TONGSU SHUXUE MINGZHU YICONG

通俗数学名著译丛

JIEJUEWENTI DE CELÜE

[德国] A · 恩格尔 著

舒五昌 冯志刚 译

上海教育出版社

解决问题的策略

解决问题的策略

[德国] A · 恩格尔 著　舒五昌 冯志刚 译 • 上海教育出版社

Arthur Engel

Problem-Solving Strategies

Springer-Verlag New York, Inc.

根据斯普林格出版社(纽约)1998年版译出

本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得

图书在版编目(CIP)数据

解决问题的策略/(德)恩格尔著;舒五昌,冯志刚译.一上海:上海教育出版社,2004.12

(通俗数学名著译丛/李文林主编)

ISBN 7-5320-9252-6

I.解... II.①恩...②舒...③冯... III.数学一解题一方法 IV.01-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第127140号

通俗数学名著译丛

解决问题的策略

[德]亚瑟·恩格尔 著

舒五昌 冯志刚 译

张明尧 校

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行

易文网:www.ewen.cc

(上海永福路123号 邮政编码:200031)

各地新华书店经销 苏州永新印刷包装有限责任公司印刷

开本 850×1156 1/32 印张 17.5 插页 4 字数 425,000

2005年1月第1版 2005年1月第1次印刷

印数 1-5,000 本

ISBN 7-5320-9252-6/O·0028 定价:(软精)31.00元

译丛序言

数学，这门古老而又常新的科学，已阔步迈进了21世纪.

回顾过去的一个世纪，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位. 数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献. 同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志. 因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学. 现代社会对数学的这种需要，在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面，20世纪数学思想的深刻变革，已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路. 面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，门外汉往往只好望而却步. 这样，提高数学的可接受度，就成为一种当务之急.

一般说来，一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础. 随着中国现代数学研究与教育的长足进步，数学普及工作在我国也受到重视. 早在60年代，华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物，激发了一代青少年学习数学的兴趣，影响绵延至今. 改革开放以来，我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力. 但总体来说，我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距. 我国数学要率先赶超世界先进水平，数学普及与传播方面的赶超乃是一

个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的宏伟工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多采.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气.在这样的情况下,上海教育出版社按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作,同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物,在国内还不多见.值得高兴的是,这项工作从一开始就得到了数学界许多人士的赞同与支持,特别是数学大师陈省身先生两次为丛书题词,使我

们深受鼓舞.到目前为止,这套丛书已出版了13种,印数大多逾万,有的已经是第四次印刷,这对编译者来说确是令人欣慰的信息.我们热切希望广大读者继续关心、扶植这项工作,使《通俗数学名著译丛》的出版获得更大的成功.

让我们举手迎接数学科学的新的黄金时代,让公众了解、喜爱数学,让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

2001年8月

前　言

本书是训练德国 IMO 队的产物，是从我们只有短短 14 天的训练——其中还包括六个半天的测验——所产生的结果. 这使我们只能作极为紧凑的训练，"大的思想"是个主导原则. 书中选取了大量的问题来描述这一原则. 选题及思想是分类的有效方法.

本书是为谁写的呢？

为各种竞赛直到最高水平的国际竞赛包括 IMO 和普特南竞赛的教练和参赛者.

为指导数学俱乐部并为俱乐部寻求思想和问题的正规高中教师. 在这里他能找到各种水平的问题，从十分简单的到在各种竞赛中提出过的最为困难的问题.

为想提出本周问题、本月问题及本年研究问题的中学教师. 这并不很容易. 有的失败了，有的保持着而在持续的对数学问题的讨论中得以成功并生成了创造的气氛.

为仅想找些思想并以一些非常规的问题来丰富教学的正规中学教师.

为所有对于解难而有趣的问题感兴趣的人.

本书分成各章，每章以描述主要思想的典型例子开始，随后是许多问题及其解答. 解答有时只是给出导致解答的主要想法的提示. 这使得能把例子和问题的数量增加到 1300 个以上. 读者如试图解这些例子，会更增加本书的效果.

问题几乎都是世界各国的竞赛题. 大多是前苏联的，有的是

匈牙利的，有的是西方国家的，特别是从德国国内竞赛而来. 竞赛题通常是有问题栏目的杂志中的问题的变形. 因此对问题的起源也不容易确定. 如果你见到一个漂亮的问题，你起先会对这问题的创造性而惊讶，后来会在更早的来源中发现这结果. 因为这个原因，有关竞赛的参考书总有些零星分散的感觉. 通常，如果某问题我知道在 25 年以上的话，就不给出来源了. 总之，大多数问题对相应领域的专家来说都是知道的结果.

