外国哲学

14

商务印书馆

外国哲学

第十四辑

《外国哲学》编委会编

商　务　印　书　馆

图书在版编目(CIP)数据

外国哲学　第14辑/《外国哲学》编委会编. 一北京：商务印书馆，1998
ISBN 7-100-02223-1

I. 外…　II. 外…　III. 哲学一世界　IV. B1

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第19569号

外　国　哲　学

第十四辑

《外国哲学》编委会编

商　务　印　书　馆　出　版
(北京王府井大街36号　邮政编码100710)
新华书店总店北京发行所发行
中国科学院印刷厂印刷
ISBN 7-100-02223-1/B·315

1998年11月第1版	开本 850×1168　1/32
1998年11月北京第1次印刷	字数 333千
印数 1 000册	印张 13 1/2

定价：22.80元

目录 MULU

毕达哥拉斯的数本说与数学发展的实际

李　浙　生

毕达哥拉斯是古希腊杰出的数学家和哲学家，他和他的学派创立的数本说，对于数学以至科学的发展有着深远的影响。

（一）

毕达哥拉斯及其学派很重视数学。“数学”这个词据说是毕达哥拉斯学派首先使用的。他们在数学上有一些重要发现：毕达哥拉斯定理、毕达哥拉斯数、无理数。他们还研究过形数和数的一些性质。

毕达哥拉斯学派正是在这种科学研究的基础上提出自己的哲学思想的。毕达哥拉斯学派哲学思想的核心是，数是万物的本原，或者说万物皆数。亚里士多德对这种哲学作过比较系统的叙述：和这些哲学家[指从巴门尼德到原子论者——引者]同时，或稍早一点，所谓毕泰戈拉学派孜孜从事数学的研究，他们最早推进了这门学科，并且由此认识到数的本原就是万物的本原。因为在它们之中，数自然是最先的，而且他们似乎发现了数和存在的与生成的事物有较多相似之处，比在火、土、水中能找到的更多，如某种数是正义，另一种是灵魂和理性，再有一种是机会，几乎所有一切别的东

西无一不可以用数来表述；还有，他们看到音律的特性和比例也是可以用数来表现的；一切其它事物就其整个本性来说都是以数为范型的，数在整个自然中看来是居于第一位的东西，所以他们认为数的元素就是万物的元素，认为整个天就是一个和音，也是数。

在古希腊，有些哲学家或以水、或以气、或以火作为万物的本原。毕达哥拉斯学派不满足于他们的解释，而认为只有数才是万物的本原。在毕达哥拉斯学派看来，世界上不仅存在着动物、植物、石头等具体事物，而且还有正义、理性、灵魂、机会这样抽象的东西。显然，用水、土、火不能解释这些抽象的东西，而毕达哥拉斯学派认为，只有用数才既能解释具体事物，又能解释抽象的东西。可见，从泰勒士到毕达哥拉斯虽然他们都在寻求万物的本原，但他们所说的万物的范围已经不同了。泰勒士等人只为万有的具体事物寻求本原，而毕达哥拉斯学派要为包括抽象东西在内的万物寻求统一的本原。这正是毕达哥拉斯学派提出数是万物本原的意义。

不过，毕达哥拉斯学派提出数是万物的本原，还有更深一层的含义，即他们发现万物之中都存在着某种数量关系——数的和谐。他们是在研究声乐和器乐的过程中发现这种和谐的。相传有一天毕达哥拉斯走过铁匠铺，他从铁匠打铁时发出的声音，发现铁锤重量与音调有关系。后来，他又在琴弦上作试验，找到了音程与弦长的数学比的对应关系，2∶1 的弦长对应于八度音，3∶2 的弦长对应于五度音，4∶3 的弦长对应于四度音。他还注意到，仅当几条同质弦长成简单整数比，拨动时才发出和谐的声音。毕达哥拉斯学派还在研究建筑、雕刻等造型艺术时，提出了著名的“黄金分割”，认为仅当长宽之间具有最佳比例时，矩形最美，最“和谐”。

