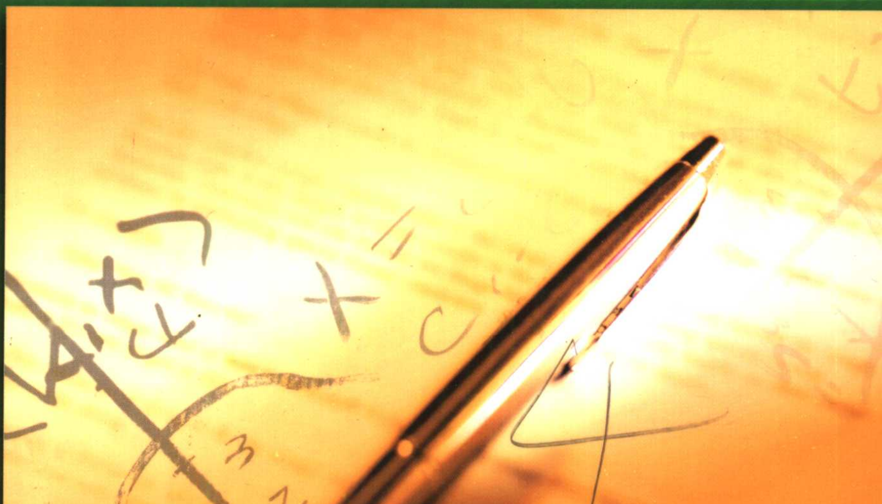
高等学校教学用书

高等数学辅导与测试

下册



主编
张学山
刘裕维

GAODENG SHUXUE FUDAO YU CESHI

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教学用书

高等数学辅导与测试

下　册

主　　编　张学山　刘裕维

主　　审　沈志德

参编人员　张子厚　杨培国　田　原　张　颖

彭利平　江开忠　张后君　朱　萌

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学辅导与测试．下册／张学山，刘裕维主编．
北京：高等教育出版社，2004.6
ISBN 7-04-014243-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．①张…　②刘…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 051166 号

责任编辑　徐　东　　**封面设计**　吴　昊　　**责任印制**　蔡敏燕

书　　名　高等数学辅导与测试（下册）
主　　编　张学山　刘裕维

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码　100011
总　　机　010-82028899
传　　真　021-56965341

购书热线　010-64054588
　　　　　　021-56964871
免费咨询　800-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　　http://www.hep.com.cn
　　　　　　http://www.hepsh.com

排　　版　南京理工排版校对公司
印　　刷　上海市印刷七厂

开　　本　787×960　1/16
印　　张　21.75
字　　数　410 000

版　　次　2004 年 6 月第 1 版
印　　次　2004 年 6 月第 1 次
定　　价　24.80 元

前　言

为了帮助大学一年级学生尽快适应新的学习环境，减少在理解高等数学的基本概念、掌握数学理论等方面的困难，提高学习效率，为后继课程的学习或进一步深造打下扎实的基础，我们组织长期在高等数学教学一线任课的教师编写了这套《高等数学辅导与测试》(上、下册).

本书通过归纳、总结基本概念与基本理论，介绍各种题型的解题思路、方法、技巧以及测试考查，突出训练学生对高等数学的基本概念、基本方法和基本原理的理解与掌握. 在材料的取舍上，我们的原则是：重视基础，适度提高. 一方面，针对一年级学生对于高等数学这门课程尚处于入门阶段，在对基本概念的理解、基本方法的掌握等方面存在不少问题，本书通过多种手段去强化解决这些问题的思路与方法的训练. 另一方面，为了便于学生今后进一步的学习和考试，在本书的例题与测试题中，精选了一定量的硕士研究生入学考试试题. 这些试题，其类型在历届考研中出现的频率较高，在一年级的基础上，又是能够解答的(其中有相当多的试题很基本、并不难解). 此外，在训练一年级学生运用数学的基本概念、基本理论、基本方法去解决问题的能力方面，这些试题的作用是明显的.

高等数学的教学目的是培养学生掌握数学、应用数学的能力，其中综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力尤其重要. 由于日常教学中所授的知识点是离散的，系统性、综合性训练不足，针对这一现实，本书将高等数学的教学内容划分为八篇，将主要知识点先按章节梳理、辅导，再按篇归类小结、测试. 这样的组织结构使得读者对知识的掌握更加系统、更加牢靠，综合应用的能力将大大加强.

本书包括上、下两册. 上册四篇：函数与极限，一元函数微分学，一元函数积分学，空间解析几何. 下册四篇：多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程. 全书以篇为线条，内容包括两个部分：辅导部分与测试部分.

