高等数学

习题课教程

GaoDeng ShuXue

XiTiKe JiaoCheng

主　编：李伟

副主编：赵亚光

天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等数学
习题课教程

主　编　李　伟
副主编　赵亚光

天津大学出版社
Tianjin University Press

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程/李伟,赵亚光编著.—天津:天津大学出版社,2004.9

ISBN 7-5618-2043-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①李… ②赵… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 101293 号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨风和
地　　址	天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
网　　址	www.tjup.com
电　　话	发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷	河北省永清县印刷厂
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	140mm×203mm
印　　张	10.5
字　　数	273 千
版　　次	2004 年 9 月第 1 版
印　　次	2004 年 9 月第 1 次
印　　数	1-5 000
定　　价	20.00 元

前言

高等数学是理工类大学生的一门重要的基础课，每位理科大学生为了学好它都付出了艰辛的努力.毋庸置疑，要想学好高等数学，做一定量的习题是必须的，这有利于加深对基本概念与基本知识的理解.然而，不少学生对基本概念和基本知识并不重视，在一知半解的情况下盲目地做题，因此，看到题目往往不知从何入手.有的学生虽然做了大量的练习题，但却不加以总结，因而达不到或者大大削弱了做题的目的.

为了对学生起到同步辅导的作用，本书与同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第五版)相配合.每一章都分了若干单元，每一单元都由“需要掌握的主要知识”、“重点难点剖析”、“例题解析”三部分组成.在“需要掌握的主要知识”部分中，列举了本单元的主要概念和主要结果，其具体内容可参见所用教材.在“重点难点剖析”部分中，对本单元中重要的、不易理解的内容做了剖析，目的是使学生对本单元的基本知识有一个深刻的理解和认识.在“例题解析”部分中，强化了解题前的分析和解题后的总结，以利于培养学生分析问题和解决问题的能力.

本书由李伟教授主编，赵亚光副主编，陈则民教授主审，张大克教授统稿.参加编写的有关泽满(第一、二章)、

张励(第三、四章)、赵亚光(第五、八章)、邱玉文(第六章)、李伟(第七、九章)、刘寅立(第十章)、张绍璞(第十一、十二章).

本书在编写过程中得到了天津科技大学理学院领导及数学教研室各位同仁的关心和支持.在此,向他们表示衷心的感谢.

由于作者的水平所限,不当之处在所难免,恳请读者批评指正.

作者

2004年8月6日于天津科技大学

目　录

第一章　函数与极限 ………………………………………… (1)
　第一单元　函数 ………………………………………… (1)
　第二单元　极限 ………………………………………… (5)
　第三单元　函数的连续性 …………………………… (18)
第二章　导数与微分 ………………………………………… (26)
　第一单元　导数与高阶导数 ………………………… (26)
　第二单元　微分　微分在近似计算中的应用 ……… (37)
第三章　微分中值定理与导数的应用 …………………… (42)
　第一单元　微分中值定理 …………………………… (42)
　第二单元　洛必达法则 ……………………………… (51)
　第三单元　泰勒公式 ………………………………… (57)
　第四单元　用导数研究函数 ………………………… (63)
第四章　不定积分 …………………………………………… (76)
　第一单元　不定积分的定义与基本积分法 ………… (76)
　第二单元　几种特殊类型函数的积分法 …………… (86)
第五章　定积分 ……………………………………………… (96)
　第一单元　定积分的概念与性质 …………………… (96)
　第二单元　定积分的计算 ………………………… (102)
　第三单元　反常积分 ……………………………… (112)
第六章　定积分的应用 ………………………………… (116)
第七章　空间解析几何与向量代数 …………………… (134)
　第一单元　向量代数 ……………………………… (134)
　第二单元　曲面和空间曲线 ……………………… (143)