数学问题有大量的文献. 但作为一个教练，我知道问题总不会足够. 你总是特别想要新题或老题的新解. 任何新的问题集都有些新问题，但像本书这样一本大的书，只有很少对读者来说是新的问题.

问题的安排并无特别的次序，特别它不是按难度增加的次序. 我们不知道如何评估问题的难度. 即使是由 75 个解题能手所组成的 IMO 的主试委员会，在对选取的问题的难度评估时也会犯重大的错误. 400 多个 IMO 的参赛者也不是可靠的检验标准，因为太多是依赖于经常改变的几百位教练的前期训练，如果在训练中解过有关的问题，题目会从很艰深变成为明显的.

我要感谢 Manfred Grathwohl 博士，他帮助我完成了在研究所的工作站及我家中的 PC 机上的各种 LaTeX 文本工作. 在有什么困难的时候，他是个有能力的友好的顾问.

在证明中会有些错误，对此我负全责，因为没有一个同事读过手稿. 读者会错过一些重要的策略，因为我对本书的篇幅有个限制. 特别，高等方法都略去了. 但这也许还是市场上最完全的训练书籍. 很大的缺口是没有像概率和算法等新的论题. 一个例外是第 13 章的博弈论. 这在 IMO 中几乎没有，但在俄罗斯是很普通的.

法兰克福（美茵河畔）　德国

亚瑟·恩格尔

目　录

第1章 不变量原理

我们提出第一个高级的解题策略. 在解某些类型难题时它是特别有用的；而这类题目是容易识别的. 我们将通过解一些运用这个策略的问题来说明. 事实上，**只有通过解题来学解题**.

我们的第一个策略是寻找不变量，它称为**不变量原理**. 这原理适用于算法(博弈，变换). 某一事情要反复地进行. **哪些是依旧相同的？什么是不变的？**有一句容易记住的话：

如果有重复，寻找不改变的东西！

在算法中有个出发的状态 S 和一连串合法的步骤(运动，变换). 寻求对下面问题的回答：

1. 是否能达到一个给定的终态？
2. 找出所有可以达到的终态.
3. 是否收敛于一个终态？
4. 如果存在的话，找出所有纯循环或混循环的周期.

因为不变量原理是个启发性的原理，最好是通过体验和感受来学. 通过解下面的例1到例10就可得到这种体验.

例1 从平面上一个点 $S=(a,b)$(其中 $0<b<a$)出发，我们按下面规则产生一列点 (x_n,y_n)：

$$x_0=a,y_0=b,x_{n+1}=\frac{(x_n+y_n)}{2},y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}.$$

求 $\lim x_n$ 和 $\lim y_n$.

这里很容易找到一个不变量. 从 $x_{n+1}y_{n+1}=x_ny_n$ 对一切 n 成立可以推知对一切 n, $x_ny_n=ab$. 这就是我们寻找的不变量. 开始时我们有 $y_0<x_0$. 这个关系也保持不变. 的确,假定 $y_n<x_n$ 对某个 n 成立,那么 x_{n+1} 是以 y_n, x_n 为端点的线段的中点,而因为调和平均严格地小于算术平均, $y_{n+1}<x_{n+1}$. 这样

$$0<x_{n+1}-y_{n+1}=\frac{x_n-y_n}{x_n+y_n}\cdot\frac{x_n-y_n}{2}<\frac{x_n-y_n}{2}$$

对一切 n 成立. 所以有 $\lim x_n=\lim y_n=x$ 且 $x^2=ab$ 或 $x=\sqrt{ab}$.

这里不变量对我们大有帮助,但看到不变量还不是问题的解决,尽管完成全部解是很容易的.

例 2 设正整数 n 是奇数,在黑板上写下数 $1,2,\cdots,2n$. 然后取任何两个数 a,b,擦去这两个数并写上 $|a-b|$. 证明:最后留下的是一个奇数.

解:设 S 是黑板上所有数的和. 开始时和数是 $S=1+2+\cdots+2n=n(2n+1)$,这是个奇数. 每一步使 S 减小 $2\min(a,b)$,它是个偶数. 所以 S 的奇偶性是个不变量. 在整个化简的过程中总有 $S\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$,所以最后结果也是个奇数.

例 3 一个圆分成六个扇形. 把数 1,0,1,0,0,0 依次(例如按逆时针方向)填入扇形中. 可以把两个相邻的数都增加 1. 通过若干步后是否能使所有六个数都相同?

