

自动控制

吴舒辞 主编

交流放大器 K_1



两相伺服电动机

自整角机接收机 Δu

自整角机发送机

光点显示器

技术

中国林业出版社



自动控制技术

吴舒辞 主编

中国林业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

自动控制技术/吴舒辞主编. —北京: 中国林业出版社, 2000. 4
ISBN 7-5038-2546-4

I. 自… I. 吴… III. 自动控制 IV. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 05460 号

自动控制技术

出版 中国林业出版社 (北京市西城区刘海胡同 7 号) 邮编 100009
印刷 北京地质印刷厂印刷
发行 新华书店北京发行所
版次 2000 年 4 月第 1 版 2000 年 4 月第 1 次印刷
开本 787mm×1092mm 1/16 印张: 11
字数 268 千字
印数 1~1050 册

定价 18.00 元

前 言

为了贯彻教育部关于 21 世纪课程体系改革的精神,适应林业工程发展的新形势,满足其生产中电子技术、自动控制技术广泛应用的需要,按照林业工程类专业教学要求,根据林业工程中自动控制技术的基本情况,我们编写了本书。

编写本书的目的是使林业工程类专业和机械类专业的学生能对自动控制技术的基本原理和方法有个较全面的了解。基础理论以应用为目的,专业内容以理解为适度,结合林业工程中自动控制技术和电子技术应用的实际,在选材的广度上作了有益的尝试。

本书的特点是综合性较强,内容较新。主要包括自动控制的基本理论,传感器技术,电力电子技术,单片机(计算机)控制技术四个方面的内容,在较大程度上反映了目前林业工程中电子技术和自动控制技术应用的实际情况。本书可作为林业工程类和某些机械类专业的教材,对从事相关行业的工程技术人员掌握自动控制技术也是一本实用的参考书。

本书由中南林学院吴舒辞副教授主编,并编写了第一、二、三章;廖迎新讲师编写了第四、五章;曹建湘工程师绘制了第一、二、三章的插图,最后由吴舒辞统稿。原机械工业部青年专家、上海人造板机器厂刘葆青高级工程师审阅了全稿。

在本书的出版过程中,得到了中南林学院教务处的大力支持,在此致以诚挚的谢意。

限于编者的水平和经验,本书定有不足之处,切盼使用本书的同志批评、指正。

编 者

1999 年 9 月

目 录

前言

第一章 自动控制的基本理论和数学模型	(1)
1.1 自动控制系统和自动控制理论简介	(1)
1.2 随动系统、自动稳定系统和数字控制系统	(3)
1.3 控制系统的基本要求	(5)
1.4 控制系统的数学模型	(5)
1.5 拉普拉斯变换基础	(8)
1.6 传递函数	(14)
习题 1	(23)
第二章 线性系统的时域分析法	(27)
2.1 典型试验信号	(27)
2.2 一阶系统对典型信号的响应	(29)
2.3 二阶系统对单位阶跃信号的响应	(32)
2.4 二阶系统响应性能的改善	(43)
2.5 控制系统的稳定性	(47)
2.6 系统稳态误差的分析与计算	(52)
2.7 静态误差系数和动态误差系数	(55)
习题 2	(61)
第三章 信号检测与传感器	(63)
3.1 传感器概论	(63)
3.2 传感器的基本特征	(64)
3.3 电阻式传感器	(70)
3.4 电容式传感器	(73)
3.5 电容传感器在木材工业中的应用	(77)
3.6 电感式传感器	(78)
3.7 热电式传感器	(79)
习题 3	(80)
第四章 电力电子与交流传动	(81)
4.1 电力半导体器件	(81)

4.2 晶闸管的触发电路·····	(85)
4.3 三相可控整流电路·····	(90)
4.4 逆变器·····	(93)
4.5 交流电机调速控制系统·····	(97)
习题 4·····	(103)
第五章 计算机过程控制 ·····	(104)
5.1 计算机控制系统概述·····	(104)
5.2 计算机控制的数学基础·····	(108)
5.3 计算机常规控制技术·····	(113)
5.4 一位微处理机·····	(118)
5.5 单片机·····	(124)
5.6 可编程序控制器·····	(149)
5.7 计算机控制在木材加工领域中的应用·····	(162)
习题 5·····	(168)
主要参考文献·····	(169)

第一章 自动控制的基本理论和数学模型

1.1 自动控制系统和自动控制理论简介

在现代科学技术中以至在现代社会的多个领域中,自动控制技术都得到空前的发展和广泛深入的应用。大至宇航,小至玩具,都有自动控制技术的应用。自动控制技术目前仍处于迅猛的发展过程中,它越来越深刻地影响着我们生活的方方面面。自动控制技术水平的高低直接反映了一个国家的科学技术实力。在科学研究、工程技术、产品的生产与制造等各个领域中,自动控制技术对改善劳动条件,提高产品质量和劳动生产率,实现企业管理自动化都取得了十分明显的效果。