第三单元 平面与空间直线…………………………………………（151）
第八章 多元函数的微分法及应用…………………………………（168）
第一单元 偏导数 全微分 方向导数与梯度………（168）
第二单元 复合函数与隐函数微分法………………………（174）
第三单元 多元函数微分法的应用…………………………（180）
第九章 重积分……………………………………………………………（186）
第一单元 二重积分的定义、性质及计算 ……………（186）
第二单元 三重积分的概念及计算…………………………（199）
第三单元 重积分的应用……………………………………………（210）
第十章 曲线积分与曲面积分…………………………………………（221）
第一单元 曲线积分……………………………………………………（221）
第二单元 格林公式及其应用………………………………………（230）
第三单元 曲面积分……………………………………………………（238）
第四单元 高斯公式 斯托克斯公式………………………（248）
第十一章 无穷级数……………………………………………………（253）
第一单元 常数项级数…………………………………………………（253）
第二单元 幂级数…………………………………………………………（266）
第三单元 傅里叶级数…………………………………………………（283）
第十二章 微分方程……………………………………………………（293）
第一单元 一阶微分方程……………………………………………（293）
第二单元 可降阶的高阶微分方程………………………………（306）
第三单元 二阶线性微分方程………………………………………（313）

第一章　函数与极限

第一单元　函数

一、需要掌握的主要知识

1.集合及其运算

2.映射、逆映射、复合映射

3.函数的定义及性质

(1)有界性;(2)单调性;(3)奇偶性;(4)周期性

4.反函数、复合函数、初等函数

二、重点难点剖析

1.关于映射及函数

映射是两个集合 X,Y 之间的一个法则.这里要注意的是:其一,这两个集合 X,Y 可以是任意集合,可以是数集,也可以不是数集;其二,这个法则必须是 Y 中有且有一个元素,通过 f,X 中的元素与其相对应.函数是映射的特例,它限制集合 X 与 Y 都是数集,而且 X 为 $\mathbf{R}$ 的一个子集,Y 为实数集 $\mathbf{R}$.

定义域在函数定义中是一个十分重要的概念,只要二函数的定义域不同,则二函数一定不相同.

2.函数的有界性问题

有两个问题需要注意:

(1)函数的有界性是函数在某一点集上的整体性质,而不能谈函数在某点有界.函数在某点集上有界的充要条件是它在该点集

既有上界又有下界；

(2)若一个函数在某数集有界(有上界，有下界)，需要注意的是界不是唯一的，例如 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，$|\sin x|\leqslant 1$，1 及所有大于 1 的数都可以作为它的界，同时 1 及大于 1 的数都可以取作它的上界，-1 及一切小于 -1 的数都可以作为它的下界.

3. 函数的单调性问题

有些函数在定义的区间上不一定单调，但是在其定义的部分子区间上可能是单调的，例如 $y=x^2$，$y=\sin x$ 等都可以作为这方面的例子，因此，说函数单调一定要指明其单调区间. 我们通常称在其定义域的一个子集上单调的函数为局部单调函数.

4. 周期函数的周期

一个函数是周期函数，那么它的周期不是唯一的，事实上，若 T 为周期函数 $f(x)$ 的周期，kT(k 为整数，$k\neq 0$)都可以作为它的周期，我们通常指的周期是指它的最小正周期，但要指出的是，并不是所有周期函数都存在着最小正周期，首先常数函数 $y=C$ 是周期函数，任何实数都可以作为它的周期，但它没有最小正周期；可以证明狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数},\end{cases}$ 任何正有理数 r 都是它的周期，但它也没有最小正周期.

5. 函数的奇偶性问题

当我们讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性问题时，特别要注意函数 $f(x)$ 必须定义在对称区间上，即只有在某个对称区间上，才可以讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性. 若 $f(x)$ 为偶函数，则在其对称区间上 $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称. 若 $f(x)$ 为奇函数，则在其对称区间上 $f(x)$ 的图形关于原点对称.

6. 关于反函数问题

函数 $y=f(x)$ 如果有反函数 $x=\varphi(y)$，那么 $y=f(x)$ 与 $x=$

$\varphi(y)$的图像是同一条曲线.当 $x=\varphi(y)$表示成以 x 为自变量,y 为因变量的形式 $y=\varphi(x)$时,它的图形和原来的直接函数 $y=f(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.单调函数必定存在反函数,但该条件仅是充分的,并不必要,即不单调的函数也可能存在反函数,例如 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\in[-1,0],\\ x, & x\in(0,1],\end{cases}$就存在反函数,函数是否存在反函数,取决于 f 是否为其定义域内的逆映射.

