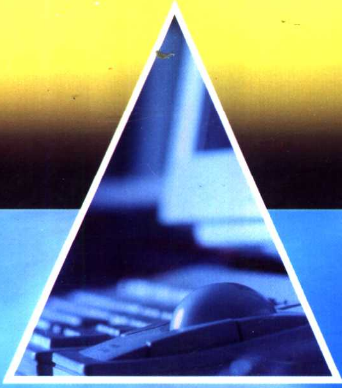

高等学校教材

运筹学

汤代焱 等 编著

中南大学出版社

运 筹 学

汤代焱等　编著

中 南 大 学 出 版 社

内容简介

本书共分15章，主要内容包括：线性规划，动态规划，图与网络，网络计划技术，决策论，存贮论和排队论.着重介绍运筹学的基本概念、基本原理和基本方法.书中除有大量例题外，每一章后附有适量的习题，以供教学之用.书中标有“*”号的难度较大，讲授和学习时可根据不同专业和学历层次按需采用.

本书主要是为高等院校(包括网络教学)的交通运输工程、管理、经济类专业和其他有关专业编写的教材，也可作为有关专业硕士、博士研究生入学考试教材或参考书，同时也可作为管理干部和工程技术人员的自学用书.

运 筹 学

汤代焱 等编著

□**责任编辑** 白 木
□**出版发行** 中南大学出版社
社址：长沙市麓山南路 邮编：410083
发行科电话：0731-8876770 传真：0731-8710482
电子邮件：csucbs @ public. cs. hn. cn
□**经　　销** 湖南省新华书店
□**印　　装** 中南大学湘雅印刷厂

□**开　　本** 787×1092 1/16 □**印张** 22.25 □**字数** 550千字
□**版　　次** 2002年9月第1版 □2004年1月第2次印刷
□**书　　号** ISBN 7-81061-536-X/O·027
□**定　　价** 32.00元

前　言

运筹学是一门新兴的交叉学科.经过半个多世纪的发展与完善,它已成为实现管理现代化的有效工具,受到了管理人员、经济工作者、工程技术人员、军事指挥官和公务员等各类人士的普遍重视.目前,它被列入管理、经济和有关工程类专业的主干学科和主要课程.可以预言,运筹学知识的普及与广泛应用,将对我国社会经济的发展产生积极的影响.

为了使读者较好地掌握运筹学的基本原理和基本方法,在本书的编写过程中,力求作到以下几点:

1. 为满足不同读者的需要,在阐述基本概念和基本原理时,考虑不失数学上的逻辑性、严密性的同时,着重用经济、几何概念解释和说明问题,不作过多的数学推导与证明.全书贯穿"方法—原理—应用"原则,便于读者阅读与理解.

2. 尽可能更新教材内容.在本书的大部分章节中,作者引用了近年国内外学者的最新研究成果,同时把作者自己多年的教学体会和提出的新方法及应用实例编入了教材之中,以期读者在学习和运用运筹学方法解决实际问题时有所帮助.

3. 与目前流行的运筹学著作相比,在内容编排顺序上作了较大调整.如将整数规划编排在对偶单纯形之后,线性规划的灵敏度分析放在运输问题与指派问题之后等,可使运筹学方法体系更为顺畅,结构更趋合理.

4. 为加强建立模型和解题能力的训练,书中编入了较多各具特色的例题与习题,力求做到开阔读者思路,培养解决实际问题的能力.

本书分为线性规划,动态规划,图与网络,网络计划技术,决策论,存贮论和排队论共7部分.其中第1章、第2章、第3章、第5章的6~7节、第7章、第13章由汤代焱执笔.第4章、第9章、第10章、第11章由夏伟怀执笔,第5章1~5节,第8章、第12章由符卓执笔,第14章、第15章由陈治亚执笔.全书由汤代焱统稿,主编.

本书的出版得到了周颖等同志的大力支持,谨此致谢.

书中错漏之处,望赐指正,不胜感激!

