

实用小波分析

魏明果 编著

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

实用小波分析

魏明果 编著



 北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

实用小波分析 / 魏明果编著. —北京:北京理工大学出版社,
2005.9

ISBN 7-5640-0580-7

I. 实… II. 魏… III. 小波分析 IV. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 081661 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心)
68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

电子邮箱 / chiefedit@bitpress.com.cn

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京圣瑞伦印刷厂

开 本 / 850 毫米×1168 毫米 1/32

印 张 / 4.5

字 数 / 109 千字

版 次 / 2005 年 9 月第 1 版 2005 年 9 月第 1 次印刷

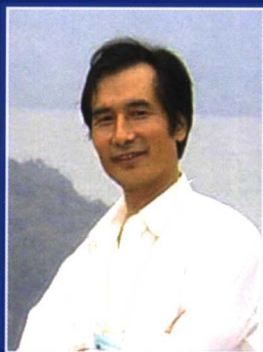
印 数 / 1~3000 册

责任校对 / 陈玉梅

定 价 / 10.00 元

责任印制 / 刘京凤

图书出现印装质量问题,本社负责调换



魏明果，河南鄆城县人，现为三峡大学理学院教授。主要从事应用数学、地质数学、信号与图像处理等方面的教学与研究，在国内外发表学术论文三十余篇。

前 言

小波分析是 20 世纪 80 年代中后期发展起来的一门应用数学分支,由于其数学的完美性和应用的广泛性,使其在应用上得到迅速发展。目前,小波分析在信号与图像处理、模式识别与影像匹配、音乐与语言的人工合成、医学成像与诊断、地震勘探数据处理、大型机械故障的在线检测、计算机视觉、非线性分析、天体物理、自动控制、分形分析、量子力学、计算数学、混沌、遥感等领域都得到了广泛而深入的应用。小波分析之所以得到如此广泛的应用,完全归功于它的数学机理的创见性和完善性、研究背景的具体性、理论与方法的实用性、实现与过程的简便性。小波分析是当今泛函分析、调和分析、时-频分析、数值分析、逼近论和广义函数论等诸多学科交叉融合后最完美的结晶。

小波分析的概念最早是 1974 年由法国地质物理学家 J. Morlet 提出,并通过物理的直观和信号处理的实际经验建立了反演公式,但当时,该理论却未能得到数学家的认可。1986 年法国著名数学家 Y. Meyer 偶然构造出一个真正的小波基,并与 S. Mallat 合作建立了构造小波基的多尺度分析方法之后,小波分析才开始蓬勃发展起来,进而把这一理论引入工程应用,特别是信号处理领域,在小波分析的发展过程中,法国学者 I. Daubechies 和 S. Mallat 发挥了极为重要的作用^{[1],[2]}。

小波分析是为了克服 Fourier 变换的不足而发展起来的。Fourier 变换反映的是信号或函数的整体特征,但在不少实际问题中人们所关心的却是信号在局部时间范围中的特征,如在音乐和

语音信号中,人们希望知道什么时刻演奏什么音符,发出什么样的音节;在地震波勘探中人们关心在什么位置出现什么样的反射波;在信号与图像的边缘检测中,人们关心的是突变信号出现的位置。虽然 Gabor 于 1946 年引进了窗口 Fourier 变换改进了 Fourier 变换在时-频局部分析方面的不足,但由于其时-频局部化窗口大小的固定不变,这与时-频局部化分析中要求:“反映信号高频成分需要窄的时间窗,反映信号低频成分需要宽的时间窗”不一致,这样 Fourier 变换不能满足这一要求,也使其在理论上和应用上都遇到了许多不便。而小波分析作为 Fourier 分析的发展,既保留了 Fourier 分析的优点,又弥补了 Fourier 分析的不足。小波分析中的多尺度分析思想,犹如一台变焦照相机,可以由粗及精地逐步观察信号,在局部时-频分析中具有很强的灵活性,被誉为数学显微镜;在应用中它能自动随着频率增高而调节成窄的“时窗”和宽的“频窗”,又随着频率降低而调节成宽的“时窗”和窄的“频窗”以适应实际分析的需要。另外,小波变换在经过适当离散化后能构成标准正交系或正交基,这些在理论上和应用上都具有十分重要的意义,因此,小波分析才得以在各个领域得到广泛的重视并取得了许多重要的应用。