毕达哥拉斯学派把这种和谐加以推广，认为宇宙中的一切事物都存在着和谐，宇宙的秩序是由某种绝对和谐构成的。他们认为，天体在运行时，像一切运动着的物体一样，会发出声音。每个天体由于体积和运动速度不同而发出不同的音调，运动慢的发出深

沉的音调,运动快的发出高昂的音调。各个天体的运动速度是由天体间的距离决定的,这些距离之间有一定的比例,与音乐里的音程一样。由此,运动着的天体就发出和谐的声音,构成天体的和谐。“和谐”是毕达哥拉斯学派学说中一个重要范畴,这个范畴主要指数的比例关系。

(二)

毕达哥拉斯学派认为数是万物的本原,一切事物和现象都可以归结为整数或整数之比。然而这个信念却为他们自己的一个发现所动摇。这就是关于无理数(或不可公度线段)的发现,这些线段不能表为整数之比。这个发现是他们的一大成就,因为它不能从经验和观察得出,只能靠抽象的思考来证明。它标志着人类思维有了更高的抽象能力。但是,这一发现却使他惶恐不安。他们相信,根本没有这样的线段,然而现在却发现,正方形的对角线不能用边来度量,即不成整数比,这与他们的信念是矛盾的。数对于宇宙最直接的方面(几何)尚且不能解释,又怎么能解释万物呢?企图用数来穷尽万物的第一次努力就这样失败了。美国数学家柯朗在讲到无理数的影响时指出:这个发现是具有重大意义的科学事件。人们公认希腊人对数学严密方法有特殊贡献,其缘由十分可能出于此。确实,从希腊时代起一直到今天,这个发现给数学和哲学带来深远的影响。这种影响首先当然是针对数学的。无理数的发现使数学转变了方向。

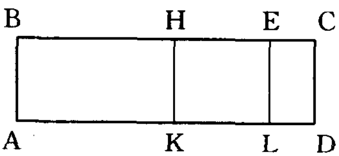
毕达哥拉斯学派更重视算术,认为算术高于几何。毕达哥拉斯学派的重要代表人物阿尔基塔说,“看来,在智慧方面,算术是远远高于别的一切科学的,特别是高于几何学,因为算术能够更清晰地处理它所要处理的任何问题……,当几何学对一个问题失败时,算术能够加以证明;同时如果问题涉及‘形式’(即数的本原)时,算术

也能够探讨形式。”然而，无理数的发现，使希腊数学家转而强调几何。由于不承认无理数，他们就避免给予线段以数值，相反他们用线段表示数。在欧几里得的《几何原本》里，两数相加被看成是把一线段延长到使增长的部分等于另一线段，减法被看成是从一线段割去另一线之长，两数的乘积是一矩形面积，三数的乘积是一体积，两数相除是两线段之比。在欧几里得看来，a、b 两个量只有把它们看成是线段的长度才有意义；乘积 ab 只能看作面积、不能看作一个数，因为在《原本》里乘积没有一般的意义。同样，整数之比是作为比例中的比，而没有把这些比看作分数。

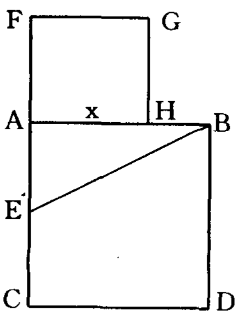
希腊数学家不仅用线段来表示数的四则运算，而且还用几何方法处理代数问题：

(1) $a(b+c+d+\cdots)=ab+ac+ad+\cdots$

(2) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$



在《原本》中关于(1)的说法是：若有两直线，其中一线段被割成任何多段，则两直线所作矩形等于未割之线与各段所作出的各个矩形之和。(见左图)关于(2)的说法是，若把一线在任意点割开，则在整个线上的正方形等于两段上的正方形加上以两段为边的矩形。(见左图)。



希腊数学家甚至用几何方法来解代数方程。《原本》第二篇命题 11，分割一已知直线，使整段与其中一分段所成矩形等于另一分段上的正方形。这是要我们把 AB 分于某点 H，使 AB · BH = AH · AH。欧几里得的作法是，设 AB 是所给线