辅导部分与教学同步，按章节展开. 每节有：一、基本概念与理论的总结，在每一节的开头，对概念、定理、公式进行了简明、扼要的叙述，通过总结与剖析，增强读者对这些内容的理解和记忆；二、重点、难点的分析；三、典型例题. 在典型例题部分，精选了各种类型的例题并作详细解答. 对基础性例题和重点例题，在解答前作了解题思路提示或在解题过程中作了解题方法分析；还给出了大量的注解，总结解题方法与技巧或指出易犯的错误，使读者在学习高等数学中少走弯路. 这一部分选题广泛、题型多样、综合性强且重点突出，是贯穿本书的主要部分. 此外，在例题的编排上，遵循循序渐进，由浅入深的原则，以适应不同层次读者的需要.

在每一篇的末尾都有一个“本篇小结”，简要地叙述了该篇在课程中的地位，总结了该篇主要的概念、理论与方法，指出了各知识点之间的联系. 相信在仔细

阅读"本篇小结"后，会对该篇内容有一个总体的把握.

测试部分由三块组成：本篇自测、期中测试和期末测试，共31套试题，其中上册16套，下册15套.本篇自测试题涵盖了该篇所包含的知识点，期中测试与期末测试试题涵盖的分别是期中考试前、期末考试前的内容.各套测试题中，有基础性试题，综合性试题，还有一定量的提高性试题.试题的题型有：单项选择题、填空题、计算题、应用题、证明题.独立完成每套测试题，大约需要3个小时.

为了帮助一年级学生了解全国硕士研究生入学数学统一考试的有关情况，在上册末尾提供了一篇短文"写给准备考研的同学".文中根据教育部颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的规定，简要介绍了考研数学的类型、考试内容和考试范围；以历届考研试题为例，分析了考研数学试题的特点；为准备考研的同学提出了一些指导性的建议.

我们相信，在学习高等数学课程的同时，配合使用这套《高等数学辅导与测试》(上、下册)，通过认真细读全书，独立完成所有习题和测试题，将有助于读者在大学一年级为后继课程的学习以及今后参加高等数学的研究生入学考试打下非常坚实的基础.

本书虽然是针对一年级大学生编写的，但由于其重点、难点突出，思路清晰，例题典型，有相当数量的例题和测试题取自历届考研试题，对于准备报考研究生的读者，也是一本系统全面的复习参考书.使用本书的读者，应仔细阅读本书的辅导部分，认真解答测试部分，积极探索一题多解，加深对各知识点及其相互关系的理解.

书中的例题、习题、测试题有一些标有 * 号，这些题目是为学有余力或准备报考硕士研究生的读者准备的，其他读者可以选做或不做.

本书由张学山、刘裕维主编.参加编写的人员有：第一篇刘裕维；第二篇田原(第二章)，张颖(第三章)；第三篇彭利平(第四、第五章)，张子厚(第六章)；第四篇杨培国；第五篇张子厚；第六篇张颖(第九章)，田原(第十章)；第七篇杨培国；第八篇刘裕维.张学山负责全书的组织、策划与统稿，并编写了各篇的本篇小结，第六篇的本篇自测试题以及上、下册中的期中测试、期末测试试题.书中的短文"写给准备考研的同学"由张学山撰写.沈志德通审了全书，提出了宝贵的意见.江开忠制作了全部的插图.由于教学任务繁重，时间和水平所限，书中难免存在错误与疏漏之处，诚请读者、同行专家指正.

本书在编写过程中，得到上海工程技术大学有关领导，基础教学学院的领导和数学教学部全体教师的大力支持和协助，段承后教授在策划、编写，直到出版的过程中始终给予特别的关注与支持，特表衷心的谢意.在正式出版前两年的试用过程中，许多教师提出了很好的修改意见，张后君、朱萌两位老师为书稿的整理付出大量的心血，在此一并致谢.