自动控制就是指在没有人直接参与的情况下,利用控制装置使被控对象(如机器、设备或生产过程等)的某一被控量或某一工作状态能自动地按照预定的规律运行。例如数控机床按预定程序进行加工;化学反应炉中的温度和压力自动地维持恒定或按预定程序自动地进行调节;人造卫星准确地入轨和回收;玩具汽车遭遇阻碍时自动转向等。所有这一切,都是自动控制技术具体应用的结果。

电子计算机的应用和发展极大地推动了自动控制技术的进步,计算机(单片机)控制已成为自动控制技术不可分割的组成部分。

自动控制系统是指能够对被控对象的工作状态进行自动控制的系统。其主要组成部分是控制装置和被控对象两大部分。自动控制理论就是研究这些自动控制过程共同规律的一门技术科学。自动控制理论又可分为经典控制理论和现代控制理论两大部分。

经典控制理论是研究单输入,单输出的自动控制系统的理论,而现代控制理论则是研究多输入,多输出,变参数,非线性等控制系统的理论。经典控制理论以传递函数为基础,而现代控制理论则以状态空间法为基础。

经典控制理论经过长期发展,在工程实际应用中业已成熟,本书主要介绍经典控制理论的基本理论,基本分析方法。

控制系统可分为开环控制和闭环控制(反馈控制)两大类。开环控制是指系统的输出量对系统的控制没有任何作用的控制过程。

例 1.1 用直流电机拖动的速度控制系统。如图 1.1 所示。

当负载力矩不变时,控制电压(输入量)与电机转速(输出量)具有对应关系。电机转速(输出量)并不参与控制作用。因此是开环控制。但是,当摩擦力增大使负载转矩发生变化时(扰动),电机转速也将发生波动,这有时是不利的。

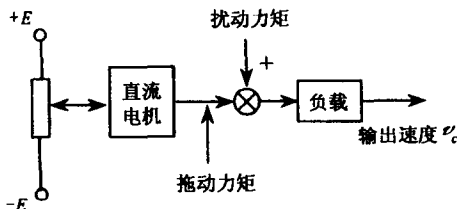


图 1.1 直流电机拖动的速度开环控制系统

开环系统的精度仅取决于组成系统的元件特性(如定子、转子)的稳定程度。因此,开环系统没有抗干扰能力,没有自我纠正调节能力,控制精度较低。尽管如此,开环系统结构简单、成本低、容易实现,在某些自动化装置中仍被采用。

闭环控制是指系统的输出量对控制作用有影响的控制过程,其输出量对系统的作用是通过反馈来进行的,故也称为反馈控制。其基本工作原理是:由输入元件,反馈元件和比较环节去“测量偏差”,而由放大变换元件和执行元件去“消除偏差”,使得无论是外部扰动还是内部参数的变化所引起的输出量的偏差,都能由闭环系统自动进行修正与调节。反馈控制是自动控制系统最基本的控制方式,也是应用最广泛的一种控制系统。

例 1.2 在上述开环系统中,若用测速电机把图 1.1 中的输出速度转换成与其成比例的电压,再负反馈到差动放大器的输入端进行比较放大,即可构成闭环速度控制系统。如图 1.2 所示。

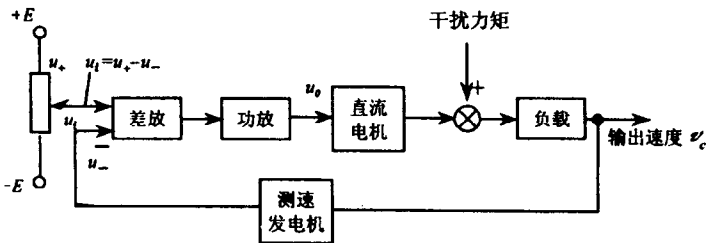


图 1.2 直流电机拖动的速度闭环控制系统

其自动调节过程如下:当系统受扰动力矩干扰使输出速度偏高(低)于希望值时,测速电机将其转速转换成相应的较高(低)电压,这个电压被反馈回输入端 u_- ,由于 u_+ 调节后就保持恒定,而 $u_- \uparrow (\downarrow)$ 使差放的输入电压 $u_r = (u_+ - u_-) \downarrow (\uparrow)$,而功放对此电压 u_r 进行放大,输出电压 $u_0 = Au_r \downarrow (\uparrow)$,最后,这个输出电压 u_0 使直流电动机的转速降(升)至希望值,从而完成自动调节过程。值得指出的是,该过程进行得非常快。再就是在一定的范围内,干扰产生的输出“偏差”越大,系统自我调节的“力量”也越大。