段，作正方形ABDC；令E是AC的中点，作BE；作CA的延长线，使EF=EB。作正方形AFGH。于是H就是AB上所要作的分点，即AB·BH=AH·AH。这个定理的意义在于把长为a的AB线段分成两段x和a－x，使$(a-x)a=x^2$。因此就有了解这个二次方程的几何方法。在《原本》第六篇中，欧几里得还用几何方法解更复杂的二次方程。在这里，希腊数学家由于不承认无理数，片面地发展了几何，甚至把代数改造成几何代数，这实在是一种畸形的代数。

希腊数学家之所以用几何方法来处理代数问题，还因为他们认为只有几何才是严格的。因此，数学家在用其他方法得出一些数学结果后，他们也总要再给出一个几何证明，才能心安理得。阿基米德曾用力学方法求出弓形面积，立刻又用几何的穷竭法加以证明。这并非多此一举，实在是当时数学上的一种需要。

16世纪意大利数学家卡尔达诺在其《重要的艺术》中发表了三次方程的一般解法。同时他用几何证明所解出的x值的正确性。

17世纪，牛顿偏爱且擅长几何，他正是用几何方法来建立微积分的。在《运用无限多项方程的分析学》中，他把线段和面积的无限小增量叫做瞬，并由此求得面积的变化率，并反过来，由变化率的逆过程得到曲线下的面积。这实际上就是微积分基本定理。

18世纪，建立不久的微积分受到贝克莱等人的攻击。有的数学家就主张把它的基础安放在几何上。英国数学家麦克劳林就试图根据希腊人的几何和穷竭法来建立微积分，用古人的严谨方法来证明牛顿方法的有效性。

19世纪的数学家还提供了复数的几何解释。在公元前，人们就遇到了负数开平方的问题，例如解方程$x^2+1=0$时，就出现$x=\pm\sqrt{-1}$。负数开平方已超出了实数的范围。与实数相比较，人们把这样的数叫做虚数。后来，人们把虚数和实数的复合形式$a+b\sqrt{-1}$（a，b为实数）叫做复数。

虚数虽然早就被发现了，但一直得不到数学家的承认。直到18世纪，著名瑞士数学家欧拉还说，“因为所有可以想象的数或者比0大，或者比0小，或者等于0，所以很清楚，负数的平方根不能包括在可能的数[实数]中。从而我们必须说它们是不可能的数。然而这种情况使我们得到这样一种数的概念，它们就其本性说来是不可能的数，因而通常叫做虚数或幻想中的数，因为它们只存在于想象之中。”到十九世纪初，德国数学家高斯不仅将 $a+b\sqrt{-1}$ 表示为复平面上的点，而且阐述了复数的几何加法和乘法。复数的直观意义建立起来之后，才结束了对复数真实性长达两千年的怀疑。从近代的观点来看，这种解释并非必要，因为复数形式运算的验证可以在加法和乘法的形式定义基础上直接得到。然而，当时人们仍很相信几何，这种几何解释表明它和实数一样具体。

以前的数学家认为，几何是获得严密性的唯一方法，所以他们认为有必要用几何证明来为代数方法辩护。而且很多人确实说过绝对相信欧氏几何为真理的话。牛顿的老师、英国数学家巴罗肯定了几何的八个优点：概念清晰、定义明确、公理直观可靠而且普遍成立，公设清楚可信且易于想象，公理数目少，引出量的方式易于接受，证明顺序自然，避免未知事物。牛顿自己不仅经常表示对希腊几何学家的崇敬，还因为不如过去那样紧密地追随他们而责备自己。他说，“方程是算术计算的表达式，它在几何里，除了表示真正几何量(线、面、立体、比例)间的相等关系以外，是没有地位的。近来把乘、除和同类的计算法引入几何，是轻率的，而且是违反这一科学的基本原则的。”

希腊人把数学主要限制于几何的另一个严重后果是，把数学家赶到了几何学家的队伍里，甚至在18世纪，人们还用几何学家来称呼今天人们心目中的数学家。18世纪法国数学家拉普拉斯在赞扬分析的力量时说，“分析是如此地多产……，因此这个世纪的几何学家被它的优越性慑服之后，马上致力于扩大它的领域。”在

