高等数学微积分700例题

GAODENGSHUXUEWEIJIFEN700LITI

· 杨延龄　章栋恩　邹励农　沙峯 著

中国建材工业出版社

高等数学（微积分）700 例题

杨延龄　章栋恩　邹励农　沙峯　著

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(微积分)700例题/杨延龄等著.—北京:
中国建材工业出版社,2004.9
ISBN 7-80159-733-8

Ⅰ.高... Ⅱ.杨... Ⅲ.微积分—高等学校—教学
参考资料 Ⅳ.0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第082595号

内容简介

本书可以作为正在学习《高等数学》的本科学生以及准备报考研究生的人员的参考书。也可以作为准备参加大学生(非数学专业)数学竞赛的辅助材料。在本书中,将常见问题归纳成约750个例题。其中既包括基本计算题,也包括具有一定难度的证明题。特别包括那些有助于深入理解高等数学的基本理论与基本方法的问题。因此,掌握解决这些问题的思路与方法,不仅仅是会解决一些问题,而是基本掌握了《高等数学》这门课程。

高等数学(微积分)700例题
杨延龄 章栋恩 邹励农 沙峯 著

出版发行:中国建材工业出版社
地 址:北京市西城区车公庄大街6号
邮 编:100044
经 销:全国各地新华书店
印 刷:北京鑫正大印刷有限公司
开 本:787mm×1092mm 1/16
印 张:21
字 数:518千字
版 次:2004年10月第一版
印 次:2004年10月第一次
印 数:1~3000册
书 号:ISBN 7-80159-733-8/G·133
定 价:32.00元

网上书店:www.ecool100.com
本书如出现印装质量问题,由我社发行部负责调换。联系电话:(010)68345931

前　言

高等数学(微积分)是大学的主要课程之一,是进一步学习其他数学课程,以及各门专业课的基础。另一方面,微积分也是比较难于掌握的课程之一。首先,微积分中的基本概念是比较艰深的。微积分研究的主要对象是函数的导数与积分。而用来定义它们的极限概念的复杂程度是初学者前所未遇的。必须通过大量的例题和习题才能有比较清楚的理解。其次,微积分的理论体系完整而严密。微积分包含了许多看似无关的不同的部分,然而各部分之间有着紧密的千丝万缕的联系。必须反复思索,才能了解。最后,微积分有广泛的应用。微积分的定理和公式虽然不多,但是可以用来解决各种各样的问题。需要掌握很多方法和技巧,才能真正发挥微积分的强大威力。

本书按照"高等数学"教学基本要求,以及硕士研究生入学考试大纲编写。同时参考北京非数学专业大学生历届数学竞赛试题。可以作为正在学习该课程的本科学生以及准备报考研究生的人员的参考书。也可以作为准备参加大学生(非数学专业)数学竞赛的辅助材料。初次教这门课程的教师也可以从本书中找到许多有用的问题,以充实自己的教学内容。

我们广泛搜集了各种问题,深入分析涉及的内容以及使用的方法,归纳成约 750 个例题。其中既包括基本计算题,也包括具有一定难度的证明题。特别包括那些有助于深入理解高等数学的基本理论与思想的问题。因此,掌握解决这些问题的思路与方法,不仅仅是会解决一些问题,而是基本掌握了高等数学这门课程。部分例题带有 * 号,这样的例题一般较难。在第一次阅读时可以先予忽略,等学完一章,比较好地掌握了基本内容与方法之后,再予以研究。如果读者对数学有兴趣,又愿意用比较多的时间掌握这门课程,仔细阅读此书,一定有较大收获。

全书包括八章。每章由若干节组成。每节的内容如下安排:先有一个典型例题的详细解答,后面是若干习题。有些习题用例题的结论,有些则用例题的方法。认真研究这些习题,可以使读者掌握例题中的思路与技巧。部分例题中有评述,使读者能更深刻地理解微积分的基本思想与方法。每章后附有习题答案与提示,供读者参考。不过我们建议读者不要急于看提示。通过自己反复思考,找到解决方法,不但收获更大,而且是一种不可多得的享受。

本书由北京工商大学数学教研室杨延龄(第三、四章),章栋恩(第一、二章),邹励农(第七、八章)与沙峯(第五、六章)编写。由于作者水平所限,书中不足之处在所难免,请读者不吝赐教。

作者

目　　录

第一章 极 限 论

第一节 函 数

例 1 设点 $M(x,y)$在圆 $x^2+y^2=a^2$ 的位于第一象限的弧上. 圆在该点的切线与 x 轴, y 轴分别交于A 点和B 点. 试将该切线与两坐标轴所围成的三角形 AOB 的面积S 表示为x 的函数.