当测速发电机输出的电压 $u_- = u_+$ 时,差放的输入电压为零,直流电动机不能正常工作。这表明为保证系统正常工作,直流电动机最终达到的稳态值 v_{∞} 与原给定速度 v_i (由 u_+ 所决定)之间应有一个差值存在,这个差值称为稳态误差。

从控制精度来考虑,开环控制系统的精度完全由选用高稳定性、高精度的元件或采取有效的抗干扰措施来保证。而闭环控制,由于采用负反馈,系统对外部或内部干扰的影响都不敏感,故选用不太精密的元件即可达到较为精确的控制。

从控制的稳定性来考虑,开环系统一般不存在不稳定的问题,而闭环系统的稳定性则始终是一个十分重要的问题。

一般说来,若系统的输入量能够预知,且对系统中可能出现的干扰能有效地抑制时,采用开环控制较好。但对于许多系统来说,输入量和扰动都是无法预计的,这种情况宜采用闭环控制。

1.2 随动系统、自动稳定系统和数字控制系统

1.2.1 函数记录仪

随动系统也称伺服系统。它是指闭环系统的输入量是任意的时间函数，而输出量为相同的物理量且能以一定的精度跟随输入量变化。如机床、雷达、函数记录仪等自动控制系统，都属于随动系统。

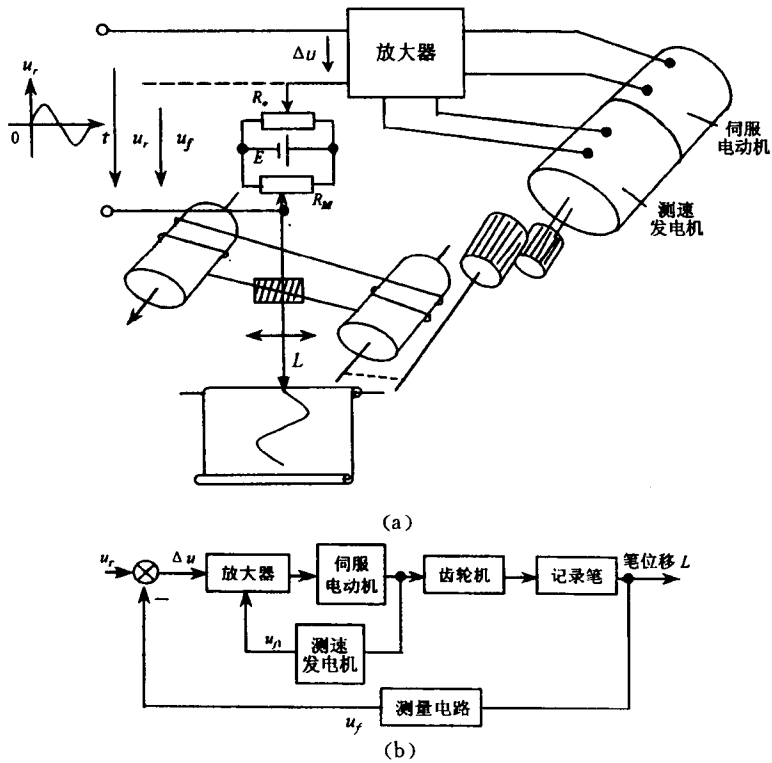


图 1.3 函数记录仪(a)示意图、(b)框图

函数记录仪的功能是可以在直角坐标上自动描述两个电量的函数关系，也可在走纸机构的纸带上描绘输入信号 u_r 对时间的函数关系(如图 1.3(a)(b) 所示)。

电位器 R_0 和 R_M 组成桥式测量电路，记录笔固定在电位器 R_M 的电刷上，故测量电路的输出电压 u_f 与记录笔的位移 L 成正比。当输入信号为 u_r 时，放大器输入端得到偏差电压 $\Delta u = u_r - u_f$ 经放大后去驱动伺服电动机，并通过齿轮系及绳轮带动记录笔移动，移动的结果使 Δu 减小，直到 $\Delta u = 0$ 电动机停止转动。

当 u_r 随时间连续变化时，记录笔便描绘出其随时间连续变化的相应的曲线。

1.2.2 炉温自动控制系统

自动稳定系统是指闭环系统的参考输入信号(或输出量)保持恒定的系统。如稳压、稳流、稳速、温度自动调节系统等都是属于自动稳定系统。如图 1.4 所示。

炉温自动控制系统的目的是使炉温保持给定值。当炉温 t 偏离给定值 t_i (由电位器确定)，测温电阻器 R_t 的阻值发生变化，使电桥失去平衡，电桥将输出一电压 Δu 经放大器放大后去驱动电机，再经减速器去控制进气阀门的开度 φ ，以改变加热气体的进气量，达到使炉