7.关于复合函数

若函数 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$两个函数可以"复合"为一个"新"函数时,显然 $\varphi(x)$的值域与 $f(u)$的定义域必须有非零的交集,否则就无法由 x 得到 u,再由 u 得到 y.在通常情况下为简单起见一般要求 $\varphi(x)$的值域要属于 $f(u)$的定义域,因此复合而成的函数 $f[\varphi(x)]$的定义域可能是 $\varphi(x)$的定义域,也可能是 $\varphi(x)$定义域的一个子集(见例 3).

有时我们还需要把一个复合函数分解成几个简单的基本函数或其四则运算形式.例如可将 $y=f\{\varphi[\omega(x)]\}$分解成 $y=f(u)$,$u=\varphi(v)$及 $v=\omega(x)$的形式.

三、例题解析

例 1 设 $f(x)=2\ln x$,$g(x)=\ln x^2$,$f(x)$与 $g(x)$是否为相同函数?

解 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,而 $g(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,所以两函数的定义域不相同,因此 $f(x)$与 $g(x)$不是相同的函数.

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ 1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}e^x, & x>1,\\ x^2-1, & x\leqslant 1,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解

$$f[g(x)]=\begin{cases} g(x)+1, & g(x)>0, \text{而当 } g(x)>0 \text{ 时 } x>1 \text{ 或 } x<-1, \\ 1, & g(x)\leqslant 0, \text{当 } g(x)\leqslant 0 \text{ 时 } -1\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

当 $x>1$ 时，$g(x)=e^x>0$，所以 $f[g(x)]=g(x)+1=e^x+1$.

当 $x<-1$ 时，$g(x)=x^2-1>0$，所以 $f[g(x)]=g(x)+1=x^2-1+1=x^2$.

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$g(x)\leqslant 0$，$f[g(x)]=1$.

$$\text{故 } f[g(x)]=\begin{cases} e^x+1, & x>1, \\ 1, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ x^2, & x<-1. \end{cases}$$

例 3 设 $f(u)=\arccos u$，$u=\varphi(x)=2+x^2$ 能否构成复合函数.

解 $f(u)=\arccos u$ 的定义域为 $D_1:[-1,1]$. $u=\varphi(x)=2+x^2$ 的值域为 $W_2:[2,+\infty)$. 由于 $D_1\cap W_2=\varnothing$，所以，$f(u)=\arccos u$ 与 $u=\varphi(x)=2+x^2$ 不能构成复合函数.

例 4 设 $f(e^x+e^{-x})=e^{2x}+e^{-2x}$，求 $f(x)$，$f(e^x-e^{-x})$.

分析 可将 $f[g(x)]=\varphi(x)$ 的右端 $\varphi(x)$ 凑成 $g(x)$ 的表达式形式，最后再将 $g(x)$ 换成 t.

解 由于
$$f(e^x+e^{-x})=e^{2x}+e^{-2x}=(e^x+e^{-x})^2-2, \text{令 } e^x+e^{-x}=t,$$

即 $f(t)=t^2-2$，所以 $f(x)=x^2-2$.

$$f(e^x-e^{-x})=(e^x-e^{-x})^2-2=e^{2x}+e^{-2x}-4.$$

例 5 设 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$，求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域 $(a>0)$.

解 由 $1\leqslant x+a\leqslant 2$ 得 $1-a\leqslant x\leqslant 2-a$.

由 $1\leqslant x-a\leqslant 2$ 得 $1+a\leqslant x\leqslant 2+a$.

当 $2-a\geqslant 1+a$ 即 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，所求函数定义域为 $[1+a,2-a]$.

当 $2-a<1+a$ 即 $a>\frac{1}{2}$ 时,所求函数定义域为空集.

例 6 判定函数 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

分析 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$ 是对称区间.因此由函数奇偶性定义,我们需讨论 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系.