解:建立函数关系.

切线 AB 与半径 OM 垂直. 过点 M 作直线 MD,与 x 轴垂直,交 x 轴于 D,则有 $OD\cdot DA=MD^2$. 于是 $DA=\frac{y^2}{x}$,$OA=x+\frac{y^2}{x}$. 三角形 OAM 的面积等于$\frac{1}{2}\left(x+\frac{y^2}{x}\right)y$. 同理,三角形 OBM 的面积等于$\frac{1}{2}\left(y+\frac{x^2}{y}\right)x$. 两式相加,整理,得

$$S=\frac{(x^2+y^2)^2}{2xy}=\frac{a^4}{2x\sqrt{a^2-x^2}}.$$

习题

(a)设正圆锥体的高为 H,底半径为 R. 现作一个与顶点相距为 x,且与底平面平行的平面,将圆锥体截成两部分. 试将这两部分的体积表示为 x 的函数.

(b)设球的半径为 R. 作球的外切正圆锥. 试将圆锥的体积 V 表示为其底半径x 的函数.

例 2 记$[x]$为实数 x 的整数部分,则对任意的实数 x,y,有$[x]+[y]\leqslant[x+y]\leqslant[x]+[y]+1$.

证:特殊函数.

因为 $x-1<[x]\leqslant x$, $y-1<[y]\leqslant y$,所以

$$x+y-2<[x]+[y]\leqslant x+y.$$

即

$$[x]+[y]\leqslant x+y<[x]+[y]+2.$$

于是

$$[x]+[y]\leqslant[x+y]\leqslant[x]+[y]+1.$$

习题

(a) 设 n 是正整数,x 是实数,求证下列各式.

(1) $[x+n]=[x]+n$;

(2) $n[x]\leqslant[nx]$;

(3) $\left[\frac{[nx]}{n}\right]=[x]$.

例 3 求证: 函数 $y=\frac{1-x}{1+x}$的反函数就是它本身.

证： 反函数.

解出 x，得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$.

习题

(a)求函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的反函数 $\varphi(x)$，并指明 $\varphi(x)$的定义域.

(b)求函数 $f(x)=\begin{cases}x, x<1\\ x^2, x\geqslant 1\end{cases}$的反函数 $\varphi(x)$.

(c)设函数 $f(x)$与 $\varphi(x)$互为反函数，求 $f(x-2)$的反函数.

例 4 设函数 $f(x)$满足 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解：复合函数.

右边配方，得 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$. 于是，$f(x)=x^2-2$.

习题

(a)设函数 $f(x)$满足 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{x^2+1}(x>0)$，求 $f(x)$.

(b)设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[g(x)]=1-x$，且 $g(x)\geqslant 0$，求 $g(x)$及其定义域.

例 5 设 $f(x)$满足函数方程 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a}{x}$，其中 a 是常数，求 $f(x)$.

证：代数方法解函数方程.

令 $x=\dfrac{1}{u}$，代入得 $2f\left(\dfrac{1}{u}\right)+f(u)=au$. 换字母得 $2f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=ax$. 消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，得 $f(x)=\dfrac{2a}{3x}-\dfrac{ax}{3}$.

评述：含有未知函数的方程称为函数方程. 函数方程种类繁多，解法各异，本例是用初等代数的方法求解.

"给出函数，研究性质"，与"根据性质，确定函数"是我们这门课程的两大主题.

习题

(a)设函数 $f(x)$满足函数方程 $f(-x)=x[f(x)-1]$，求 $f(x)$.

(b)设函数 $f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内有定义，且对于任意的一次函数 $g(x)$，满足函数方程 $f[g(x)]=g[f(x)]$，求 $f(x)$.

例 6 对于函数 $f(x)$，记 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f[f(x)]}_{n}\cdots]\}$. 又 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f_n(x)$.

解：复合函数.

先计算几个实例. $f_1(x)=f(x)=\dfrac{1}{1-x}$. 将其代入自身，得

$f_2(x)=\dfrac{1}{1-f_1(x)}=\dfrac{x-1}{x}$. 同理得 $f_3(x)=x$，$f_4(x)=\dfrac{1}{1-x}=f_1(x)$.