编　者

2004年3月于上海

目　　录

第五篇　多元函数微分学

第八章　多元函数微分法及其应用 …… 3

第一节　多元函数的基本概念 …… 3

第二节　偏导数 …… 8

第三节　全微分 …… 12

第四节　多元复合函数的求导法则 …… 15

第五节　隐函数的求导公式 …… 23

第六节　多元函数微分学的几何应用 …… 30

第七节　方向导数与梯度 …… 37

第八节　多元函数的极值及其求法 …… 42

习题八 …… 50

本篇小结 …… 55

本篇自测 A 卷 …… 57

本篇自测 B 卷 …… 59

第六篇　多元函数积分学

第九章　重积分 …… 65

第一节　二重积分的概念与性质 …… 65

第二节　二重积分的计算法 …… 69

第三节　三重积分 …… 83

第四节　重积分的应用 …… 99

习题九 …… 106

第十章　曲线积分与曲面积分 …… 112

第一节　对弧长的曲线积分 …… 112

第二节　对坐标的曲线积分 …… 118

第三节　格林公式及其应用 …… 124

第四节　对面积的曲面积分 …… 134

第五节　对坐标的曲面积分 …… 143

第六节　高斯公式　通量与散度 …… 150

第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度 …… 161
习题十 …… 165
本篇小结 …… 171
本篇自测 A 卷 …… 173
本篇自测 B 卷 …… 176
本篇自测 C 卷 …… 178

第七篇 无穷级数

第十一章 无穷级数 …… 185
第一节 常数项级数的概念和性质 …… 185
第二节 常数项级数的审敛法 …… 190
第三节 幂级数 …… 202
第四节 函数展开成幂级数 …… 208
第五节 函数的幂级数展开式的应用 …… 216
第六节 傅立叶级数 …… 222
第七节 一般周期函数的傅立叶级数 …… 229
习题十一 …… 232
本篇小结 …… 235
本篇自测 A 卷 …… 237
本篇自测 B 卷 …… 238

第八篇 常微分方程

第十二章 微分方程 …… 243
第一节 微分方程的基本概念 …… 243
第二节 可分离变量的微分方程 …… 245
第三节 齐次方程 …… 248
第四节 一阶线性微分方程 …… 252
第五节 全微分方程 …… 257
第六节 可降阶的高阶微分方程 …… 266
第七节 高阶线性微分方程 …… 271
第八节 常系数齐次线性微分方程 …… 275
第九节 常系数非齐次线性微分方程 …… 277
习题十二 …… 284
本篇小结 …… 291
本篇自测 A 卷 …… 294

本篇自测B卷 …… 295

期中测试一 …… 298
期中测试二 …… 301
期中测试三 …… 304
期末测试一 …… 307
期末测试二 …… 310
期末测试三 …… 313

参考答案 …… 316

第五篇　多元函数微分学

第八章　多元函数微分法及其应用

第一节　多元函数的基本概念

一、基本概念

1. 多元函数　设 D 是 R^2 的一个非空子集，称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的二元函数，记作 $z=f(x, y)$，$(x, y)\in D$ 或 $z=f(P)$，$P\in D$，称 D 为函数的定义域，x、y 称为自变量，z 称为因变量. 把数集 $f(D)=\{z\mid z=f(x, y),(x, y)\in D\}$ 称为函数的值域.

一般地，把二元函数定义中的平面点集 D 换成 n 维空间 R^n 的点集 D，映射 $f:D\to R$ 就称为定义在 D 上的 n 元函数，通常记为 $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in D$，当 $n\geqslant 2$ 时，n 元函数统称为多元函数.

注　1° 与一元函数类似，确定二元函数有两个要素，即函数的定义域和对应法则.

2° 由于从一元函数过渡到二元函数会产生许多新的问题，而二元及二元以上函数，从研究方法上讲，没有本质区别，故研究多元函数主要针对二元函数.

2. 二元函数的极限　设二元函数 $f(P)=f(x, y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点，如果存在常数 A，使对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $P(x, y)\in D$ 且 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，总有 $|f(x, y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y)\to(x_0, y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=A,$$

或

$$f(x, y)\to A \quad ((x, y)\to(x_0, y_0)).$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A, \quad 或\ f(P)\to A \quad (P\to P_0).$$

注　上述二元函数的极限又称为二重极限. 尽管二重极限和一元函数极限的定义类似，但由于一元函数极限中 x 趋于 x_0 的方式只有左、右两个方向，而二

重极限中点 $P(x, y)$ 趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 的方式是任意的，因此二重极限比一元函数极限要复杂得多.

3. 二元函数的连续性 设二元函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D, $P_0(x_0, y_0) \in D$. 如果 $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$，则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续. 如果 $f(x, y)$ 在区域 D 的每一点都连续，则称 $f(x, y)$ 在 D 上连续，或称 $f(x, y)$ 是 D 上的连续函数.

在区域 D 内连续的二元函数 $z = f(x, y)$，其图形是一张无洞、无裂缝的连续曲面.

注 1° 函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点连续必须满足三个条件：① $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 有定义；② $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$ 存在；③ $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

2° 设函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D, $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点或边界点. 如果 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 点不连续，则称 $P_0(x_0, y_0)$ 为函数 $f(x, y)$ 的间断点.