温趋于给定值 t_i 的目的。

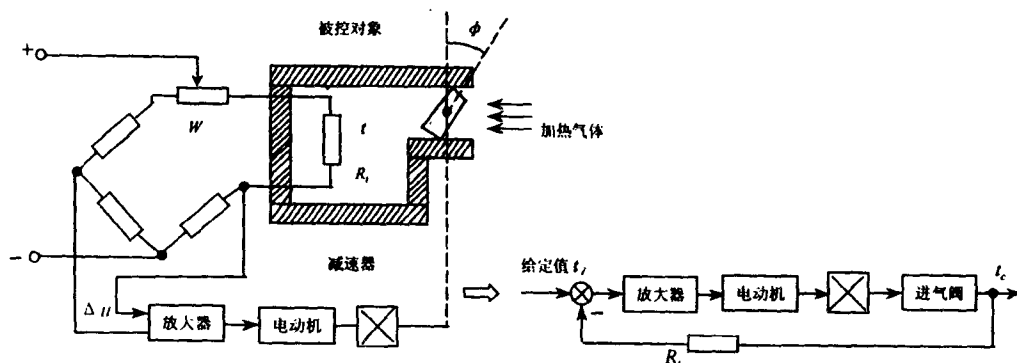


图 1.4 炉温自动控制系统

1.2.3 数字控制系统

典型的数控设备是数控机床和坐标测量机,其特点是工作过程按规定的程序自动进行。计算机数控(Computer Numerical Control, CNC)机床原理框图如图 1.5 所示。

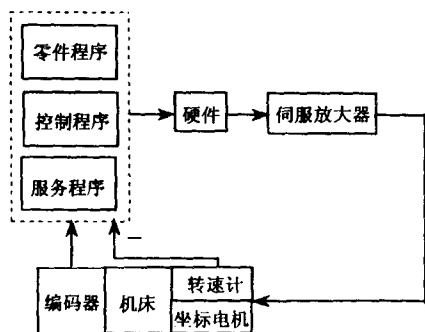


图 1.5 计算机数控(CNC)系统

零件程序(包含对被加工零件的要求和切削条件等),控制程序(将接受到的零件程序作为输入数据,经过运算产生驱动信号)、服务程序(用来检查、编辑和修改零件程序)组成 CNC 系统软件的主要部分。CNC 系统软件丰富、柔性大、成本较低,故在制造加工系统中应用非常广泛。

CNC 硬件主要有:伺服放大器、传感器检测电路及接口部件等。

1.2.4 一般自动控制系统的基本组成

典型的自动控制系统的基本组成如方框图 1.6 所示。信号的传输方向用箭头表示。负反应用“-”号表示,正反应用“+”号表示,前者表示输入信号与反馈信号相减,后者表示相加。

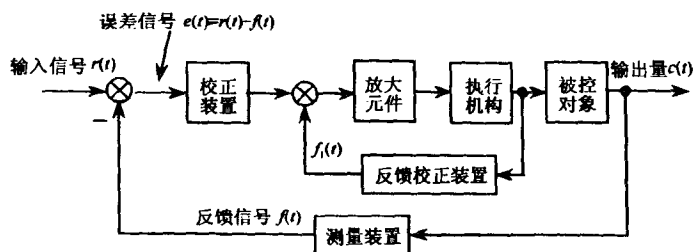


图 1.6 一般自动控制系统的基本组成

测量装置:对系统的输出量 c 进行测量,将输出量变换成主反馈信号 $f(t)$ 。如例 1.2 中的测速发电机。

比较元件:对系统的输入量 $r(t)$ 和主反馈信号进行比较,给出偏差(误差)信号 $e(t)$ 。如例 1.2 中的差分放大器。

放大元件:对微弱的偏差信号 $e(t) = r(t) - f(t)$ 进行放大,输出足够功率的控制信号

k 。如例 1.2 中的功率放大器。

执行元件:使被控制量(输出量 $c(t)$) 与希望值趋于一致。如例 1.2 中的直流电动机。

被控对象:系统要控制的机器、装置或某一物理量。

校正装置:为改善性能而设,通常是一些参数或结构便于调整的元件。

1.3 控制系统的基本要求

尽管自动控制系统有不同的类型,对每个系统也有一些具体要求,但对各类系统来说,我们感兴趣的是在已知系统的结构和参数时,该系统在某种典型信号的输入时,其被控量变化的全过程。对被控量变化全过程的基本要求是稳定性,快速性,准确性。

1.3.1 稳定性

任何一个正常的控制系统,首先必须是稳定的,即其被控量偏离期望值的初始偏差应随着时间的增长而逐渐减小或趋于零。例如对恒温控制系统,被控量炉温 t 因扰动而偏离期望值 t_0 后,经过一个较短的过渡时间,被控量炉温应恢复到原来的期望值。又例如对于稳定的函数记录仪随动系统,被控量记录笔的位移 L 应能始终跟踪输入参量的变化。一个不稳定系统是无法实现预定的控制任务的。