作者

2002年3月于长沙

目　录

第1章 线性规划基础

人们在生产和经营活动中,常常会遇到如何运用现有资源如人力、资金、原材料等,安排生产和经营活动,使产值最大或利润最高的问题;或者,对于给定的任务,如何统筹安排,以使用最少的资源消耗去完成.对于这种在生产、经营活动中从计划与组织角度提出的最大或最小目标问题的研究,构成了运筹学的一个重要组成部分——数学规划论.线性规划则是规划论中发展最早、理论比较成熟、应用最为广泛的重要分支.

早在1939年,前苏联数学家康特洛维奇研究了运输和下料问题,编著了《生产组织与计划中的数学方法》一书.尔后,Dantzing 和 Kuhu 等数学家提出了求解线性规划的单纯形法和对偶理论,使线性规划的理论和计算方法日趋完善成熟.随着电子计算机的普及与广泛应用,线性规划在工业、商业、交通运输业、军事、建筑等行业的计划、管理及决策分析中得到了广泛深入的应用,并取得了良好的效果.目前,线性规划正以它理论与实践并茂的特点成为工程技术人员、管理人员和经济工作者的最佳管理技术和决策工具.

本章重点介绍线性规划问题及其特点,线性规划数学模型及其标准型等基础知识.

1.1 线性规划问题及其数学模型

例1.1 某工厂生产 A,B 两种产品,都需使用铜和铝两种金属材料,有关资料如表1-1所示.问如何确定 A,B 产品的产量,使工厂获取的总利润最大?

表1-1

原材料	A 产品单耗	B 产品单耗	可供材料数
铜	2t	1t	40t
铝	1t	3t	30t
单位产品利润	3(万元)	4(万元)	

解 将上述问题用数学语言描述:设 x_1 和 x_2 分别表示 A 和 B 的产量.因为一个 A 产品消耗2t铜,一个 B 产品消耗1t铜,生产 x_1 和 x_2 个 A,B 产品共消耗 $(2x_1+x_2)$ 吨铜,所消耗的铜不能超过可供数量,即可用不等式表示为

$$2x_1+x_2\leqslant 40$$

对铝材的消耗得出如下不等式

$$x_1+3x_2\leqslant 30$$

若用 Z 表示工厂总利润,可知

$$Z=3x_1+4x_2$$

综合上述,将题意归纳为满足条件

$$\begin{cases}2x_1+x_2\leqslant 40\\x_1+3x_2\leqslant 30\\x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}\tag{1-1}$$

使得 $Z=3x_1+4x_2$ 达到最大.

我们称上述数学模型中式(1－1)为约束条件,而称 $Z=3x_1+4x_2$ 为目标函数.

例 1.2 甲、乙两地分别有货物 80t 和 100t,要运送到 a,b,c 三个地方,数量分别是 70,60 和 50t,它们之间的距离(km)如表 1－2. 现在要制订出最佳运输方案,使总的吨公里达到最小.

表 1－2

距离(km) 收点 / 发点	a	b	c	发货量(t)
甲	5	4	8	80
乙	8	6	2	100
收货量(t)	70	60	50	180 / 180

解 设第 i 个发点送到第 j 个收点的货物吨数为 x_{ij}($i=$甲,乙;$j=a,b,c$),根据所给资料和要求,建立线性规划模型如下:

$$x_{甲a}+x_{甲b}+x_{甲c}=80$$
$$x_{乙a}+x_{乙b}+x_{乙c}=100$$
$$x_{甲a}+x_{乙a}=70$$
$$x_{甲b}+x_{乙b}=60$$
$$x_{甲c}+x_{乙c}=50$$
$$x_{ij}\geqslant 0(i=甲,乙;j=a,b,c)$$

使 $S_{\min}=5x_{甲a}+4x_{甲b}+8x_{甲c}+8x_{乙a}+6x_{乙b}+2x_{乙c}$

其中,总发量(180t)应等于总的收量(180t).