从以上实例可以猜测：$f_{3n}(x)=x$，$f_{3n+1}(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$f_{3n+2}(x)=\dfrac{x-1}{x}$. 用数学归纳法可以证明上述猜测.

评述："从实例出发猜测可能的结果，然后予以证明"是数学的一条常用的研究路线.

将线性分式 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 自迭代时，出现了周期现象.(最小正)周期等于 3.

习题

(a)设函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，求 $f_n(x)$.

(b)设函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)$.

例 7 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, x\leqslant 0\\ 1, x>0\end{cases}$，求 $f[f(x)]$.

解:分段函数的复合.

内层函数的值域是外层函数的定义域.外层的定义域是按 $x\leqslant 0$ 和 $x>0$ 划分的.内层当且仅当 $x>-1$ 时，函数值 $f(x)>0$.于是，$f[f(x)]=\begin{cases}x+2, x\leqslant -1\\ 1, x>-1\end{cases}$.

习题

(a)设 $f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0\\ x, x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0\\ -x^2, x>0\end{cases}$，求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$.

(b)设 $f(x)=\begin{cases}2-x, x\leqslant 0\\ x+2, x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^2, x<0\\ -x, x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[g(x)]$.

例 8 求证：函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

证:函数的奇偶性.

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x).$$

习题

(a)求证下列函数是奇函数.

(1) $f(x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$;

(2) $f(x)=\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}$.

(b)设函数 $f(x)$是区间$(-a,a)$上的奇函数，则 $f(0)=0$.

(c)研究奇、偶函数的和、积以及复合的奇偶性.

例 9 求证：任意定义在区间$(-a,a)$内的函数可以表示为一个奇函数和一个偶函数之和.

证:函数的奇偶性.

设函数 $f(x)$在区间$(-a,a)$内有定义，令

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)], h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

则 $h(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，而 $f(x)=g(x)+h(x)$.

习题

(a)设函数 $f(x)$在区间(a,b)内有定义，则它可以表示为 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$，其中 $\varphi(x)$满足函数方程 $\varphi(a+b-x)=\varphi(x)$，而 $\psi(x)$满足 $\psi(a+b-x)=-\psi(x)$.

(b)求证：任意函数可以表示为一个非正函数和一个非负函数之和.

例 10 设函数 $f(x)$满足函数方程 $f(x+h)=kf(x)$,其中 h,k 为正常数,则 $f(x)$可以表示成 $f(x)=a^x g(x)$,其中 a 是常数,而 $g(x)$是周期函数.

解:函数的周期性.

将 $f(x)=a^x g(x)$代入 $f(x+h)=kf(x)$得

$$f(x+h)=a^{x+h}g(x+h)=ka^x g(x)=kf(x).$$

取 $a=k^{\frac{1}{h}}$,即有 $g(x+h)=g(x)$.

习题

(a)求证：函数 $y=x-[x]$是周期函数.

(b)设函数 $f(x)$满足函数方程 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$,则 $f(x)$是周期函数.

(c)设函数 $f(x)$满足函数方程 $f(x+a)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$,其中 $a>0$ 是常数,则 $f(x)$是周期函数.

例 11 设函数 $f(x)$的图形关于直线 $x=a$ 与 $x=b(a<b)$都对称,则 $f(x)$是周期函数.

证:函数的周期性.

函数 $f(x)$的图形关于直线 $x=a$ 与 $x=b(a<b)$都对称,则对于任意的 x,有

$$f(a+x)=f(a-x),f(b+x)=f(b-x).$$

将前式中的 x 换成 $x-a$,后式中的 x 换成 $x+b$,得

$$f(x)=f(2a-x),f(-x)=f(2b+x).$$

于是,有 $f[x+(2b-2a)]=f[2b+(x-2a)]=f(2a-x)=f(x)$.

习题

(a)设函数 $f(x)$的图形关于点 $P(a,b)$与直线 $x=c(a<c)$都对称,则 $f(x)$是周期函数.

例 12 设函数 $f(x)$单调增加,且对任意的 x,有 $f(x)\leqslant g(x)$,则

$$f[f(x)]\leqslant g[g(x)].$$

证:函数的单调性.

因为 $f(x)$单调增加,而且有 $f(x)\leqslant g(x)$,所以 $f[f(x)]\leqslant f[g(x)]$.又对于任意的 x,有 $f(x)\leqslant g(x)$, 于是,$f[g(x)]\leqslant g[g(x)]$.由不等式的传递性即得.

习题

(a)设函数 $f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内单调增加,问函数 $f(-x)$, $-f(x)$, $-f(-x)$如何?