我们将要重点研究的线性自动控制系统,其稳定性是由系统结构自身所决定的,而与外界因素无关。这使得我们在设计一个线性自动控制系统时,能够通过适当的结构和选择合适的元件来保证系统的稳定性。

从数学上看,一个稳定的控制系统在阶跃信号或扰动的作用下,其响应的暂态过程是收敛的。而一个不稳定系统,其响应可能呈现发散的振荡现象,激烈而持久的振荡会使元件过载设备受损。

1.3.2 快速性

任何一个自动控制系统,由于元件的惯性作用,被控量的响应总有一个暂态过程。我们要求系统具有一定的响应速度。即暂态过程越短,系统快速性越好。快速性是反映系统动态性能的一个指标,它与外界作用及干扰信号无关,而只取决于系统本身的结构形式及元件参数。

1.3.3 准确性

我们希望系统在暂态过程结束后,被控量达到的稳态值应与期望值一致,而实际上二者之间存在误差,称为稳态误差。稳态误差为稳态指标,它是衡量控制系统控制精度的重要指标。

1.4 控制系统的数学模型

数学模型是描述系统在运动过程中各物理量之间的数学关系表达式。数学模型又可分为静态模型与动态模型。若所讨论的物理量(变量)的各阶导数为零,表明它不随时间而变化,此时可以用一代数方程来表达各变量之间的关系,称为静态模型。若所讨论的物理量随时间变化且涉及变量的导数,这时可以用一微分方程来描述,称为动态模型。我们的思路是:在已知输入量和输出量(变量)初始条件的情况下,对微分方程进行求解,从而得到输出量的表达式,根据所得输出量表达式就可对系统进行性能分析等。

建立数学模型主要有分析法和实验法两种。分析法是依据物理定律、化学定律等分别列

出相应的运动方程。本书只介绍分析法。值得指出的是任何数学模型都必须用实验去验证、修正。

一个合理的数学模型是能以最简化的形式,正确地表述系统的动态特性。然而由于实际系统都存在着分布参数,时变参数,非线性参数,因此,得到的数学模型为非线性的偏微分方程。求解这样的微分方程是相当困难的,有时甚至无法求解。通常根据研究对象的具体情况,略去一些次要因素,以得到一个较简单的线性的数学模型。

在自动控制系统理论中,常见的数学模型有时域中的微分方程,差分方程;复域中的传递函数、结构图;频域中的频率特性等。

例 1.3 如图 1.7 所示,由电阻 R 、电感 L 和电容 C 组成的无源网络,列出以 $u_r(t)$ 为输入量,以 $u_c(t)$ 为输出量的运动方程。

解:设回路电流为 $i(t)$,则电感 L 、电阻 R 和电容 C 上的电压分别为

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_R = iR, \quad u_C = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

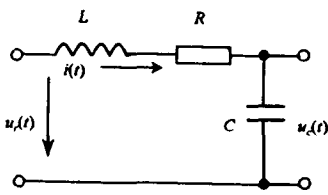


图 1.7 RLC 无源网络

根据克希霍夫定律有: $u_L + u_R + u_C = u_r$

为了消去中间变量 $i(t)$ 得到输出变量 $u_c(t)$ 与 $u_r(t)$ 的关系,对 $u_c(t)$ 求导 $i(t) = C\dot{u}_c(t)$,代入上式得:

$$LC\ddot{u}_c(t) + RC\dot{u}_c(t) + u_c(t) = u_r(t) \quad (1.1)$$

式中: $\dot{u}_c(t) \equiv \frac{du_c(t)}{dt}$, $\ddot{u}_c(t) \equiv \frac{d^2u_c(t)}{dt^2}$

式(1.1)就是 RLC 无源网络的数学模型,它是一个常

系数的线性二阶微分方程。

例 1.4 如图 1.8 所示由弹簧 k ,质量块 m 和阻尼器 α 组成的机械位移(活塞)系统,摩擦力的大小与速度成正比,比例系数为 α ,方向与运动方向相反。列出系统在输入量外力 $F(t)$ 的作用下,输出量位移 $x(t)$ 的运动方程。

解:根据牛顿定律: $ma = \sum F_i$,

式中 $a = \ddot{x}(t)$ 为 m 的加速度

作用在物体上的合力为 $\sum F_i = F + F_a + F_k$

$$F_k = -kx(t), \quad F_a = -\alpha\dot{x}(t)$$

$$\therefore m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (1.2)$$

这就是活塞系统的时域数学模型,它也是一个二阶线性常系数微分方程。

例 1.5 图 1.9 所示是由电枢控制的直流电动机系统。图中激磁电压为恒值, R 、 L 、 $i(t)$ 、 $e(t)$ 分别为电枢绕组的电阻、电感、电流和反电动势; J 和 α 分别为电动机和负载共同折合到电动机轴上的等效转动惯量和等效摩擦系数; M_m 为电动机电磁力矩, M_L 为折合到电动机轴上的总负载转矩。列出以电枢控制电压 $u_r(t)$ 为输入量,以电动机轴角位移 $\theta(t)$ 或角速度 $\omega(t)$ 为输出量的运动方程。