上述两例描述的问题就是线性规划问题,线性规划问题的数学模型就是线性规划模型.

从数学上看,所有线性规划问题都具有以下共同特征:

(1)每一问题都可以用一组变量($x_1,x_2,\cdots,x_n$)表示某一方案. 一般情形下,变量的取值是非负的.

(2)约束条件用线性等式或线性不等式表示.

(3)都有一个目标函数,且这个目标函数可表示为一组变量的线性函数.

(4)每一问题要求目标函数实现最大化(max)或者最小化(min).

由于问题的性质不同,线性规划模型也有不同的形式. 一般地,总可以描述为:

使目标函数 $Z_{\max}=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 满足约束条件

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\
x_1, x_2, x_3, \cdots \geqslant 0
\end{cases}
$$

为方便，称 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为目标系数或价值系数，$a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mn}$ 为消耗系数，$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 为资源限制向量.

1.2 线性规划模型的标准型及其转化

线性规划模型中约束条件出现了三种形式（$\leqslant, =, \geqslant$），目标函数存在两种形式（max，min）. 这种多样性对讨论问题带来不便. 因此规定了线性规划模型的标准型：

求目标函数 $Z_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_n$

满足
$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{cases}
$$

有时需要将线性规划模型的标准型表述为以下形式.

（1）缩写形式

$$
Z_{\max} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j
$$

$$
(M_1)\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = 1, 2, 3, \cdots, m) \\
x_j \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, m)
\end{cases}
$$

M_1 中的 $b_i \geqslant 0$，若有 $b_i < 0$ 时，等式左右两端乘 -1，使 b_i 满足 $b_i \geqslant 0$.

（2）向量形式

$$
Z_{\max} = \boldsymbol{CX}
$$

$$
(M_1)\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b} \\
x_j \geqslant 0 (j = 1, 2, 3, \cdots, n)
\end{cases}
$$

其中 $\boldsymbol{C} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$

$$
\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \boldsymbol{P}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

（3）矩阵形式

$$
Z_{\max} = \boldsymbol{CX}
$$

$$(M_1)\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\ x\geqslant 0\end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n)$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为资源约束方程组的系数矩阵($m\times n$ 阶). 在一般情况下 $m<n$. 即约束等式的个数少于变量数.

线性规划的求解需要借助标准型来实现,而具体问题的线性规划模型一般都不是标准型. 因此需要将非标准型转化为标准型.

下面介绍将非标准型模型转化为标准型模型的方法.

(1)若目标函数 $Z_{\min}=\boldsymbol{CX}$,可令 $Z=-Z'$,使 $Z'_{\max}=-\boldsymbol{CX}$. 亦即在原目标函数式 $\boldsymbol{CX}$ 中的各项上乘 -1.

(2)约束不等式的转化

①约束条件不等式为"≤"时. 在不等式左边加上一个松弛变量,将不等式变为等式方程. 松弛变量的经济意义是没有被利用的资源.

②约束条件不等式为"≥"时. 在不等式左边减去一个剩余变量,把不等式约束条件变为等式约束方程.

有时将松弛变量和剩余变量统称为附加变量或虚变量. 附加变量对目标函数不产生影响,故在目标函数中,附加变量的目标系数为零.

③在非标准模型中存在无非负要求的变量,如 x_k 无论取正值或负值时都可以. 这时令 $x_k=x'_k-x''_k$,其中 $x'_k\geqslant 0,x''_k\geqslant 0$,由 x'_k 和 x''_k 的大小决定 x_k 的正负.

可见任何形式的线性规划模型都可以转化为标准型. 现用例 1.3 作综合说明.