这里，拉普拉斯就仍把数学家叫做几何学家。这个名词在先前的年代是很流行的，因为几何在数学中长期占居着统治地位。直到今天，我们仍把 x^2 读作 x 平方，把 x^3 读 x 的立方，而不把它们读作 x 二次，或 x 三次。

由上面的叙述，我们看到，由于无理数的发现，希腊数学家把原来以数和算术为重点的数学，变成以量和几何为重点的数学；他们认为只有几何是严密的，一切以几何为基础，代数被改造成几何代数，代数结果的正确性要用几何来保证；甚至一些数学分支的建立也要借助几何方法。无理数发现以后的两千多年里，几何一直在数学中处于统治地位。然而，希腊数学家虽然把几何搞得能够处理无理数，却因此放弃了真正的代数。况且就几何自身来说，它虽具有逻辑性强，严密性高的优点，但也有着种种缺点。美国数学史家 M. 克莱因说，“由于坚持要把他们的几何搞得统一、完整和简单，由于把抽象思维同实用分开，所以古典希腊几何成为一门成就有限的学科。它狭隘了人们的视界，使他们的头脑接受不到新思想和新方法，它的内部存在使它自己死亡的种子。”几何逐渐丧失了它在数学中的统治地位，算术、代数重新成为整个数学的基础，进而用数来解释一切，这样我们就又回到了毕达哥拉斯的“万物皆数”。

（三）

向毕达哥拉斯哲学的回归运动，首先是在数学中进行的，这表现在两个方面：其一是数系的不断扩展，其二是算术和代数重新占据主导地位。

人类在长期实践中，逐渐有了 1，2，3，……自然数的概念。有了它，人们就可以数出任何一个事物集合中元素的多少。同时，在实际计算过程中，人们不仅发现了单个数之间的联系，而且发现了一些普遍的运算规律，如加法和乘法的结合律、交换律、分配律等。

这样就形成了具有一定关系和规律的数的系统。

有了自然数的概念之后，可以解决生产和生活中遇到的许多问题，但由于实践的发展，又感到仅有自然数不够用。例如在测量中发现，所选用的单位不能在被测的量上置放整数次，而必须把单位加以分割，以便利用单位的一部分来更准确地表示量。也就是说，不是用整数，而是用分数来表示量。分数就是这样产生的。分数的出现引起数系的扩展。据记载，古埃及人在公元前 17 世纪已经使用分数了，我国在春秋战国时也有了分数概念。令人难以相信的是，迟至 17 世纪它还没有被普遍承认为数。只是到后来，数学家提供了分数的几何解释，并且又证明分数满足自然数的那些基本运算法则：结合律、交换律、分配律之后，人们才承认它们是数。

公元前 4 世纪，毕达哥拉斯学派引进了无理数。无理数引进产生的影响，我们已经讲了，而这个问题直到 19 世纪，数学家使分析算术化时，才由德国数学家戴德金和康托尔等人彻底解决。戴德金用有理数的分割，康托尔用有理数序列的等价类来定义无理数。

分数、无理数还与具体的量有联系，而负数和虚数产生于方程求解，决非由于人们的生活需要，更难为人们接受。1150 年印度数学家巴士卡拉在求解二次方程 $x^2-45x=250$ 时，得到 x 的两个根：50 和 -5。他把这个负根当作没有意义的东西舍弃了。后来，负数通过阿拉伯人传到欧洲，但 16 和 17 世纪的大多数数学家并不承认它们是数。甚至 18 世纪的英国数学家马塞雷还说，“就我所能判断的而言，它们只会把方程的整个理论搞糊涂、而且把一些就其本质说来是出奇地明显简单的东西搞得晦涩难懂，玄妙莫测……。因此很希望代数里决不容许有负根，或者说再一次把它们从代数里驱逐出去。实际上，直到现代，负数才被真正地理解。