解:略去电枢涡流和磁滞影响,当 u_f 为恒值时,磁滞磁通量 Φ 也为常值。

(1) 根据克希霍夫定律,得回路方程为:

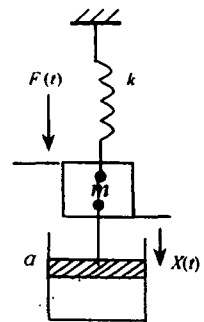


图 1.8 机械位移(活塞)系统

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + e(t) = u_r(t) \quad (1.3)$$

(2) 寻找关系式, 消去中间变量 $i(t)$ 、 $e(t)$ 。电动机电枢反电势 $e(t)$ 与电枢角速度成正比

$$e(t) = k_e \dot{\theta}(t) \quad k_e \text{ 称反电势常数} \quad (1.4)$$

电动机电磁转矩 M_m 正比于电枢电流 i 与磁通量 Φ 之积, 因 Φ 为常数, 故

$$M_m(t) = k_m i(t) \quad k_m \text{ 称力矩常数} \quad (1.5)$$

根据刚体转动定律得:

$$I\ddot{\theta}(t) + \alpha\dot{\theta}(t) = M_m(t) - M_L(t) = k_m i(t) - M_L(t) \quad (1.6)$$

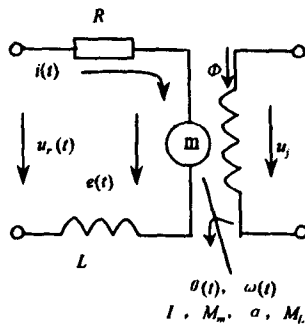


图 1.9 电枢控制的直流电动机系统

(3) 将(1.4)(1.5)代入(1.3)便可消去中间变量:

$$LI\ddot{\theta}(t) + (L\alpha + RI)\dot{\theta}(t) + (R\alpha + k_m k_e)\dot{\theta}(t) = k_m u_r(t) - LM_L(t) - RM_L(t)$$

$$\because \omega(t) = \dot{\theta}(t)$$

$$\therefore LI\dot{\omega}(t) + (L\alpha + RI)\dot{\omega}(t) + (R\alpha + k_m k_e)\omega(t) = k_m u_r(t) - LM_L(t) - RM_L(t) \quad (1.7)$$

讨论:(1) 通常电枢绕组的电感 L 较小, 若略去不计, 则(1.7)可写为:

$$\tau\dot{\omega}(t) + \omega(t) = k_1 u_r(t) - k_2 M_L(t) \quad (1.8)$$

$$\text{或} \quad \tau\dot{\theta}(t) + \theta(t) = k_1 u_r(t) - k_2 M_L(t) \quad (1.9)$$

$$\text{式中 } \tau = \frac{RI}{R\alpha + k_m k_e} \text{ 称为电动机机电时常数} \quad (1.10)$$

$$k_1 = \frac{k_m}{R\alpha + k_m k_e} \quad k_2 = \frac{R}{k_m} k_1 \text{ 称电动机传递系数} \quad (1.11)$$

(2) 若电枢电阻 R 电动机的转动惯量 I 都很小而略去不计时, 则 $\tau = k_2 = 0 \quad k_1 = 1/k_e$

$$\text{所以(1.8)化为:} \quad \omega(t) = \frac{1}{k_e} u_r(t) \quad (1.12)$$

这时电动机的转速 $\omega(t)$ 与电枢电压 $u_r(t)$ 成正比, 表明在这种条件下电动机可作为测速发电机使用。

例 1.6 图 1.10 为齿轮系, 它常用于实现减速, 增大力矩或达到有效的功率转换。齿轮 1 和齿轮 2 的转动惯量, 摩擦系数、角位移、齿数分别为 $I_1, I_2, \alpha_1, \alpha_2, \theta_1, \theta_2, n_1, n_2$, 齿轮 1 的动力矩、负载转矩分别为 $M_r(t), M_1(t)$, 齿轮 2 的动力矩、负载转矩分别为 $M_2(t), M_L(t)$ 。试列出其运动方程。

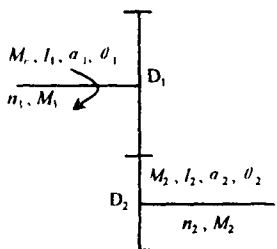


图 1.10 两齿轮传动系统

解:(1) 在齿轮传动中, 两齿轮线速度相同, 传送的功率也相同。

$$\therefore \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \quad (1.13)$$

$$M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2 \quad (1.14)$$

ω, r 分别表示相应齿轮的角速度, 半径。

(2) 半径比等于齿数比, 即 $\frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2}$

于是:
$$\omega_2 = \frac{n_1}{n_2}\omega_1; \quad M_2 = \frac{n_1}{n_2}M_1 \quad (1.15)$$