例 1.3 将下列线性规划模型化为标准型.

$$S_{\min}=6x_1-4x_2+3x_3$$

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+7x_3\leqslant 60\\ 4x_1+3x_2+9x_3\geqslant 80\\ 2x_1+4x_2+5x_3=70\\ x_1,x_2\geqslant 0(x_3\text{为自由变量})\end{cases}$$

解 先将自由变量 x_3 变为 $x_3=x'_3-x''_3,x'_3\geqslant 0,x''_3\geqslant 0$. 再引入松弛变量 x_4 和剩余变量 x_5,得

$$Z_{\max}=-6x_1+4x_2-3x'_3+3x''_3+0x_4+0x_5$$

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+7x'_3-7x''_3+x_4=60\\ 4x_1+3x_2+9x'_3-9x''_3-x_5=80\\ 2x_1+4x_2+5x'_3-5x''_3=70\\ x_1,x_2,x'_3,x''_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

1.3 线性规划问题解的概念

将非标准的线性规划问题化为标准的线性规划问题后，我们讨论规划问题解的概念.

给出线规划问题的标准型为

$$AX=b \tag{1-2}$$

$$X\geqslant 0 \tag{1-3}$$

$$Z_{\max}=CX \tag{1-4}$$

则线性规划问题的解有以下基本概念.

1.3.1 可行解

满足上述模型中式(1-2)和(1-3)的解称为线性规划问题的可行解.

1.3.2 最优解

满足式(1-4)的可行解称为最优解.

1.3.3 基

设 $\boldsymbol{A}$ 是约束方程组 $m\times n$ 系数矩阵，其秩为 m，若 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵 A 中 $m\times m$ 阶非奇异子矩阵(即可逆矩阵，$|\boldsymbol{B}|\neq 0$)，则称 $\boldsymbol{B}$ 是线性规划问题的一个基. $\boldsymbol{B}$ 是由 A 中 m 个线性无关的系数列向量组成的. 一般地，可设

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}=\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_m$$

称 B 中的一列 $\boldsymbol{P}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为基向量，与 $\boldsymbol{P}_j$ 对应的变量 $x_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为基变量. $\boldsymbol{B}$ 中共有 m 个基变量. 而称在 $\boldsymbol{A}$ 之内 $\boldsymbol{B}$ 之外的列向量为非基向量，与非基向量对应的变量称作非基变量. $\boldsymbol{A}$ 中有 $n-m$ 个非基变量(设 $m<n$).

1.3.4 基本解

设非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，用高斯消元法可以得到一组解

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

这个解的非零分量的个数不大于 m，则称 X 为基本解.

1.3.5 基本可行解

满足式(1-2)的基本解称作基本可行解. 其个数也不大于 m.

1.3.6 退化基本解

非零分量的个数小于 m 的基本解即是退化基本解. 在一般情况下假设不出现退化. 了解线性规划解的基本概念是十分必要的，它将有助于掌握线性规划的求解过程.

1.4 线性规划的图解法

图解法只适用于求解两个变量的线性规划问题，它不是线性规划问题的通用算法. 我们介绍图解法的目的在于能更直观地了解线性规划的算法思想和求解步骤，有助于加深将要在第2章介绍的线性规划的通用算法——单纯形法的理解. 下面用实例说明图解法的步骤.

例 1.4 给定两个变量的线性规划模型如下：

$$Z_{max}=10x_1+8x_2$$
$$\begin{cases}3x_1+2x_2\leqslant 120\\ x_1\leqslant 30\\ x_2\leqslant 45\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解 先满足非负条件 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$. 将 x_1, x_2 画入直角坐标系中第一象限,横坐标表示 x_1 的取值,纵坐标表示 x_2 的取值. 再将其他约束不等式化为等式(不加附加变量). 对于 $3x_1+2x_2=120$,取 $x=0$ 时,$x_2=60$;取 $x_2=0$ 时,$x_1=40$,用直线连接(0,60)点和(40,0)点. 类似地,在平面中铺画 $x_1=30$ 和 $x_2=45$ 的直线,得图 1-1.

可见,三条约束直线左下方(包括直线本身)和两条坐标轴围成的多边形是线性规划解的集合,称它为可行域. 可行域中的每一点(包括边界点)是线性规划的可行解. 易知,可行解有无限个.