关于复数的引进，前面已经讲过了。

数系的扩展并没有到此终结。19 世纪英国数学家哈密尔顿在寻找三维复数时，创立了四元数，即 $a+b\vec{i}+c\vec{j}+d\vec{k}$，其 a，b，c，d 为

实数。必须指出，四元数代数不满足乘法交换律。四元数的创立对代数的发展有不可估量的重要性。一旦数学家认识到可以构造一个有意义的、有用的数系，它可以不具有实数的交换性，那么他们就觉得可以创造更偏离实数通常性质的数。这对于向量代数和向量分析的建立是很重要的，向量比四元数违反更多的代数法则。向量是物理思想的真正工具。

19 世纪末，康托尔创立了超限数。20 世纪 60 年代美国数学家鲁滨逊创立了非标准实数。

随着数系的扩展，数的威力越来越大，它不仅满足了数学进一步发展的需要，而且使数学得到更为广泛的应用。

现在我们来说明，算术和代数如何在数学中重新占居主导地位的。

由于引入了较好的符号体系，代数在 16 和 17 世纪得到巨大的发展，代数逐渐摆脱几何的束缚，成为独立的数学分支。当时，有些数学家已经认识到算术与代数的优越性。法国数学家韦达和笛卡尔用代数来帮助解几何作图题。笛卡尔采取的另一个重大步骤是，他用 a^2 既表示一块面积，又表示一个长度。他说，一些线段的乘积可以仍是线段；在这里，他所涉及的是数量，而不是希腊人的几何线段。17 世纪另一位数学家沃利斯走得更远，他在《算术》中用代数方法推导出欧几里得《原本》第五篇比例论中的所有结论。

然而，为颠倒代数与几何的地位铺平道路的是笛卡尔创立的解析几何。他清楚地看到了几何方法的缺陷；欧氏几何中的每个证明总要求某种奇巧的想法。他还批评希腊人的几何过于抽象，过多地依赖于图形。同时他看到了代数的力量，代数方法的一般性；他认为代数使数学机械化，因而使思考和运算步骤变得简单，无须化很大的脑力，甚至有可能使数学创造变成一种几乎是自动化的工作。代数在提供广泛的方法论方面高出希腊人的几何方法。

笛卡尔在他的《几何学》中较全面地叙述了解析几何的基本思想，并创造了一种方法，即引进坐标，首先建立点与数组的一一对应关系：实数与直线上的点，实数偶与平面上的点，实数三元组与空间中的点都构成一一对应。进而将曲线看作动点的轨迹，应用变量所适合的方程表示，并根据方程描绘出曲线。因此，解析几何的基本内涵和方法是通过坐标的建立，将几何的基本元素——点和代数的基本研究对象——数对应起来，然后建立曲线或曲面与方程的对应。如果已知动点的某种运动规律，即可建立动点的轨迹方程；有了变量所适合的方程，就可以作出它所表示的几何图形，并根据方程来讨论一些几何性质。于是，就能用代数方法解决几何问题了。解析几何的创立改变了数学的面貌。

解析几何提高了代数在数学中的地位，推动了数学的发展。然而，彻底改变数学面貌，使代数与几何的地位完全颠倒过来，起决定性作用的是微积分。

17 世纪是一个创造丰富的时期，而最辉煌的成就是微积分的发明。它的出现是整个数学史，也是整个人类历史上的一件大事。

微积分与解析几何不同，它的对象是函数，而不是几何图形。函数概念是研究运动和变化的重要工具，微积分则提供了计算瞬时变化率、非匀速运动的路程以及曲边形面积的普遍方法，解决了算术、代数、几何根本不能解决的问题。以前，人们能计算多边形、圆、圆扇形、圆弓形的面积。阿基米德费了好大劲才算出抛物线弓形的面积。然而，利用微积分能简便地计算各种极不相同的曲线围成的面积。

微分方程的出现，使新方法显示出更大的威力。微分方程所具有的意义在于：许多物理问题和技术问题的研究可以化为这类方程的求解问题。微分方程已经成为研究自然现象的有力手段。力学、天文学、物理学和技术科学借助于微积方程已经取得巨大的成