(3) 根据转动定律分别写出齿轮 1、齿轮 2 的运动方程:

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = M_r(t) - M_1(t) - \alpha_1\omega_1 \quad (1.16)$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = M_2(t) - M_L(t) - \alpha_2\omega_2 \quad (1.17)$$

由(1.16)、(1.17) 消去中间变量 ω_1 、 M_1 、 M_2 , 可得, 以 M_r 为输入量, $\omega_2(t)$ 为输出量的微分方程。

由(1.16) $\cdot \frac{n_1}{n_2}$ + (1.17) $\cdot (\frac{n_1}{n_2})^2$ 化简得:

$$I \frac{d\omega_2}{dt} + \alpha\omega_2 = M_r - M_L' \quad (1.18)$$

式中

$$I = \frac{1}{n_1 n_2} (n_2^2 I_1 + n_1^2 I_2) \quad (1.19)$$

$$\alpha = \frac{1}{n_1 n_2} (n_2^2 \alpha_1 + n_1^2 \alpha_2) \quad (1.20)$$

$$M_L' = \frac{n_1}{n_2} M_L \quad (1.21)$$

分别为折合到齿轮 2 的等效转动惯量、等效摩擦系数和等效负载转矩。

式(1.18) 即为两齿轮传动系的数学模型, 它是一个常系数的线性一阶微分方程。

综上所述, 可将写元件运动方程的步骤归纳如下: ① 根据系统或元件的工作原理, 确定输入量和输出量; ② 根据相关定律, 写出微分方程; ③ 消去中间变量, 获得输入量与输出量关系的运动方程。

1.5 拉普拉斯变换基础

鉴于林业工程专业、某些机械类专业及其他非自控专业没有学习过拉普拉斯(Laplace) 变换, 而拉氏变换又是线性控制理论的数学基础, 故下面结合控制系统对拉普拉斯变换作一简要介绍。

1.5.1 拉普拉斯变换的定义和性质

设实函数 $f(t)$ 满足 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$

定义 $f(t)$ 的拉氏变换为:
$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s) \quad (1.22)$$

式中 $s = \sigma + j\omega$ 为复变量, 称 $F(s) = L[f(t)]$ 为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换。 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的象函数, $f(t)$ 为 $F(s)$ 的原函数, 象函数的符号用相应原函数符号的大写来表示。

根据拉氏变换的定义, 通过简单的积分运算, 不难求得常见函数的象函数。

例 1.7 阶跃函数

阶跃函数定义为:
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & t \geq 0 \end{cases}$$

\therefore
$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-st} dt = A/s \quad (1.23)$$

例 1.8 斜坡函数(阶跃速度函数)

阶跃速度函数定义为:
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ kt & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} kt \cdot e^{-st} dt = k/s^2 \quad (1.24)$$

例 1.9 抛物线函数(阶跃加速度函数)

$$\text{阶跃加速度函数定义为: } f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}at^2 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} \frac{1}{2}at^2 \cdot e^{-st} dt = a/s^3 \quad (1.25)$$

例 1.10 冲击函数(脉冲函数)

$$\text{冲击函数定义为: } \delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \text{ 或 } t \geq t_0 \\ A/t_0 & t_0 \geq t \geq 0 \end{cases} \text{ 且满足 } \int_0^{\infty} \delta(t) dt = A$$

$$\therefore F(s) = L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = A \quad (1.26)$$

例 1.11 正弦函数 $f(t) = A \sin \omega t$ 。式中 A 为振幅, ω 为角频率。

$$\therefore F(s) = L[A \sin \omega t] = \int_0^{\infty} A \sin \omega t e^{-st} dt = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (1.27)$$

设 $F(s) = L[f(t)]$, 拉普拉斯变换具有下列性质。

性质 1 线性定理

$$L[af_1(t) \pm bf_2(t)] = aL[f_1(t)] \pm bL[f_2(t)] = aF_1(s) \pm bF_2(s) \quad (1.28)$$

性质 2 微分定理

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0); \quad L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (1.29)$$

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (1.30)$$

$$\text{当所有初始条件为零时有 } L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) \quad (1.31)$$

$$\text{性质 3 积分定理 } L\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s} \quad (1.32)$$

$$\text{式中 } f^{-1}(0) = \int f(t) dt|_{t=0}$$

$$\text{性质 4 时延定理 } L[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s) \quad (1.33)$$

$$\text{性质 5 频移定理 } L[e^{-at} f(t)] = F(s + a) \quad (1.34)$$

$$\text{性质 6 初值定理, 若 } \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \text{ 存在, 则有 } f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (1.35)$$

$$\text{性质 7 终值定理, 若 } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \text{ 存在, 且除在坐标原点有惟一的极点外, } sF(s) \text{ 在包含 } j\omega \text{ 轴的右半 } [s] \text{ 平面内是解析的, 则 } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (1.36)$$