解:设扇形中的数依次为 a_1, a_2, $\cdots$, a_6,则 $I=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6$ 是个不变量. 开始时 $I=2$. 目标 $I=0$ 是不能达到的.

例 4 国会的每个议员至多有三个敌人. 证明:可以把他们分在两个房间中,使得每个议员在他所在的房中至多有一个敌人.

解:开始我们把所有议员任意地分在两个房中. 设 H 是每个议员在他所在房间中敌人数目的总和. 假定议员 A 在他的房中至少有两个敌人,那么另一间房中他至多有一个敌人. 如果把

A 转到另一间房中，数 H 将减小. 这种减小不可能一直继续下去. 某一时刻 H 将达到绝对最小的值，那时就达到了所要求的分配.

这里我们有一个新的想法. 我们构造了一个正整数值的函数，它在算法的每一步都减小. 所以我们的算法总会结束. 设有严格下降的无限的正整数的数列. H 严格地说并非是不变量，而是单调下降直至成为常数. 这里单调性关系是不变的.

例 5 设四个整数 a, b, c, d 不全都相等. 从 (a,b,c,d) 出发并反复地把 (a,b,c,d) 变成 $(a-b,b-c,c-d,d-a)$，则四数组中至少有一个数最终会变得任意地大.

解：设 $P_n=(a_n,b_n,c_n,d_n)$ 是 n 次迭代后的四数组. 于是有 $a_n+b_n+c_n+d_n=0$（对任何 $n\geqslant 1$）. 我们尚未看到怎样利用这个不变量. 但几何解释通常是有用的. 对四维空间中的点 P_n 来说，一个十分重要的函数是它到原点 $(0,0,0,0)$ 的距离的平方，它就是 $a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2$. 如果能证明它没有上界，我们就完成了证明.

我们试图找出 P_{n+1} 和 P_n 之间的关系：

$$
\begin{aligned}
& a_{n+1}^2+b_{n+1}^2+c_{n+1}^2+d_{n+1}^2 \\
={} & (a_n-b_n)^2+(b_n-c_n)^2+(c_n-d_n)^2+(d_n-a_n)^2 \\
={} & 2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2)-2a_nb_n-2b_nc_n-2c_nd_n-2d_na_n.
\end{aligned}
$$

现在可以利用 $a_n+b_n+c_n+d_n=0$，或者不如用它的平方：

$$
\begin{aligned}
0 &= (a_n+b_n+c_n+d_n)^2 \\
&= (a_n+c_n)^2+(b_n+d_n)^2+2a_nb_n+2a_nd_n+2b_nc_n \\
&\quad +2c_nd_n. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

把(1)和前面式子相加，对于 $a_{n+1}^2+b_{n+1}^2+c_{n+1}^2+d_{n+1}^2$，得到它等于

$$
\begin{aligned}
& 2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2)+(a_n+c_n)^2+(b_n+d_n)^2 \\
\geqslant{} & 2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2).
\end{aligned}
$$

从这个不变的不等式关系就得出：当 $n\geqslant 2$ 时有

$$a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2 \geqslant 2^{n-1}(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2). \qquad (2)$$

P_n 到原点的距离无界地上升，这就意味着至少有一个分量必定变得任意地大.(2)会永远是等式吗？

这里，我们知道到原点的距离是很重要的函数. 每当有一列点时，应该考虑这函数.

例 6 一个算法定义如下：

出发点：$(x_0, y_0)(0<x_0<y_0)$，

每一步：$x_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}, y_{n+1}=\sqrt{x_{n+1}y_n}$.

图 1.1 和算术平均-几何平均不等式表明对一切 n，

$$x_n<y_n \Rightarrow x_{n+1}<y_{n+1},$$

$$y_{n+1}-x_{n+1}<\frac{y_n-x_n}{4}.$$

求出公共的极限 $\lim x_n=\lim y_n=x=y$.

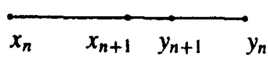

图 1.1

这里不变量能帮助我们. 但找不变量并没有系统的方法，而只是一种启示. 这是经常行之有效的方法，但并非永远如此. 上面两个不等式启示我们从 n 过渡到 $n+1$ 时，要寻求 x_n/y_n 或 y_n-x_n 的变化.