就。

除了微分方程之外，还出现了微分几何、变分法，复变函数等等。数学分析的蓬勃发展，它不仅成为数学的中心和主要部分，而且还渗入数学的古老分支。微积分出现后，人们把代数看成是，以多项式表示的单变量或多变量函数的学说；以微积分的方法研究几何图形的性质就产生了微分几何。最后，欧拉把分析方法引入数论，奠定了解析数论的基础。

但是，应该指出，微积分所占居的这种中心和主导地位是很不牢固的。因为刚创立的微积分很不完善，尤其是它自身没有牢固的基础。

牛顿和莱布尼兹是用几何方法创立微积分的。他们以无穷小作为自己理论的基础。牛顿把线段或面积的无穷小增量叫做瞬。莱布尼兹把无穷小叫做微分，dx 是横坐标上的微分，dy 是纵坐标上的微分；接着他利用巴罗的特征三角形说明 dy/dx。无穷小到底是什么？牛顿认为，无穷小既不是有限的，又不是零。这样的东西实在难以理解。因此，他给出三种解释：瞬、流数、最终比。莱布尼兹也同样缺乏决断，他时而把微分看成不确定的量，时而看作定性的零。显然，他们都没有说清，无穷小到底是什么。作为微积分基础的无穷小是含糊不清的。

正因为基础概念含糊不清，新创立的微积分受到来自各方面的批评。1695 年荷兰数学家纽文蒂说，无法理解无穷小量与 0 的区别，并质问为什么无穷小量的和能够是有限量。更猛烈的批评来自英国大主教贝克莱，他说，“这些瞬息增量又是什么呢？既不是有限的量，又不是无限小量，也不是无。我们能不能把它们叫作死去数量的鬼魂呢？”

19 世纪，在微积分经过近两个世纪的蓬勃发展之后，数学家才决心来解决这个含糊不清的问题，为它建立牢固的基础。以前有过的把它奠基于几何之上的希望，由于 18 世纪微积分日益增长的

复杂性而破灭。更重要的是，高斯在 1799 年就表示了对几何真理的怀疑，1817 年他又认定真理只存在于算术之中，这与他已经研究非欧几何有关系。由于对几何的不信任，数学家决心把微积分建立在算术这个基础上。人们常把这叫做分析的算术化。

微积分的严密化运动从波尔察诺、柯西开始，为魏尔斯特拉斯、戴德金、康托尔进一步发展。法国数学家柯西被认为是近代微积分的主要奠基人。在关于微积分基础混沌一片的争论中，他看出核心问题是关于极限的定义。他第一次使极限概念摆脱与几何和运动直观的牵连，给出了建立在数和函数概念上的定义。在有了严格的极限定义之后，柯西就能够定义令人费解的无穷小。他把无穷小定义为极限为 0 的变量，从此无穷小被纳入函数的范畴。接着，他给出了微积分基本概念——导数和积分——的精确定义，澄清了微分、无穷大、连续性等概念。柯西根本上革新了旧的理论体系，实现了微积分基础的一次革命。

然而，柯西的工作仍不够严密、完善。而最不足之处是他对微积分立论的基础——实数，没有给以严格定义。微积分是建立在极限基础上的变量数学，而极限运算需要一个封闭的论域。为了证明序列收敛准则的充分性，柯西给出了无理数的定义：无理数是有理数序列的极限。他没有注意到这一定义的循环性。后人认识到，必须不依赖极限概念，独立地定义无理数。康托尔和戴德金分别给出了这样的定义。变量数学独立地建造完备数域的任务，终于在 19 世纪后半叶完成。这个完备的数域是实数域。实数域的构造成功，使两千多年存在于算术与几何之间的鸿沟得以填平，古希腊人算术连续统的梦想终于在严格的科学意义上得以实现。微积分经过一段曲折的发展，现在有了自己的基础，驱散了头上笼罩的疑云，牢牢地占据着数学中的主导地位。美国数学家波耶在总结微积分的整个发展时说，“从毕达哥拉斯关于不公度的发现，以及对数与无限予以恰当的定义为起点，孕育了导致微积分的各种研究。而其