解 因为

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-e^x}{1+e^x}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}$$

$$=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

例 7 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加.证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证明 设 $x_1,x_2\in(-l,0)$,且 $x_1<x_2$,则 $-x_1,-x_2\in(0,l)$,且 $-x_1>-x_2$.由于 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加,所以 $f(-x_1)>f(-x_2)$.又 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内均为奇函数,所以

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=f[-(-x_2)]-f[-(-x_1)]\\&=-f(-x_2)+f(-x_1)\\&=f(-x_1)-f(-x_2)>0,\end{aligned}$$

因此,当 $x_1,x_2\in(-l,0)$,且 $x_2>x_1$ 时,有 $f(x_2)>f(x_1)$.所以 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

第二单元 极限

一、需要掌握的主要知识

1.数列极限的定义

2.函数极限的定义

1)当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 以 A 为极限的定义

2)单侧极限(左极限、右极限)

3)当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 以 A 为极限的定义,以及 $x\to+\infty$,$x\to-\infty$ 时,$f(x)$ 分别以 A 为极限的定义

3.无穷小量与无穷大量的概念与性质

4.函数极限的性质

1)函数极限的唯一性

2)函数极限的局部有界性

3)函数极限与单侧极限的关系

4)极限的局部保号性

5)无穷小量与极限的关系

5.两个重要极限

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;(2)$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

6.极限存在的准则

7.无穷小的比较

二、重点难点剖析

1.数列的极限

一个数列$\{x_n\}$,随 n 的增大,它的项数是无穷无尽的.所谓数列的极限是研究当项数无限增大时,x_n 的变化趋势,极限是变化趋势,而不是最终结果,定义中的“任给正数 ε”,是用来刻画 x_n 与常数 a 的距离.$|x_n-a|<\varepsilon$ 是指 x_n 和 a 的距离可以小于 ε.“存在正整数 N,当 $n>N$ 时”,是说在 n 增大的过程中,x_n 可以变得和 a 的距离任意小,而并不要求一开始就能使得距离 $|x_n-a|$ 满足任意小.

数列$\{x_n\}$,当 n 充分大时以 a 为极限,与 n 充分大时,x_n 越来

越接近于 a 是不等价的，因为 x_n 越来越接近于 a 并不说明 $|x_n - a|$ 可以任意小，而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 是说当 n 充分大时，x_n 无限趋近于 a，需要注意的是，这里 N 与 ε 之间不存在函数关系，因为当极限存在时，给定一个 $\varepsilon > 0$. 如果能找到一个 N 满足要求，那么所有大于 N 的正整数都可以充作 N. 也就是说，当 $\varepsilon > 0$ 取定后，N 并不唯一确定.

2. 函数极限

在函数极限 $\varepsilon - \delta$ 定义中，要求 $0 < |x - a| < \delta$，而不是 $|x - a| < \delta$，这是因为 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 是研究当自变量 x 无限趋近于 a 时，相应的函数值 $f(x)$ 的变化趋势而不是最终结果. $x\to a$ 是指 x 无限趋近(靠近) a，但不等于 a. 因此在讨论函数极限时，我们可以全然不顾在 $x = a$ 时 $f(x)$ 的情形，即不考虑 $f(x)$ 在 $x = a$ 时是否有定义，即使有定义，也不考虑 $f(a)$ 是多少. 因此，在其"$\varepsilon - \delta$"定义中，限定 $0 < |x - a| < \delta$，而不是 $|x - a| < \delta$，如果不做这种限制，那就必须考虑函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 时的情形，这就会限制了一大批函数极限的研究.

例如　$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$

记号"$\lim\limits_{x\to a} f(x)$"中 $x\to a$ 是前提，我们讨论的是由 $x\to a$ 诱发的 $f(x)$ 的变化趋势，按照这种解释也就不难理解 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 了. 前者研究的是 x 大于 x_0 且无限趋近于 x_0 时相应 $f(x)$ 的变化趋势；而后者则是 x 小于 x_0 而无限趋近于 x_0 时相应 $f(x)$ 的变化趋势.

设函数 $f(x) = \begin{cases} \varphi(x), x > x_0, \\ \psi(x), x \leqslant x_0, \end{cases}$ 研究该函数在分段点 x_0 处的

极限.对于$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$,由于 $x\to x_0$ 意味着 x 无限趋于x_0,并且它可以从左右两侧趋近于 x_0,这时由于$f(x)$是分段函数,所以在 x_0 的两侧 $f(x)$的定义是不同的,所以当我们笼统地求$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$时无法将 $x\to x_0$ 时对应的 $f(x)$用具体的定义式去表达,因而必须分别研究它的左右极限. $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$中 $f(x)$的意义都是确切的,都有相应的定义式: $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\psi(x)$.