(b)研究单调函数的和、积以及复合的单调性.

例 13 设函数 $f(x)$是区间$(-a,a)$内的偶函数,如果它在区间$(0,a)$内单调增加,则在区间$(-a,0)$内单调减少.

证:函数的单调性.

对于任意的$-a<-b<-c<0$,有$0<c<b<a$.由函数 $f(x)$在区间$(0,a)$内单调增加,有 $f(-c)-f(-b)=f(c)-f(b)<0$.根据单调定义,$f(x)$在区间$(-a,0)$内单调减少.

习题

(a)设函数 $f(x)$是区间$(-a,a)$内的奇函数,如果它在区间$(0,a)$内单调增加,则在区间$(-a,0)$内也单调增加.

(b)设函数 $f(x)$单调,则方程 $f(x)=0$ 至多有一个实根.

例 14 设 $f(x)$在区间(a,b)内是下凸函数,且 $a<x_1<x_2<x_3<b$,则

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

评述: 关于下凸函数还有另外一种术语,即称它的曲线是凹的.因为微积分的研究对象是函数,而曲线和曲面只是辅助工具和应用对象,因此我们采用下凸函数这个名称.

证:函数的凸凹性.

在这里用下凸函数的常用定义是方便的.

定义:设函数 $f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果对于任意的 $a<x_1<x_2<b$,以及任意的 $0<\theta<1$,有

$$\theta f(x_1)+(1-\theta)f(x_2)>f[\theta x_1+(1-\theta)x_2].$$

则称 $f(x)$在区间(a,b)内是下凸函数.反之,如果相反方向的不等式恒成立,则称函数是上凸函数.

因为 $x_1<x_2<x_3$,令 $\theta=\dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$,则 $0<\theta<1$.代入下凸函数的定义式,

$$\theta f(x_1)+(1-\theta)f(x_3)>f[\theta x_1+(1-\theta)x_3].$$

可得$\dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)>f(x_2)$,整理即得所需的不等式.

评述:请研究本例中不等式的几何意义.几何直观不能代替证明,但是经常可能提供证明的线索.

习题

(a)如果函数 $f(x)\geqslant 0$ 是下凸函数,则函数 $f^2(x)$也是下凸函数.

(b)设函数 $f(x)$,$g(x)$都是下凸函数,且 $f(x)$单调增加,则函数 $f[g(x)]$也是下凸函数.

(c)研究凸凹函数的和的凸凹性.

例 15 设函数 $f(x)$在区间$[0,\infty)$上是下凸函数,且 $f(0)=0$,则对任意的 $a>0,b>0$,有 $f(a+b)>f(a)+f(b)$.

证:函数的凸凹性.

不妨假设 $a<b$,由本节例 14,有

$$\frac{f(a)-f(0)}{a}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(a+b)-f(b)}{a}.$$

整理即得.

习题

(a)设 $f(x)$是下凸函数,则方程 $f(x)=0$ 至多有两个实根.

(b)设 a_i 是正实数,b 是实数,则方程 $\sum a_i e^{\lambda_i x}=b$ 至多有两个实根.

例 16 设函数 $g(x)>0, f(x)=(x-a)^n g(x)$, n 是自然数.问题:$f(x)$在 $x=a$ 有没有极值?

解:极值定义.

首先,有 $f(a)=0$.

如果 n 是偶数,在 $x=a$ 的两侧,$f(x)>0$,因此 $f(x)$在 $x=a$ 取极小值.

如果 n 是奇数,在 $x=a$ 的两侧,$f(x)$有不同符号,因此 $f(x)$不在 $x=a$ 取极值.

习题

(a)设点 $x=a$ 是函数$f(x)$的极大值点,则 $x=a$ 是函数 $-f(x)$的极小值点.

(b)设点 $x=a$ 是函数$f(x)$和 $g(x)$的极大值点,点 $x=a$ 是函数$F(x)=f(x)g(x)$的极值点吗?

例 17 设函数 $f(x)$在区间(a,b)单调增加,对于任意的 x,$g(x)\in(a,b)$,则函数 $f[g(x)]$与 $g(x)$有相同的极值点.

证:设 x_0 是 $g(x)$的极大值点,则存在 $\delta>0$,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$g(x)<g(x_0)$.因为 $f(x)$单调增加,所以 $f[g(x)]<f[g(x_0)]$.即 x_0 是 $f[g(x)]$的极大值点.同理可证极小值点的情形.