(a) $$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}=\frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_{n+1}y_n}}=\sqrt{\frac{x_{n+1}}{y_n}}=\sqrt{\frac{1+x_n/y_n}{2}}. \qquad (1)$$

这提醒我们利用半角关系式

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

因为我们总有 $0<\dfrac{x_n}{y_n}<1$，可以令 $x_n/y_n=\cos\alpha_n$，于是(1)成为

$$\cos\alpha_{n+1}=\cos\frac{\alpha_n}{2} \Rightarrow \alpha_n=\frac{\alpha_0}{2^n} \Rightarrow 2^n\alpha_n=\alpha_0,$$

这等价于

$$2^n \arccos \frac{x_n}{y_n}=\arccos \frac{x_0}{y_0}. \tag{2}$$

这是个不变量！

(b) 为了避免平方根，我们考虑 $y_n^2-x_n^2$ 而不是 y_n-x_n.

$$y_{n+1}^2-x_{n+1}^2=\frac{y_n^2-x_n^2}{4} \Rightarrow 2\sqrt{y_{n+1}^2-x_{n+1}^2}=\sqrt{y_n^2-x_n^2}$$

或

$$2^n\sqrt{y_n^2-x_n^2}=\sqrt{y_0^2-x_0^2}, \tag{3}$$

这是第二个不变量.

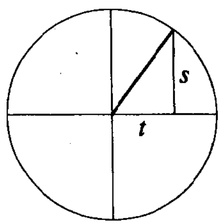

图 1.2 $\arccos t=\arcsin s, s=\sqrt{1-t^2}$.

由图 1.2,(2)和(3)式，我们得到

$$\arccos \frac{x_0}{y_0}=2^n \arccos \frac{x_n}{y_n}=2^n \arcsin \frac{\sqrt{y_n^2-x_n^2}}{y_n}$$
$$=2^n \arcsin \frac{\sqrt{y_0^2-x_0^2}}{2^n y_n}.$$

$n\to\infty$时，右端项收敛于$\sqrt{y_0^2-x_0^2}/y$. 最后，就得到

$$x=y=\frac{\sqrt{y_0^2-x_0^2}}{\arccos(x_0/y_0)}. \tag{4}$$

不用不变量要解这个问题是不大有希望的. 顺便说一下，从任何竞赛的标准说这都是个很难的题目.

例 7 数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的每一个是 1 或 -1，并且有

$$S=a_1a_2a_3a_4+a_2a_3a_4a_5+\cdots+a_na_1a_2a_3=0.$$

证明：$4\mid n$.

解：这是个数论题，但也可以用不变量来解. 如果把任何一个 a_i 换成 $-a_i$，因为有四个循环相邻的项都改变符号，S 模 4 并不改变. 确实，如果四项中两正两负，就没有改变；如果其中一个或三个同号，S 改变 ± 4；如果四个都同号，S 改变 ± 8.

开始时 $S=0$，所以 $S\equiv 0 \pmod 4$. 一步一步地把每个负号都变成正号，并不改变 $S \pmod 4$. 最后依然有 $S\equiv 0 \pmod 4$，但又因 $S=n$，即 $4\mid n$.

例 8 $2n$ 位大使应邀出席一次宴会. 每个大使至多有 $n-1$ 个敌人. 证明：可以安排大使们坐在一个圆桌边，使得没有人与他的敌人是邻坐.

解：开始让大使们任意入坐. 设 H 是相邻两人为敌对者的对数. 我们要找一种当 $H>0$ 时能使这个数减小的算法. 设 (A, B) 是一对敌对者，B 坐在 A 的右边（图 1.3）. 我们必须把他们隔开并尽可能少地产生扰动. 这可以通过把某段弧 BA' 倒过来得到图 1.4 来达到目的. 如果图 1.4 中的 (A, A') 和 (B, B') 都是友好的对，H 就减小了. 剩下只要证明，B' 坐在 A' 右边的这样的一对总是存在的. 我们从 A 开始逆时针地沿桌子走，至少会遇到 n 个 A 的朋友. 在他们的右边至少有 n 个位子，这些位子上不会都坐着 B 的敌人，因为 B 至多只有 $n-1$ 个敌人. 这样总有一个 A 的朋友 A' 的右邻是 B 的朋友 B'.

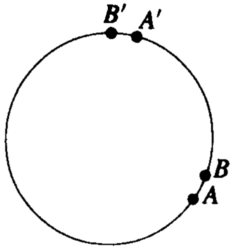

图 1.3 将弧 $A'B$ 倒置.