本书旨在借用小波工具箱并运用形象、直观而不失数学完美性的方法揭示小波分析的实质,但由于作者水平有限,书中难免存在不妥与错误之处,敬请读者批评指正。

本书的出版得到三峡大学应用数学重点学科与宜昌市科技攻关基金的资助。在本书的编写过程中得到了三峡大学理学院数学系同仁及各级领导的大力支持,在此表示衷心的感谢。

编 者
2005.6

目 录

第一章 预备知识	(1)
§ 1.1 函数空间与基	(1)
§ 1.2 Fourier 变换与加窗 Fourier 变换	(8)
§ 1.3 MATLAB 小波工具箱简介	(13)
第二章 连续小波变换	(16)
§ 2.1 小波母函数	(16)
§ 2.2 窗口宽度与 Heisenberg 测不准原理	(22)
§ 2.3 连续小波变换与性质	(25)
§ 2.4 连续小波变换的逆变换	(29)
第三章 离散小波变换	(33)
§ 3.1 离散小波变换及性质	(33)
§ 3.2 小波框架	(34)
§ 3.3 二进小波变换	(35)
第四章 多尺度分析与正交小波变换	(40)
§ 4.1 多尺度分析	(41)
§ 4.2 尺度函数与小波函数的性质	(48)
§ 4.3 正交小波变换与 Mallat 算法	(59)
§ 4.4 离散序列的小波变换	(62)
第五章 正交小波基的构造	(71)
§ 5.1 Shannon 采样定理	(71)
§ 5.2 正交小波基的构造	(73)
第六章 小波包及其应用	(78)

§ 6.1	小波包的基本原理与性质·····	(79)
§ 6.2	最优基准则及选取·····	(90)
第七章	二维小波变换及其应用 ·····	(96)
§ 7.1	基本概念与性质·····	(96)
§ 7.2	二维多尺度分析·····	(98)
§ 7.3	二维小波变换在图像处理中的应用 ·····	(102)
第八章	信号的奇异性检测 ·····	(115)
§ 8.1	信号奇异性检测原理 ·····	(116)
§ 8.2	小波变换模极大值与奇异点关系 ·····	(118)
§ 8.3	lipschits 指数与小波变换模极大值 ·····	(120)
§ 8.4	由小波变换模极大值重建信号 ·····	(130)
参考文献	·····	(135)

第一章 预备知识

§ 1.1 函数空间与基

1. 常用符号与约定

本书将采用如下符号:

$\mathbf{N}$ ——表示自然数集;

$\mathbf{Z}$ ——表示整数集;

$\mathbf{Z}^+$ ——表示正整数集;

$\mathbf{R}$ ——表示实数集;

$\mathbf{C}$ ——表示复数集。

本书将采用如下约定:

$$\text{内积} \quad \langle x, y \rangle = \int_R x(t) \overline{y(t)} dt \quad (1.1)$$

其中, $\overline{y(t)}$ 是 $y(t)$ 的共轭。

$$\text{卷积} \quad x(t) * y(t) = \int x(\tau) \overline{y(t - \tau)} d\tau$$

$$\text{或} \quad x(t) * y(t) = \int x(t) \overline{y(\tau - t)} d\tau$$

这两种定义方式相比,若 $y(t)$ 是偶函数,则计算结果完全相同;如果 $y(t)$ 非偶,则计算方法上无本质区别。

δ 函数的两种形式

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad i, j \in \mathbf{Z} \quad \text{或} \quad \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

其 Fourier 变换为

$$\hat{\delta}(\omega) = \int_R \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1 \quad \omega \in (-\infty, +\infty)$$

上式说明虽然 δ 函数是表示瞬间变化的,但其谱函数处处强度为“1”,或者说 δ 函数均匀地含有各种谐波(见图 1.1)。

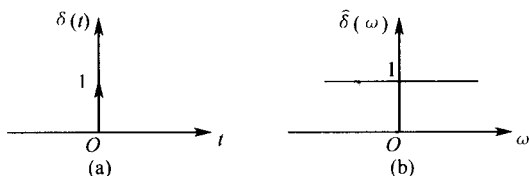


图 1.1 δ 函数及其谱函数图形

闭包: 设 A 为点集, 称 $\bar{A}$ 为 A 的闭包, 即 A 与其极限点的并集。

紧支集: 设函数 $x(t) \quad t \in \mathbf{R}$, 称集合 $\text{supp} x = \{t | x(t) \neq 0, t \in \mathbf{R}\}$ 为 $x(t)$ 的支集, 若 $\text{supp} x$ 又为有界闭集(紧集), 则称函数 $x(t)$ 具有紧支集。