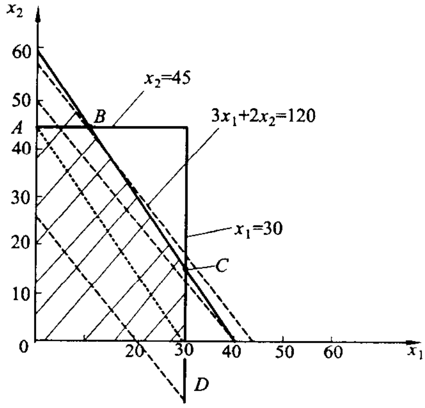

图 1-1

再分析目标函数 $Z_{max}=10x_1+8x_2$. 在坐标平面上,它可表示以 Z 为参数,$-\frac{5}{4}$为斜率的一簇平行线

$$x_2=\frac{Z}{8}-\frac{5}{4}x_1$$

位于同一直线上的点具有相同的目标函数值. 当 x_1 和 x_2 的取值增大时,直线 $x_2=\frac{Z}{8}-\frac{5}{4}x_1$ 沿法线方向向右上方移动,当移至 B 点时,不能再向右上方移动了,否则超过可行域的范围. 这时在顶点 B 上实现了目标最大化,即得到了问题的最优解:$x_1=10, x_2=45, Z_{max}=460$.

上例中问题的最优解只有一个,是唯一最优解. 但在某些情形下还可能出现以下求解结果:

(1)无穷多组最优解(多重解). 将例 1.4 的目标函数变为 $Z_{max}=3x_1+2x_2$,则 Z 为参数,$-\frac{3}{2}$为斜率的目标函数的平行线与约束条件 $3x_1+2x_2=120$ 直线平行. 当 Z 值逐渐增大而向右上方移动时必与 BC 线段重合,BC 线段上的任一点都使 Z 取得相同的最大值,见图 1-2. 显然问题有无穷多组最优解.

(2)无界解.

例 1.5 对下述线性规划问题

$$Z_{max}=x_1+x_2$$
$$\begin{cases}-2x_1+x_2\leqslant 4\\ x_1-x_2\leqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

用图解法,其结果如图 1-3 所示. 从图中可见此问题的可行域无界,目标函数可以增加到无穷大. 这种情况的解为无界解. 出现无界解时则线性规划无最优解.

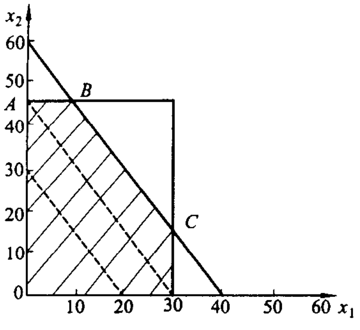

图 1－2

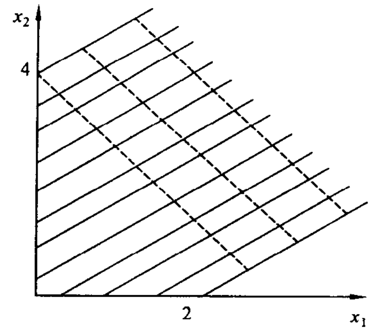

图 1－3

图解法虽然直观简便，当变量在三个以上时在图上无法实现求解过程. 因此对于一般线性规划来说，图解法没有实用价值. 但图解法的求解过程给我们以重要启示，即：(1)线性规划的最优解一定在可行域的顶点上达到；(2)可行域中顶点的转移实现了数学的迭代，顶点的转移使目标函数值上升或下降. 这正是求解一般线性规划的通用方法——单纯形法的基本原理和算法思想.