二、基本定理

1. 运算法则

(1) 一元函数极限的和、差、积、商四则运算法则适用于二元函数的极限.

(2) 二元连续函数的和、差、积仍是连续函数，在分母不为零处，商也是连续的.

(3) 二元连续函数的复合函数仍是连续函数.

2. 有界闭区域上连续函数的性质

(1) 最值定理　若函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$ 在 D 上一定有最大值和最小值.

(2) 介值定理　若函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x, y)$ 在 D 上取得最大值和最小值之间的任何实数值.

上述关于二元函数的极限、连续的概念及其有关理论，都可以照搬到一般多元函数上去.

(3) 多元初等函数在其定义区域内连续.

三、重点与难点

本节的重点是理解二元函数、二重极限和二元函数的连续性等概念，掌握确定二元函数定义域、计算二重极限以及判定函数连续性的方法. 在概念上应着重搞清楚二元函数和一元函数的区别，以及二重极限和一元函数极限的区别. 本节的难点是关于二重极限的计算以及二重极限不存在性的验证. 应注意掌握二重极限不存在性的验证方法，并由此进一步理解二重极限的概念.

四、典型例题

例 1　(1) 设 $f(x, y) = \dfrac{4xy}{x^2+y^2}$，求 $f(tx, ty)$；

(2) 已知 $f(x+y, e^y) = x^2 y$，求 $f(x, y)$.

【提示】 解此类题目的关键是搞清楚函数的复合关系.

解　(1) $f(tx, ty) = \dfrac{4(tx)(ty)}{(tx)^2+(ty)^2} = \dfrac{4xy}{x^2+y^2}$.

本例中，$f(tx, ty) = f(x, y)$，表明 $f(x, y)$为二元齐次函数.

(2) 令 $x+y=u$，$e^y = v$，解得 $x = u - \ln v$，$y = \ln v$. 代入所给等式，得

$$f(u, v) = (u - \ln v)^2 \ln v,$$

因此，$f(x, y) = (x - \ln y)^2 \ln y$.

例 2　求下列函数的定义域：

(1) $z = \arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}\arccos\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

(2) $z = \sqrt{y-x^2} + \sqrt{4-y}$；

(3) $u = \sqrt{\dfrac{xy}{2}} + \ln(xy)$.

【提示】 求多元函数定义域的方法类似求一元函数的定义域.

解　(1) 由 $\begin{cases} \left|\dfrac{x^2+y^2}{4}\right| \leqslant 1, \\ \left|\dfrac{1}{x^2+y^2}\right| \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4,$

故此函数的定义域为 $D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$.

(2) $\begin{cases} y - x^2 \geqslant 0, \\ 4 - y \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 \leqslant y \leqslant 4$，此函数的定义域为 $D = \{(x, y) \mid x^2 \leqslant y \leqslant 4\}$.

(3) $\begin{cases} \dfrac{xy}{z} \geqslant 0, \\ z \neq 0, \\ xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy > 0, \\ z > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0, \\ y < 0, \\ z > 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ z > 0. \end{cases}$

该函数的定义域为第 Ⅰ 和第 Ⅲ 卦限所在的空间.

注　由例 2 可见，二元函数的定义域为平面点集，三元函数的定义域为空间点集.

例 3　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) 因为

$$0 \leqslant \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2},$$

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = 0$,由夹逼准则,得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

(2) 原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2} \cdot \dfrac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}$.

设 $x^2+y^2=t$,则当 $x\to 0$, $y\to 0$ 时,$t\to 0$, 运用重要极限,得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2\dfrac{t}{2}}{\left(\dfrac{t}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t}}{2} = 0,$$

所以
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

(3) 因为 $\dfrac{\ln(x+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是二元初等函数,其定义域为 $D=\{(x,y)\mid x>-y^2,$ $x^2+y^2\neq 0\}$,而 $(1,0)\in D$,故 $\dfrac{\ln(x+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在 $(1,0)$ 点连续,所以

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+0)}{\sqrt{1+0}} = 0.$$

注 求多元函数的极限有多种方法,常用方法有下面三种:

1° 运用夹逼准则;

2° 通过换元将多元函数化为一元函数,再利用一元函数求极限的方法来计算.

3° 利用多元初等函数在其定义域内的连续性来求极限.

例 4 验证下述极限不存在:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y}$.

【提示】 验证二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在,方法是选择不同的路径(直线或曲线)使得当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时极限不相等,或者选择一条路径使得当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时极限不存在.