紧支集的特点为, 函数 $x(t)$ 具有紧支集 $\Leftrightarrow x(t)$ 在一有界区域外恒等于 0。

例: 函数 $x(t)$ 具有紧支集, 其图像如图 1.2 所示。

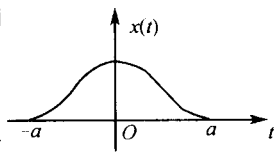


图 1.2 紧支集

2. 函数空间^[3]

定义 1.1 距离空间 设 X 为一非空集合, 若对 $\forall x, y \in X$, 都对应于一个实数 $\rho(x, y)$, 其满足:

(1) 非负性, 即

当且仅当 $x = y, \rho(x, y) = 0$ 时, $\rho(x, y) \geq 0$

(2) 对称性, 即

$$\rho(x, y) = \rho(y, x)$$

(3) 三角不等式, 即

对 $\forall x, y, z \in X$, 有 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

则称 $\rho(x, y)$ 为 x, y 间的距离, 称 X 为以 $\rho(x, y)$ 为距离的距离空间。

若对距离空间 X 中的每一个基本点列都收敛于 X 中的点, 则称距离空间 X 为完备的。

以下是几种常用距离空间。

(1) n 维欧氏空间

设 $R^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in R\}$, 对 $\forall x, y \in R^n$, 定义 $\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (1.2)

则 R^n 按 $\rho(x, y)$ 为一个距离空间, 称此集合 R^n 为 n 维欧氏空间。

(2) 连续函数空间 $C[a, b]$

$C[a, b] = \{x(t) \mid x(t) \text{ 是 } [a, b] \text{ 上的连续函数}\}$, 则称 $C[a, b]$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数空间。

对 $\forall x, y \in C[a, b]$, 定义 $\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$, 则 $C[a, b]$ 按 $\rho(x, y)$ 为一个距离空间。 (1.3)

(3) 平方可积函数空间 $L^2(R)$

$$L^2(R) = \left\{x(t) \mid \int_R |x(t)|^2 dt < +\infty\right\}$$

则称 $L^2(R)$ 为平方可积空间。

对 $\forall x, y \in L^2(R)$, 定义

$$\rho(x, y) = \left(\int_R |x(t) - y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

则 $L^2(R)$ 按 $\rho(x, y)$ 为一个距离空间。

(4) 平方可和离散序列空间 l^2

令 $l^2 = \left\{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \mid \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty\right\}$, 则称 l^2 为平方可和离散序列空间。

$$\text{对 } \forall x, y \in l^2, \text{ 定义 } \rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

则 l^2 按 $\rho(x, y)$ 为一个距离空间。

定义 1.2 线性空间 设 X 是一个非空集合, Λ 为一数域, 若集合 X 对规定的元素加法与数乘运算封闭, 即对任意 $\alpha, \beta \in X$, $\forall \lambda \in \Lambda$, 总有 $\alpha \pm \beta \in X$, $\lambda\alpha \in X$, 且这两种运算都满足相应的结合律与分配律, 则称 X 为数域 Λ 上的线性空间, 或向量空间。

定义 1.3 线性赋范空间 设 X 是一个线性空间, 若对任意的 $x \in X$ 有一个确定的非负实数 $\|x\|$ 与之对应, 并满足

$$(1) \forall x \in X, \|x\| \geq 0, \text{ 当且仅当 } x = \theta \text{ 时, } \|x\| = 0$$

$$(2) \forall x \in X \text{ 及 } \lambda \in R, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$(3) \forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

则称 X 为一线性赋范空间, $\|x\|$ 为向量 x 的范数。

定义 1.4 Banach 空间 完备的线性赋范空间称为 Banach 空间。

例如函数空间

$$L^p(R) = \left\{ x(t) \left| \int_R |x(t)|^p dt < +\infty \right. \right\} \quad (1 \leq p < +\infty)$$

若在 $L^p(R)$ 中定义范数

$$\|x(t)\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left[\int_R |x(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \quad (1.6)$$