习 题

1.1 将下列线性规划问题化为标准型.

$$S_{\min} = -5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leqslant 14 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \geqslant 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.2 将下列非标准线性规划模型化为标准型.

$$Z_{\max} = x_1 - x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_3 \text{为自由变量} \end{cases}$$

1.3 用图解法求解下列线性规划问题.

$$Z_{\min} = 40x_1 + 36x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geqslant 45 \\ x_1 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 10 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.4 用图解法解出下述线性规划问题后，说明最优解的特点.

$$Z_{\max} = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_2 \leqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.5　将第 1.4 题中约束条件 $x_1 + 2x_2 \leqslant 10$ 去掉后用图解法求解. 说明解的结果.

1.6　有两个变量的线性规划问题:

$$Z_{\max} = x_1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant a \\ -x_1 + x_2 \leqslant -1 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

要求:

a. 证明本题当且仅当 $a \geqslant 1$ 时为可行;

b. 用图解法对 $a \geqslant 1$ 的一切值,求以 a 表示的最优值.

第2章 单纯形法

单纯形法是美国数学家 G. B. Dantzig 在 1947 年提出的求解线性规划问题的有效算法，至今仍被普遍使用. 单纯形法的算法思想是：根据线性规划模型的标准型，从可行域中的一个基本可行解（一个顶点）开始，转换到另一个基本可行解（顶点），且使目标函数的值逐步增大；当目标函数达到最大时，则问题得到了最优解.

本章首先从理论上说明线性规划单纯形法的最优解的几何意义，然后从经济上解释单纯形法的原理和方法，尔后重点介绍单纯形法的解题步骤及其扩展方法. 本章内容是第 3 ~ 7 章的基础，必须牢固掌握和熟练运用

2.1 线性规划问题的几何意义

2.1.1 凸集和顶点

（1）凸集. 所谓凸集，从直观上讲是指没有凹入部分、没有空洞的实心集合体. 如图2 - 1中的（a），（b），（c）是凸集，（d）不是凸集，（e）中非阴影部分是凸集. 任何两个凸集的交集是凸集.

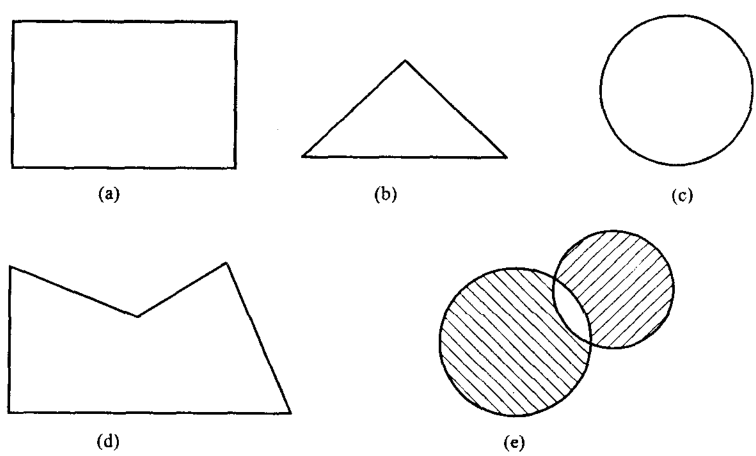

图 2 - 1

从图中可以看出，凸集具有一个明显的特征. 即在凸集上任意取两点，连接这两点的线段上的所有点都在这个点集之中.

将凸集的定义推广到多维空间，即可表述为：设 K 是 n 维空间的一点集，若任意两点 $X^{(1)} \in K, X^{(2)} \in K$ 的连线上的一切点 $aX^{(1)} + (1-a)X^{(2)} \in K (0 \leqslant a \leqslant 1)$，则称 K 为凸集.

（2）顶点. 设 K 是凸集，$X \in K$；若 X 不能用不同的两点 $X^{(1)} \in K, X^{(2)} \in K$ 的线性组合表示为 $X = aX^{(1)} + (1-a)X^{(2)} (0 < a < 1)$，则称 X 为凸集 K 的一个顶点（或极点）. 其直观意义就是 X 不是凸集 K 任何两点连线上的内点. 如三角形、四边形等平面的顶点，长方体的顶点都是相

应凸集的顶点.