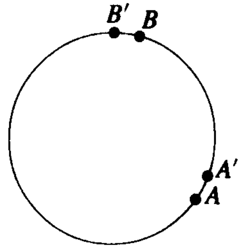

图 1.4

注：本题与例 4 相似但要难得多. 这是图论中的下述定理：设 G 是有 n 个顶点的线性图，如果任何两个顶点的度数之和大于或等于 $n-1$，则 G 有哈密尔顿路. 在我们的特殊情形下，甚至证明了必有 Hamilton 回路.

例 9 在五边形的每个顶点处放一个整数 x_i，它们的和 $S=\sum x_i>0$. 如果 x, y, z 是放在相继三个顶点上的数，而且 $y<0$，就把 (x,y,z) 换成 $(x+y,-y,y+z)$. 只要有一个 $y<0$ 就重复这样做. 试确定这一算法是否总会停止.（1986 年 IMO 的最难的题目.）

解：这一算法总会停止. 证明的关键是（如例 4 和例 8）找一个整数值的非负函数 $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$，它的值在作所给的运算时是减小的. 做出这题的十一个学生中除一个外都找出同一个函数：

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\sum_{i=1}^{5}(x_i-x_{i+2})^2$$

$$x_6=x_1,\quad x_7=x_2.$$

设 $y=x_4<0$，则因为 $s>0$，$f_{新}-f_{旧}=2sx_4<0$. 如果这算法不会停止，就能找到非负整数的无穷下降序列 $f_0>f_1>f_2>\cdots$. 而这样的序列并不存在.

普林斯顿的 B. Chagelle 问：到停止时需要走多少步？他考虑由所有形如 $s(i,j)=x_i+x_{i+1}+\cdots+x_{j-1}(1\leqslant i\leqslant 5, j>i)$ 的和所定义的无限的多重集 S. 多重集是可以有相同元素的集合. 在这个集合中，除了一个元素以外的一切元素或者不变，或者与别的元素发生对换，只有 $s(4,5)=x_4$ 变成 $-x_4$. 这样每做一步，S 中恰有一个元素从负的变成正的. 因为 $s>0$，S 中只有有限多个负元素. 停止前要走的步数等于 S 中负元素的个数. 我们看到 x_i 不必一定是整数.

注：利用计算机找出在输入 a,b,c,d,e 时能给出到停止时要走的步数公式是有趣的. 如果 $s=1$ 这并不花很多力气. 例如

输入为$(n,n,1-4n,n,n)$时给出步数 $f(n)=20n-10$.

例 10　收缩的平方. 经验的探索. 从正整数数列 $S=(a, b, c, d)$出发，导出数列 $S_1=T(S)=(|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$. 序列 $S, S_1, S_2=T(S_1), S_3=T(S_2), \cdots$是否总会结束于$(0,0,0,0)$?

我们收集一些资料作为解的提示：

$$(0,3,10,13)\mapsto(3,7,3,13)\mapsto(4,4,10,10)\mapsto(0,6,0,6)\mapsto(6,6,6,6)\mapsto(0,0,0,0),$$

$$(8,17,3,107)\mapsto(9,14,104,99)\mapsto(5,90,5,90)\mapsto(85,85,85,85)\mapsto(0,0,0,0),$$

$$(91,108,95,294)\mapsto(17,13,199,203)\mapsto(4,186,4,186)\mapsto(182,182,182,182)\mapsto(0,0,0,0).$$

观察：

1. 设 $\max S$ 是 S 的最大数，则 $\max S_{i+1}\leqslant\max S_i$，而只要 $\max S_i>0$，就有 $\max S_{i+4}<\max S_i$. 验证这些观察的结果，这会对我们猜测给出证明.

2. S 和 tS 走到终止有同样的步数.

3. 最多在四步之后，数列的所有四项都变成偶数. 确实，只要模 2 来计算就足够了. 由于循环对称性，只要检验六个数列 $0001\mapsto0011\mapsto0101\mapsto1111\mapsto0000$ 和 $1110\mapsto0011$. 这样，我们就证明了上述推测. 至多在四步后，每项都能被 2 整除. 至多八步后，每项都能被 2^2 整除，……，至多在 $4k$ 步后，每项都能被 2^k 整除. 只要 $\max S<2^k$，所有项都必定变为 0.

在观察 1 中，我们用了另一个策略，即**极端原理：取最大元.** 第 3 章用来讲述这个原理.

在观察 3 中，我们用了**对称性**，应该常常想到这个策略，尽管我们并没有用来讲这个想法的章节.

推广：

(a) 从四个实数出发，例如