in Z)$

分析　如果集合 $A=\{a\,|\,a$ 具有性质 $p\}$，那么判断对象 a 是否为集合 A 的元素的基本方法就是检验 a 是否具有性质 p.

证明　(1)$\because$　$k, k-1\in Z$，且 $2k-1=k^2-(k-1)^2$，故 $2k-1\in A$；

(2)假设 $4k-2\in A$，$(k\in Z)$，则存在 $x,y\in Z$，使 $4k-2=x^2-y^2$，即 $(x-y)(x+y)=2(2k-1)$.　　　　(＊)

由于 $x-y$ 与 $x+y$ 具有相同的奇偶性，所以(＊)式左边有且仅有两种可能：奇数或 4 的倍数，另一方面，(＊)式右边

只能是被 4 除余 2 的数，故（*）式不能成立. 由此，$4k-2 \in A$.

例 2 判断下列命题是否正确：

设 A、B 是坐标平面上的两个点集，$Cr=\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqslant r^2\}$，若对任何 $r\geqslant 0$ 都有 $Cr\cup A\subseteq Cr\cup B$，则必有 $A\subseteq B$.

分析 对于两个集合 A、B，如果 A 的任何一个元素都是 B 的元素，则称 $A\subseteq B$；若 A 中至少有一个元素不是 B 的元素，则"$A\subseteq B$"不正确.

解 不正确. 若 A 为含$(0,0)$点的集合，B 为 A 去掉点$(0,0)$后的集合，则 $Cr\cup A\subseteq Cr\cup B$，但 A 不包含在 B 中.

例 3 设集合 $A=\{m=12x+8y+4z, x, y, z\in Z\}$，$B=\{n=20x+16y+12z, x, y, z\in Z\}$，求证 $A=B$.

分析 要证明两个集合 A、B 相等，可转化为证明 $A\subseteq B$，且 $B\supseteq A$.

证明 任取 $a\in A$，则存在 $x,y,z\in Z$，使 $a=12x+8y+4z=20y+16z+12(x-y-z)$

$\because\ x-y-z\in Z$，$\therefore\ a\in B$，$\therefore\ A\subseteq B$.

再任取 $b\in B$，则存在 $x,y,z\in Z$，使 $b=20x+16y+12z=12z+8(2y)+4(5x)$

$\because\ 2y\in z, 5x\in Z$，$\therefore\ b\in A, B\subseteq A$.

所以 $A=B$.

例 4 一个集合含有 10 个互不相同的十进制两位数. 证明，这个集合必有两个无公共元素的子集合，这两个子集合中的数字之和相等.

分析 利用集合$\{a_1,a_2,\cdots\cdots a_n\}$有 2^n 个子集，再结合抽屉原则可以得到证明.

证明 由于该集合共有 $2^{10}-1=1023$ 个非空子集合，每一个这样的子集合又都由一些两位数构成，两位数的个数不超过 10 个，可见每一个这样的子集合中的数字之和都不会超过 $10\times100=1000$. 因此由抽屉原则知，其中必有一些不同的子集合，它们中的数字之和相等. 任意取出两个这样的子集合，划去它们的公共元素，即可使它们既无公共元素，数字之和又相等.

例 5 设集合 $M=\{1,2,\cdots\cdots,1000\}$，现对 M 的任一非空子集 X，令 α_x 表示 X 中最大数与最小数之和，求所有这样的 α_x 的算术平均值.

解 将 M 中非空子集进行配对，对每个非空集 $X\subset M$，令 $X'=\{1001-x\mid x\in Z\}$，则当 X_1 也是 M 的一非空子集，且 $X\neq X'$时，有 $X'\neq X_1'$，于是所有非空子集分成两类：(A) $X'\neq X$，(B) $X'=X$.

对于(B)中的 X，必有 $\alpha_x=1001$，对于(A)中的一对 X 与 X'，有 $\alpha_x+\alpha_{x'}=1001\times2=2002$.

由此可见，所有 α_x 的算术平均值为 1001.

例 6 若 $A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$，$B=\{-4,a+3,a^2-2a+2,a^3+a^2+3a+7\}$，且 $A\cap B=\{2,5\}$，试求实数 a 的值.

分析 $\because A\cap B=\{2,5\}$，$\therefore A$ 中已有元素 2，另一代数式的值必为 5，可求出 a，将所求 a 的值分别代入 B 中的代数式，进一步确定 a.

解 由已知可知： $a^3-2a^2-a+7=5$

即 $(a+1)(a-1)(a-2)=0$，$\therefore$ $a=\pm1,2$

将 $a=1,2$ 分别代入 B 中的三个元素 $a+3$，a^2-2a+2，a^3+a^2+3a+7 不能同时得到 2，5.

而将 $a=-1$ 代入时有 $a+3=2$，$a^2-2a+2=5$，即 B 中有元素 2 与 5. ∴ $a=-1$.

例 7 已知 $A=\{1,2,3,\cdots\cdots,10\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$，若 C 是 A 的子集，且 $B\cap C\neq\varnothing$，则子集 C 共有多少个？

分析 直接求集合 C 的个数不方便，设求 $B\cap C=\varnothing$ 的集合的个数.

解 集合 A 可看作是：$A=\{1,2,3,4,5\}\cup\{6,7,8,9,10\}$. 由 $\{6,7,8,9,10\}$ 的元素构成子集与 B 的交集为空集，这样的子集共有 2^5 个.

故满足题中所求的子集 C 的个数是：$2^{10}-2^5$（个）.

例 8 M 是实数 R 的任一子集合，函数 $f_M(x)$ 在实数集 R 上定义如下：

$$f_M(x)=\begin{cases}1,(x\in M)\\0,(x\notin M)\end{cases}$$

求证：任意以实数为元素的集合 A、B，若 $A\cap B$ 不是空集，则 $f_{A\cap B}(x)=f_A(x)f_B(x)$.

证明 根据题设 A、B 为 R 的真子集，$A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap B$ 也是 R 的真子集，依 $f_M(x)$ 的定义有：

$$(1)f_A(x)=\begin{cases}1,(x\in A)\\0,(x\notin A);\end{cases}\qquad(2)f_B(x)=\begin{cases}1,(x\in B)\\0,(x\notin B);\end{cases}$$

$$(3)f_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1,(x\in A\cap B)\\0,(x\notin A\cap B).\end{cases}$$

它们都是定义在实数集 R 上的函数.

设任一 $x\in R$，要么 $x\in A\cap B$，要么 $x\notin A\cap B$.

分情况讨论：

1° 若 $x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A$ 且 $x\in B$，此时根据(3)、(1)、