此外还有下列三条性质:

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}; \quad L\left[\frac{1}{t^n} f(t)\right] = \underbrace{\int_s^{\infty} \cdots \int_s^{\infty}}_n F(s) ds; \quad L[f(t/\tau)] = \tau F(\tau s) \quad (1.37)$$

利用拉普拉斯变换的性质, 可以由一些简单函数的象函数, 求出一些较复杂函数的象函数。

例 1.12 求 $L[t^n]$

解: 利用(1.37)第一式, 选取 $f(t) = 1, F(s) = 1/s$

于是有：
$$L[t^n] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(s^{-1}) = n!/s^{n+1} \quad (1.38)$$

例 1.13 求 $L[\cos\omega t]$

解：利用(1.29),
$$L[\cos\omega t] = L\left[\frac{1}{\omega} \frac{d\sin\omega t}{dt}\right] \\ = \frac{1}{\omega} \left[s \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - f(0) \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (1.39)$$

例 1.14 求 $L[e^{-at}\sin\omega t]$

解：利用(1.34)可得：
$$L[e^{-at}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (1.40)$$

例 1.15 求 $L[e^{-at}\cos\omega t]$

解：利用(1.39)、(1.34)得：
$$L[e^{-at}\cos\omega t] = \frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (1.41)$$

常见函数的拉普拉斯变换见表 1.1。

表 1.1 拉普拉斯变换表

	$f(t)$	$F(s)$
1	单位脉冲 $\delta(t)$	1
2	单位阶跃 $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$t^n (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
7	$t^n e^{-at} (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
9	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
10	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
11	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
12	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
13	线性定理： $\begin{cases} L[af(t)] = aF(s) \\ L[af_1(t) \pm bf_2(t)] = aF_1(s) \pm bF_2(s) \end{cases}$	
14	微分定理： $\begin{cases} L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0) \\ L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \\ L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{(k-1)}(0) \\ \text{式中 } f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(t) \end{cases}$	

(续)

	$f(t)$	$F(s)$
15	积分定理: $L[\int f(t)dt] = \frac{F(s)}{s} + \frac{[\int f(t)dt]_{t=0}}{s}$ $L[\int \dots \int f(t)(dt)^n] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} [\dots \int f(t)(dt)^k]_{t=0}$	
16	频移定理: $L[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$	
17	时延定理: $L[f(t-a)] = e^{-as}F(s)$	
18	$L[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$; $L[t^n f(t)] = (-)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	
19	$L[\frac{1}{t}f(t)] = \int_s^{\infty} F(s)ds$; $L[\frac{1}{t^n}f(t)] = \underbrace{\int_s^{\infty} \dots \int_s^{\infty}}_n F(s)ds$	
20	$L[f(\frac{t}{\tau})] = \tau F(\tau s)$	

1.5.2 拉普拉斯反变换

由象函数 $F(s)$ 求原函数 $f(t)$ 的运算称为拉普拉斯反变换。按复变函数积分法求拉氏反变换比较复杂,这里只介绍常用的部分分式法。部分分式法是将 $F(s)$ 分解成一些简单的有理分式函数之和,由变换表 1.1 一一查出反变换对应的原函数 $f_i(t)$,即可获得所求的原函数

$$f(t) = \sum_i f_i(t)$$

$F(s)$ 通常是 s 的有理分式函数,其一般形式为:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = k \frac{s^m + b_1 s_{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (1.42)$$

式中 $k, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ 均为实数, n, m 为正整数,且 $n \geq m$ 。先将 $F(s)$ 分母的多项式进行因式分解即

$$A(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) \quad (1.43)$$

式中 $s = p_i$ 为 $A(s) = 0$ 的根,也是 $F(s)$ 的极点。

下面就 $A(s) = 0$ 无重根、有重根、有共轭复根三种情况各举一例。

例 1.16 求 $F(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$ 的原函数 $f(t)$

解:(1) 对分母分解因式

$$A(s) = s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3)$$

这是 $A(s) = 0$ 无重根的情况,可设 $F(s) = \frac{b_1}{s+1} + \frac{b_2}{s+3}$

(2) 求系数 b_1, b_2

上式必须是个恒等式,故两边乘以 $s+1$ 也成立

$$(s+1)F(s) = b_1 + b_2 \frac{s+1}{s+3}$$

为了能直接求出 b_1 ,在两边取极限 $s \rightarrow -1$ (可使式中不出现 b_2)