例 讨论 $y=e^{\frac{1}{x}}$在$x=0$点的极限.

分析 由于函数 $y=e^{\frac{1}{x}}$在$x=0$左右两侧的变化趋势不同,所以,若求其在点 $x=0$ 的极限,则必须考虑在点 $x=0$ 的左右极限.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}y=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}y=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}y\neq\lim\limits_{x\to 0^+}y$ 所以函数$y=e^{\frac{1}{x}}$在点$x=0$的极限$\lim\limits_{x\to 0}y$不存在.

小结 (1)求分段函数在分段点 x_0 处的极限时要求其左右极限.

(2)有些函数虽然不是分段函数,但由于在点 x_0 左右两侧变化趋势不同,求其极限时也要求其左右极限.例如$\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$.

3.无穷小量与无穷大量

无穷小量是以零为极限的变量,它不是绝对值很小的非零常量.零是作为无穷小的唯一常量.

由于无穷小与函数极限的关系,$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$,其中 $\lim\alpha=0$.所以任何类型函数的极限都可以归结为无穷小去讨论.

在求乘积的极限运算时,可以把其中的一个因式"整个的"用它的等价无穷小去替代,但绝不能在一个和式(或乘积中某一因式是和式)中仅把其中一项用其等价无穷小去替代.

无穷大量是一个变量,任何一个绝对值很大的常量都不是无穷大量,无穷大量是无界量,但无界量却未必是无穷大量,例如:1,0,2,0,3,…,n,0,…无界却不是无穷大量.

4.数列极限与函数极限的性质

数列极限与函数极限有着完全平行的性质,比如极限的唯一性以及局部保号性.但二者也有不同,比如收敛数列必有界,但当函数在某点存在极限,只能保证在这一点附近有界(局部有界).

5.极限存在的准则

极限存在准则本书给了两个.

第一个也简称为"夹逼准则",它告诉我们要求一个函数数列的极限,可以借助于两个已知极限的函数去求,但这两个函数必须满足定理中的两个条件,缺一不可.具体应用时,可以通过已知的不等式将已知函数适当放大或缩小去实现.

第二个准则要注意条件是两个,一为单调性,二为有界性,舍去任一条都不成立,比如自然数列$\{n\}$是单调的,但无界,故不收敛.$\{1+(-1)^n\}$是有界的,但它不收敛,因为它仅有界并不单调,因此用第二个准则时,必须同时证明两个条件皆满足.

这里要强调的是第二个准则,只能判断极限存在与否,不能求出极限值,要求出极限值需用其他方法(见例3中(2)).

三、例题解析

例1 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+3}-n\right]$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$；　(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+1)^{50}}$.

(1)**分析**　虽然所给式子是一个和式，但其项数与 n 有关，当 $n\to\infty$ 时，项数也趋于无穷，与极限加法法则要求有限项的条件不符，故不能用极限的加法法则，而必须先将其整理.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+3}-n\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{[1+(2n-1)]n}{2}}{n+3}-n\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2}{n+3}-n\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{-3n}{n+3}\right]=-3.$$

小结　当求项数与 n 有关的和式极限时，不能直接使用极限的加法法则，通常可考虑先将其整理，使得项数与 n 无关或化成单项式.

(2)**分析**　此题是一个与项数 n 有关的连乘积极限，当 $n\to\infty$ 时，连乘积的项数也趋于无穷多项，因此我们可考虑其中的通项，将其各项因式分解整理化简成与项数 n 无关的式子再求极限.

解　因为 $1-\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k}(k=2,3,\cdots,n)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\lim\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)}{n}=\frac{1}{2}.$$

(3)**分析**　由于极限为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，所以可采用“抓大放小”的办法，分子分母分别提取它们的最高次幂项，化简后再求其极限.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]}{3^{n+1}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}=\dfrac{1}{3}.$