在此范数下, 称 $L^p(R)$ 为 Banach 空间。

定义 1.5 Hilbert 空间 若 X 为 Banach 空间, 并在 X 上定义了内积运算, 则称 X 为 Hilbert 空间。换言之, 定义了内积的 Banach 空间为 Hilbert 空间。

例如函数空间

$$L^p(R) = \left\{ x(t) \left| \int_R |x(t)|^p dt < +\infty \right. \right\} \quad (1 \leq p < \infty)$$

若对 $\forall x, y \in L^p(R)$ 定义内积

$$\langle x, y \rangle = \int_R x(t) \overline{y(t)} dt \quad (1.7)$$

则称 $L^p(R)$ 为 Hilbert 空间。特别当 $p=2$ 时

$$\|x(t)\|_2 = \langle x(t), x(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_R x(t) \overline{x(t)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.8)$$

3. 基底双正交基框架及紧框架

(1) 由函数序列张成的空间

$$\text{设 } \epsilon_k(t) \text{ 为一函数序列, } X = \left\{ \sum_k a_k \epsilon_k(t) \mid t, a_k \in R, k \in Z \right\} \quad (1.9)$$

称 X 为由函数序列 $\epsilon_k(t)$ 张成的线性空间, 记为 $X = \text{span} \{ \epsilon_k(t) \}$

$$\text{对 } \forall g(t) \in X, \text{ 有 } g(t) = \sum_k a_k \epsilon_k(t) \quad (1.10)$$

(2) 基底

在式(1.10)的 $\epsilon_k(t)$ 中, 若各 $\epsilon_k(t)$ 是线性无关的, 且对 $\forall g(x) \in X$, 均有 $g(x) = \sum_k a_k \epsilon_k(t)$, 其中, a_k 是唯一的, 则称 $\{ \epsilon_k(t) \}$ 是线性空间 X 的一个基底。

(3) 标准正交基

若线性空间 X 中元素 $\{ \epsilon_k(t) \}$ 满足

$$\langle \epsilon_m(t), \epsilon_n(t) \rangle = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

则称 $\{ \epsilon_k(t) \}$ 为 X 中的一组标准正交基。

(4) 完全标准正交基

设 X 为内积空间, $\{ \epsilon_k(t) \}$ 为 X 中的一组标准正交基, 若对 $x \in X$, $\langle x, \epsilon_k(t) \rangle = 0 (k = 1, 2, \dots)$ 必有 $x = 0$ (换言之: X 中不再存在非零向量, 使其与所有的 $\epsilon_k(t)$ 正交) 则称 $\{ \epsilon_k(t) \}$ 为 X 中的完全标准正交基。

定理 1.1 设 $\{ \epsilon_k \} (k = 1, 2, \dots)$ 为 Hilbert 空间 X 中的标准

正交基,令 $M = \text{span}\{\epsilon_k \mid k = 1, 2, \dots\}$, 则如下四个条件是等价的:

1) $\{\epsilon_k\}$ 是 X 的完全标准正交基;

2) $M = X$;

3) 对 $\forall x \in X, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, \epsilon_k \rangle|^2$ (Parseval 等式);

(1.11)

4) 对 $\forall x \in X, x = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, \epsilon_k \rangle \epsilon_k$.

(1.12)

其中, 式(1.12)为 x 的完全标准正交基的 Fourier 展开, $\langle x, \epsilon_k \rangle$ 为 Fourier 展开系数。

定理 1.1 把数学分析中的 Fourier 展开推广到了 Hilbert 空间, 因此只要找到这种完全标准正交系, Hilbert 空间中的任意元素均可表示为式(1.12)中的 Fourier 级数形式。

(5) 双正交基

在有些情况下, 基底 ϵ_k 之间仅仅是线性无关, 不满足正交关系, 为此引入对偶基的概念 $\tilde{\epsilon}_k(t)$, 即

$$\langle \epsilon_l(t), \tilde{\epsilon}_k(t) \rangle = \delta_{l,k} \quad (1.13)$$

其中, $\tilde{\epsilon}_k(t)$ 由 $\epsilon_k(t)$ 获得, 但不一定唯一, 则对 $\forall x \in X$, 仍有

$$x(t) = \sum \langle x(t), \tilde{\epsilon}_k(t) \rangle \epsilon_k(t) \quad (1.14)$$