解 (1) 沿直线 $y=kx$ 取极限,得

$$原式=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{k^2x^4}{k^2x^4+(1-k)^2x^2}=\begin{cases}1, & k=1,\\ 0, & k\neq1,\end{cases}$$

可见原极限不存在.

(2) 沿曲线 $y=-x+x^3$ 取极限,得

$$原式=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x+x^3}} \frac{-x^2+x^4}{x-x+x^3}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{x}+x\right)=\infty,$$

所以原极限不存在.

例 5 求函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 的间断点.

解 由于当 $y^2-2x=0$ 时函数无定义,故曲线 $y^2=2x$ 上的点为函数的间断点.

注 二元函数的间断点可能为孤立的点(函数的图形上有点洞),也可能形成一条曲线(相应地,函数的图形上有一条裂缝).

例 6 求函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & x=y=0\end{cases}$ 的连续点集.

解 因为 $\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 是二元初等函数,在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处均有定义,从而当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时 $f(x,y)$ 连续.

取 $x=y^2$,则当点 (x,y) 沿此抛物线趋于 $(0,0)$ 点时,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y)=\lim_{y\to0}\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0),$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

综上所述,该函数的连续点集为除原点外的平面区域.

注 验证函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点不连续,可简化为验证当点 (x,y) 沿某一

路径趋于(x_0, y_0)时，$f(x, y)$的极限不存在，或极限存在但不等于$f(x_0, y_0)$.

例 7 证明函数 $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{y(1+x^2)}, & y\neq 0;\\ 0, & y=0\end{cases}$ 在$(0, 0)$点连续.

证明 显然，$f(0, 0)=0$. 因为当 $y\neq 0$ 时，

$$|f(x, y)|=\left|\frac{\sin xy}{y(1+x^2)}\right|\leqslant\frac{|xy|}{|y|(1+x^2)}=\frac{|x|}{1+x^2},$$

而 $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)}\dfrac{x}{1+x^2}=0$，所以 $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)}f(x, y)=0=f(0, 0)$. 即 $f(x, y)$在$(0, 0)$点连续.

第二节 偏导数

一、基本概念

本节概念简述如下：

1. 偏导数 二元函数 $z=f(x, y)$ 在点(x_0, y_0)处关于 x 和关于 y 的偏导数分别定义为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ 也可以记为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$， 或 $\left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$， 或 $f_x(x_0, y_0)$.

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ 有类似的记号.

注 1° 由定义，二元函数关于 x(或 y)求偏导数时是将 y(或 x)看成常数，按照一元函数的求导方法来计算. 类似地，可定义并计算三元以及其他多元函数的偏导数.

2° 几何意义 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ 是空间曲线 $\begin{cases}z=f(x, y),\\ y=y_0\end{cases}$ 在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处的切线对 x 轴的斜率 $\tan\alpha$，其中 α 为切线对 x 轴的倾角，即 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\tan\alpha$.

同理，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\tan\beta$，其中 β 为空间曲线 $\begin{cases}z=f(x, y),\\ x=x_0\end{cases}$ 在点

$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处的切线对 y 轴的倾角.

3° 函数 $z=f(x, y)$ 在(x_0, y_0)点偏导数都存在时，$z=f(x, y)$ 在(x_0, y_0)点不一定连续. 这是多元函数与一元函数的一个不同之处.

4° 如果函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 内每一点(x, y)处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数是 x，y 的函数，称其为函数 $z=f(x, y)$ 的偏导函数，记作 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, z_x，或 $f_x(x, y)$. 类似地，可以定义函数 $z=f(x, y)$ 对 y 的偏导函数，记作$\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, z_y，或 $f_y(x, y)$. 偏导函数通常简称为偏导数.

2. 高阶偏导数 当 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 可继续求偏导时，按照求导次序可得下面四个二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

类似地，可定义三阶及三阶以上的偏导数.

注 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$称为混合偏导数，一般情况下，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，也即求导结果与求导次序有关，因此，计算混合偏导数时应注意求导次序. 但在下述定理的条件下，混合偏导数相等，即混合偏导数与求导次序无关.

定理 如果函数 $z=f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

注 类似地，二阶以上的混合偏导数在连续的条件下，也与求导次序无关.

二、重点与难点

本节的重点是理解偏导数的定义，掌握偏导数的计算. 根据偏导数的定义，计算多元函数关于某个自变量的偏导数，是将其他自变量看作常数，运用一元函数的求导方法，求出偏导数. 本节的难点是利用定义求偏导数.

三、典型例题

例 1 求下列函数的偏导数：

(1) $z=\ln\tan\frac{x}{y}$，求$\frac{\partial z}{\partial y}$; (2) $u=x^{y^z}$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.