反之,设 x_0 是 $f[g(x)]$的极大值点,则存在 $\delta>0$,使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f[g(x)]<f[g(x_0)]$.因为 $f(x)$单调增加,所以 $g(x)<g(x_0)$.即 x_0 是 $g(x)$的极大值点.同理可证极小值点的情形.

习题

(a)设函数 $f(x)$在区间(a,b)有定义,则函数 $F(x)=f^2(x)$与 $G(x)=|f(x)|$有相同的极值点.

例 18 求星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$的参数方程.

解:函数的参数方程.

改写,得$(\sqrt[3]{x})^2+(\sqrt[3]{y})^2=(\sqrt[3]{a})^2$.因此,可取$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a}\cos\theta$,$\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{a}\sin\theta$.即 $x=a\cos^3\theta$,$y=a\sin^3\theta$.

习题 求下列函数的参数方程.

(a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

(b) $x^4+y^4=a^4$.

例 19 求曲线 $x^3+y^3=3axy$ 的参数方程.

解:函数的参数方程.

令 $y=tx$,则$(1+t^3)x^3=3atx^2$.即 $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$.

代入 $y=tx$,得 $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

习题

(a)$x^4+y^4=ax^2y$.

第二节 极限的定义和性质

例 1 用极限定义证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

证:用定义求极限.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}<\varepsilon.$$

习题

(a)用定义证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}=0$.

(b)用定义证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2n-1}=\dfrac{1}{2}$.

例 2 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to a$ 时有极限,且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>B=\lim\limits_{x\to a}g(x)$,则存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时,有 $f(x)>g(x)$.

证:极限的保号性定理的讨论.

令 $F(x)=f(x)-g(x)$,则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)=A-B>0$.根据极限的保号性定理,存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时,有 $F(x)>0$.即 $f(x)>g(x)$.

评述:这个命题称为极限的保序性定理.取 $g(x)\equiv0$,即为保号性定理.

着眼于保号性定理,保序性定理是其推广.着眼于保序性定理,则是先证明一个特例(保号性定理),然后设法(这里令 $F(x)=f(x)-g(x)$)将一般命题(保序性定理)化为特例,予以证明.这是数学中一种常用的证明方法.

习题

(a)设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0$,则存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时,有 $f(x)>\dfrac{1}{2}A>0$.

评述:这是保号性定理的一种加强形式.

(b)设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0$,则对于任意给定的 $0<B<A$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时,有 $f(x)>B$.

(c)设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>B=\lim\limits_{x\to a}g(x)$,则存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时,有 $f(x)-g(x)>\dfrac{1}{2}(A-B)>0$.

评述:这是保序性定理的加强形式.

例 3* 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A>0$,则对于任意给定的 $M>0$,存在自然数 N 和 p,使得 $a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+p}>M$.

证:用保号性定理的加强形式证明不等式.

仿本节例 2 习题(a),存在 $N>0$,使得当 $n>N$ 时,有 $a_n>\dfrac{A}{2}$.取 $p=\left[\dfrac{2M}{A}\right]+1>\dfrac{2M}{A}$,则 $a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+p}>p\dfrac{A}{2}>M$.

习题

(a)设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A\neq0$,则对于任意给定的 $M>0$,存在自然数 N,使得 $|a_1+a_2+\cdots+a_N|>M$.

(b)设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 和自然数 p,存在自然数 N,使得 $|a_{N+1}+$

$a_{N+2}+\cdots+a_{N+p}|<\varepsilon$.

例 4 设函数 $f(x)$在区间$(a,+\infty)$单调增加，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,则对于任意 $x>a$,有 $f(x)<A$.

证:用保序性定理证明不等式.

已知 $f(x)$单调增加,则对于任意 $x>a,y>1$,,有 $f(x)<f(x+1)<f(x+y)$. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,令 $y\to+\infty$,由极限保序性定理,有 $f(x)<f(x+1)\leqslant A$.

习题

(a)设函数 $f(x)$在区间(a,b)单调增加,存在 $a<c<b$, 使得 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$,则当 $a<x<c$ 时,有 $f(x)<A$. 当 $c<x<b$ 时,有 $f(x)>A$.

例 5* 求证:$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$ 的充分必要条件为:对于任意给定的 $\varepsilon>0$,只有有限个项 a_n,使得$|a_n-A|\geqslant\varepsilon$.

证:极限定义的讨论.