由于此处的正交性存在于展开系和对偶系之间, 故称这种基为双正交基。

(6) 框架与紧框架

由正交基与双正交基的概念可知, 若 $\{\epsilon_k(t)\}$ 是空间 X 的正交基, 则对 $\forall x \in X, x$ 可由式(1.12)展开, 若 $\{\epsilon_k(t)\}$ 是空间 X 的双正交基, 则对 $\forall x \in X, x$ 可由式(1.14)展开。在这两种展开式中, 其展开式的系数都是唯一的。

若在函数空间 X 中存在序列 $\{e_k(t)\}$ 是线性相关的, 且对 $\forall x \in X$, 仍能按式(1.12)展开, 即

$$x(t) = \sum_k \langle x(t), e_k(t) \rangle e_k(t)$$

则称 $\{e_k(t)\}$ 为函数空间 X 的一个框架。

为了使框架下的展开系数 $\langle x(t), e_k(t) \rangle$ 能很好地表述原信号 $x(t)$ 引进如下框架的定义。

定义 1.6 设 H 为一 Hilbert 空间, $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为 H 中的一个函数序列, 若对于 $\forall f \in H$, 存在 $0 < A < B < \infty$, 使式(1.15)成立,

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_j \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (1.15)$$

则称 $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为 H 的一个框架, A, B 为框架的上下界。

当 $A = B$ 时, 称此框架为一紧框架(紧框架一般并不正交), 则式(1.15)变为

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_j \rangle|^2 = A \|f\|^2 \quad (1.16)$$

由式(1.16)可推得

$$f = A^{-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j \quad (1.17)$$

当 $A = B = 1$, $\|\psi_j\| = 1$ 时, 则 $\{\psi_j\}$ 为一正交基, 此时

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j$$

当 $A \neq B$ 时, 由 $\langle f, \psi_j \rangle$ 重建原函数的关键在于寻找 ψ_j 的对偶序列 $\tilde{\psi}_j$

定义算子 F 为

$$Ff = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j \xrightarrow{\text{记为}} g$$

其逆运算形式上表示为

$$\begin{aligned} f &= F^{-1}g = F^{-1} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j \right] \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_j \rangle F^{-1} \psi_j \end{aligned}$$

令

$$F^{-1} \psi_j = \tilde{\psi}_j$$

则有

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_j \rangle \bar{\psi}_j$$

其中, $\bar{\psi}_j$ 为 ψ_j 的对偶序列。

关于对偶序列的详细推导可参阅参考文献[4]。

例: 设 H 为一个二维向量空间, 取 $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $e_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, 对 $\forall x \in H, x = (x_1, x_2)$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 |\langle x, e_j \rangle|^2 &= |x_2|^2 + \left| -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \right|^2 \\ &= \frac{3}{2}(|x_1|^2 + |x_2|^2) = \frac{3}{2} \|x\|^2 \end{aligned} \quad (1.18)$$

这里 $A = B = \frac{3}{2}$, e_1, e_2, e_3 线性相关但不正交, 如图 1.3 所示, $\{e_1, e_2, e_3\}$ 构成二维向量空间的一个紧框架。框架的界“3/2”给出了这个框架的冗余度, 即用 3 个线性相关的向量描述了一个二维空间。

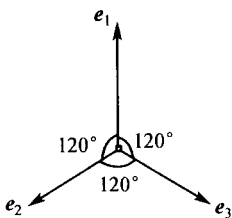


图 1.3 紧框架

§ 1.2 Fourier 变换与加窗 Fourier 变换

1. Fourier 级数的复数形式

设 $f(t)$ 为周期 $2T$ 的函数, 且在 $[-T, T]$ 内满足 Dirichlet 条

件,则在连续点处有

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{n\pi t}{T} \right] \quad (1.19)$$

其中,

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos \frac{n\pi t}{T} dt$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin \frac{n\pi t}{T} dt$$

由欧拉公式

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

则式(1.19)可写为指数形式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{n\pi t}{T}} \quad (1.20)$$

其中, $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ 。

由 c_n 的定义,可有

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-i \frac{n\pi t}{T}} dt \quad (1.21)$$

由(1.20)与(1.21)可知 $f(t)$ 与 c_n 可相互表示。

2. Fourier 变换

若 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足:

(1) $f(t)$ 在任一有限区间上满足 Dirichlet 条件;

(2) $f(t)$ 在无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积 ($\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$)。

记

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.22)$$

则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.23)$$