2.1.2 基本定理

定理 2.1 若线性规划问题存在可行域,则其可行域

$$D=\{X|AX=b,X\geqslant 0\}\text{ 是凸集.}$$

证 为了证明满足 $AX=b,X\geqslant 0$ 的所有点(可行解)组成的集合是凸集,只要证明 D 中任意两点 $X^{(1)},X^{(2)}$ 的连线上的点满足线性规划的约束条件,即在点集 D 内即可.

若 $X^{(1)}\in D,X^{(2)}\in D$,即

$$AX^{(1)}=b,X^{(1)}\geqslant 0$$
$$AX^{(2)}=b,X^{(2)}\geqslant 0$$

必有

(1)$A[aX^{(1)}+(1-a)X^{(2)}]=aAX^{(1)}+(1-a)AX^{(2)}=ab+(1-a)b=b(0\leqslant a\leqslant 1)$;

(2)$aX^{(1)}+(1-a)X^{(2)}\geqslant 0(0\leqslant a\leqslant 1)$. 因 $X^{(1)},X^{(2)},a,(1-a)$ 都满足 $\geqslant 0$.

可知 $X^{(1)},X^{(2)}$ 两点连线上的一切点 $aX^{(1)}+(1-a)X^{(2)}$ 都满足线性规划的约束条件,故有 $[aX^{(1)}+(1-a)X^{(2)}]\in D$,符合凸集定义. D 是凸集. 证毕.

定理 2.2 线性规划问题的可行解 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_k,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$ 是基本可行解的充要条件是 X 的非零分量所对应的系列向量线性无关.

证 必要性. 因 X 是基本可行解,X 的正分量就是各个基变量,基变量对应的系数列向量是基向量. 根据定义,它们线性无关.

充分性. 设可行解 X 的正分量为前 K 个,其对应的线性无关的系数列向量为 $P_1,P_2,\cdots,P_K$,因为 A 的秩为 m,有 $K\leqslant m$. $K=m$ 时,$P_1,P_2,\cdots,P_K$ 恰好构成一个 $m\times m$ 的基本矩阵,从而 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_k,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$ 为相应的基本可行解. 当 $K\leqslant m$ 时,X 的正分量的个数小于秩 m,则一定可以从其余的$(n-K)$个列向量中取出$(m-K)$个与 $P_1,P_2,\cdots,P_K$ 构成由 m 个列向量组成的最大线性无关的向量组,其对应的解恰好为 X. 根据定义它是基本可行解. 证毕.

定理 2.3 线性规划问题的基本可行解 X 对应于可行域 D 的顶点.

定理 2.4 线性规划问题若有可行解,必有基本可行解. 或者说,线性规划问题的可行域 D 如为非空凸集,则必有顶点.

定理 2.3 和定理 2.4 不作证明.

定理 2.5 线性规划问题若有最优解,则一定可以在可行域 D 的顶点上达到.

证 设 $X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(K)}$,是可行域的顶点. 若 $X^{(0)}$ 不是顶点,且目标函数在 $X^{(0)}$ 处达到最优 $Z_{\max}=CX^{(0)}$.

因 $X^{(0)}$ 不是项点,所以它可以用 D 的顶点线性表示为

$$X^{(0)}=\sum_{i=1}^{K}a_i x^{(i)},a_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{K}a_i=1 \tag{2-1}$$

故有

$$CX^{(0)}=C\sum_{i=1}^{K}a_iX^{(i)}=\sum_{i=1}^{K}a_iCX^{(i)} \tag{2-2}$$

我们在所有的顶点中一定能找到某一个顶点 $X^{(m)}$,使 $CX^{(m)}$ 是所有 $CX^{(i)}$ 中最大者,并将 $X^{(m)}$ 代式(2-2)中的所有 $X^{(i)}$,于是得到

$$\sum_{i=1}^{K}a_iCX^{(i)}\leqslant\sum_{i=1}^{K}a_iCX^{(m)}=CX^{(m)}$$