必要性:按照极限定义,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在相应的 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时,有 $|a_n-A|<\varepsilon$. 于是,满足$|a_n-A|\geqslant\varepsilon$ 的项a_n 只有有限个.

充分性:对于任意给定的 $\varepsilon>0$,只有有限个项 a_n,使得$|a_n-A|\geqslant\varepsilon$. 设 a_N 是其中下标最大的项,则当 $n>N$ 时,有$|a_n-A|<\varepsilon$.

习题

(a)设函数 $f(x)$在点的一个去心邻域有定义,则下述命题等价:

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$;

(2)对于任意给定的自然数 m,存在自然数 n,使得当 $0<|x-a|<\frac{1}{n}$时,有$|f(x)-A|<\frac{1}{m}$;

(3)对于任意给定的 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$,存在 $0<\delta<\delta_0$,这里 ε_0,δ_0 是两个正常数,使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(b)求证:有极限的数列必取到其最大值或最小值.

例 6 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|A|$.

证:用已知极限证明极限.

对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时,有

$$||f(x)|-|f(a)||\leqslant|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

习题

(a)求证:$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ 的充分必要条件为 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0$.

例 7* 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=A$.

证:用已知极限证明极限.

按照极限定义,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在自然数 N,使得当 $n>N$ 时,有 $|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是,

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_N+a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}-A\right|$$
$$=\left|\frac{a_1+\cdots+a_N-NA}{n}+\frac{(a_{N+1}-A)+\cdots+(a_n-A)}{n}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{n}|a_1+\cdots+a_N-NA|+\frac{n-N}{n}\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 N 已经取定,存在 $N^*>N$,使得当 $n>N^*$ 时,有$\frac{1}{n}|a_1+\cdots+a_N-NA|<\frac{\varepsilon}{2}$.于是 $\left|\frac{a_1+\cdots+a_N+a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

评述:"从一个已知极限,往证另一个极限"是加深对极限概念的理解的有效途径,因此多作一些这种习题是必要的.

习题

(a)设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=+\infty$.

(b)设数列 b_n 单调增加,且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$.

评述:这个命题是洛必达法则的离散类比,称为 Stolz 定理,常用来计算数列极限.

例 8* 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$,其中 p 是自然数.

解:用 Stolz 定理计算极限.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}.$$

习题

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}$,其中 p 是自然数.

(b)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$.

(c)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

例 9* 设 $a_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A>0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=A$.

证:用已知极限证明极限.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A>0$,由连续可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln A$.

再由本节例 7 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}=\ln A$.

最后由连续有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}}=e^{\ln A}=A.$$

评述:这里用到指数函数与对数函数的连续性,可在读完本章后研究.

习题

(a) 设 $a_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0$.

例 10*　设 $a_n>0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=A>0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=A$.

证:用已知极限证明极限.

改写,得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\dfrac{a_2}{a_1}\dfrac{a_3}{a_2}\cdots\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}$.

因为,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=A>0$, 由本节例 9,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=A$.

习题

(a)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

(b)求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

第三节　极限的运算

例 1　计算极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$,其中 m、n 是自然数.

解:极限的四则运算公式.约分.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^{m-1}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+\cdots+x+1}=\frac{m}{n}.$$

习题　求下列极限.

(a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{m+1}-(m+1)x+m}{(x-1)^2}$.

(b) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$.

例 2　计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

解:极限的四则运算公式.有理化.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=0.$$

习题　求下列极限.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)$.

例 3　计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x-2e^{-x}}{2e^x+3e^{-x}}$.

解:极限的四则运算公式.分子分母除以同一函数.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x-2e^{-x}}{2e^x+3e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-2e^{-2x}}{2+3e^{-2x}}=\frac{3}{2}.$$

习题 求下列极限.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

(b) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

例 4 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

解:极限的四则运算公式.求和化简.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

习题 求下列极限.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}-\frac{n}{3}\right)$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)})$.

例 5 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})$,其中$|a|<1$.

解:极限的四则运算公式.化简.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})}{(1-a)}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^{2^{n+1}})}{(1-a)}=\frac{1}{1-a}.\end{aligned}$$

习题

(a)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

例 6* 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

解:极限的四则运算公式.化简.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3}{2^2}\,\frac{2\cdot4}{3^2}\,\frac{3\cdot5}{4^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

习题

(a)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\,\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

例 7* 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\max\{a_n,b_n\}=\max\{A,B\}$.

证:极限运算公式的讨论.

注意到$\max\{a,b\}=\frac{1}{2}[(a+b)+|a-b|]$,有