环路及結点平差仪器

儲鍾瑞 郑国忠 著

测绘出版社

环路及結点平差仪器

儲鍾璠 鄭國忠著

測繪出版社

1959·北京

环路及結点平差仪器，是清华大学在1958年大跃进中創造的一种电学仪器，用这种仪器，通过簡单的操作，可以进行导綫网、建筑方格网和水准网的环路平差或結点平差，代替一般测量工作中繁瑣的平差計算。采用这种仪器，还可解算最或然値的均方誤差和設計网路的精度以及解决給水管道及暖气管道的复杂計算工作。仪器的构造、原理甚为簡单，但使用价值极大，各測量單位及建筑工程部門均可采用推广。

本書詳細地介紹了这种仪器的原理、設备、精度、量測工作以及用等效电阻法解决有关网路設計的問題。可供我国从事国家基本測量工作和工程測量工作的工程师、技术員以及測繪院校师生、建筑工程設計施工部門的工程技术人員参考。

环路及結点平差仪器

著者	儲鍾瑞　郑国忠
出版者	測繪出版社 北京宣武門外永光寺西街3号 北京市書刊出版業營業許可証出字第081号
发行者	新华書店
印刷者	地質出版社印刷厂 北京安定門外六鋪炕40号

印数(京)1—2,900册　　1959年5月北京第1版

开本 $33'' \times 46''\,{}^1/_{32}$　　1959年5月第1次印刷

字数 39,000　　印张 $1^5/_8$

定价(10)0.29元

前　言

在导綫网，建筑方格网和水准网的測量工作中，我們要进行环路平差或結点平差。本書介紹用一种电学仪器解决这类平差問題的方法，这种仪器还可解算最或然值的均方誤差及設計网路的精度。此外，这种仪器还可用来解决給水管道及暖气管道的繁瑣計算。

目　录

前言
一、原　理……1
Ⅰ. 求平差值……1
Ⅱ. 求未知数最或然值的函数的均方誤差……10
二、仪器設备和精度問題……14
Ⅰ. 改变电动势的調压設备……14
Ⅱ. 改正数的均方誤差……15
Ⅲ. 仪器的設計……18
Ⅳ. 仪器的結构和装置……21
三、量測工作……22
Ⅰ. 量測方法……22
Ⅱ: 仪器检查……26
Ⅲ. 量測实例……27
四、等効电阻法解决有关网路設計的問題……32
Ⅰ. 一般概念……32
Ⅱ. 原　理……32
Ⅲ. 水准网的精度估計……41
Ⅳ. 导綫网的精度估計……43
Ⅴ. 图形强度分析的一些例子……47

一、原　　理

I. 求 平 差 值

图 1 是具有三个环的水准网。图中 h 表示綫段兩端的高差，是指箭头所对一端的高程減去其他一端的高程。Δh 代表按顺时針方向計算的各环的高差閉合差，就是：

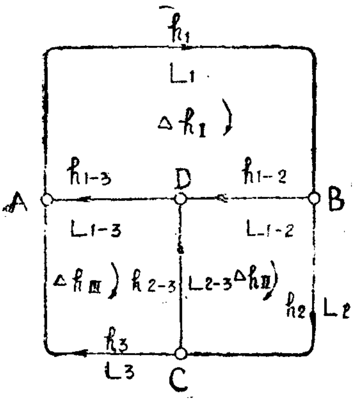

图 1.

$$\left.\begin{aligned}\Delta h_{\mathrm{I}} &= h_1+h_{1-2}+h_{1-3},\\ \Delta h_{\mathrm{II}} &= -h_{1-2}+h_2+h_{2-3},\\ \Delta h_{\mathrm{III}} &= -h_{1-3}-h_{2-3}+h_3\text{。}\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

平差工作是以最小二乘法的原理为根据的。如果用 p 代表观測値的权，v 代表高差的改正数，那末，Σpv^2 应最小，而同时各 v 应滿足下列条件：

$$\left.\begin{aligned}v_1+v_{1-2}+v_{1-3} &= -\Delta h_{\mathrm{I}},\\ -v_{1-2}+v_2+v_{2-3} &= -\Delta h_{\mathrm{II}},\\ -v_{1-3}-v_{2-3}+v_3 &= -\Delta h_{\mathrm{III}},\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{2}$$

采用符号 $f=\Sigma pv^2$。如果 $v_1, v_{1-2}, v_2, v_{2-3}, v_3, v_{1-3}$ 是使 Σpv^2 最小的一組改正数，那末 df 应等于零，即

$$df=2p_1v_1dv_1+2p_{1-2}v_{1-2}dv_{1-2}+2p_2v_2dv_2$$

$$+2p_{2-3}v_{2-3}dv_{2-3}+2p_3v_3dv_3+2p_{1-3}v_{1-3}dv_{1-3}=0 \tag{3}$$

根据（2），$dv, dv_{1-2}, dv_2, dv_{2-3}, dv_3, dv_{1-3}$ 还应滿足下列方程式：

$$\left.\begin{aligned} dv_1+dv_{1-2}+dv_{1-3}&=0,\\ -dv_{1-2}+dv_{2-3}+dv_2&=0,\\ -dv_{1-3}-dv_{2-3}+dv_3&=0。\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

我們取 dv_{1-2}，dv_{1-3}，dv_{2-3} 作为独立微分，其余的作为非独立微分，并列出下列关系式：

$$\left.\begin{aligned} dv_1&=dv_{1-2}-dv_{1-3},\\ dv_2&=dv_{1-2}-dv_{2-3},\\ dv_3&=dv_{1-3}+dv_{2-3}。\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

現在把（5）代入（3），并把相同的 dv 項合併，得

$$\begin{aligned} df=&-2\ (p_1v_1-p_{1-2}v_{1-2}-p_2v_2)\ dv_{1-2}\\ &-2\ (p_1v_1-p_{1-3}v_{1-3}-p_3v_3)\ dv_{1-3}\\ &-2\ (p_2v_2-p_{2-3}v_{2-3}-p_3v_3)\ dv_{2-3}=0\cdots\ (6)\end{aligned}$$

式中 dv_{1-2}，dv_{1-3}，dv_{2-3}是任意选擇的独立微分；因而要使df等于零，它們的系数都应等于零，即

$$\left.\begin{aligned} p_1v_1-p_{1-2}v_{1-2}-p_2v_2&=0,\\ p_1v_1-p_{1-3}v_{1-3}-p_3v_3&=0,\\ p_2v_2-v_{2-3}v_{2-3}-p_3v_3&=0。\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

把（7）中的第一式和第三式相加，再減去第二式，我們还得：

$$p_{1-3}v_{1-3}-p_{1-2}v_{1-2}-p_{2-3}v_{2-3}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

如果考慮了在交叉点，箭头对着交叉点的綫段的高差改正数取一种符号，箭头离开交叉点的綫段改正数取相反的符号，那末，在每一个交叉点（7），（8）式可写成：

$$\Sigma pv=0。$$

根据（3），（4）式得出（7）式，实質上是把綫段上的 $\Sigma pvdv=0$化为每一交叉点上的 $\Sigma pv=0$。以 A点为例，AB 綫段的箭头和 DA 綫段的箭头在 I 环内是在同一方向，因而（5）中

dv_1式中的dv_{1-3}前面帶有負号；CA綫段上箭头和DA綫段上的箭头在Ⅲ环内的方向相反，因而（5）中dv_3式中的dv_{1-3}前面帶有正号。显然，把这兩个式子代入（3）式后，除了这样引起的$-p_1v_1dv_{1-3}$，$p_3v_3dv_{1-3}$，兩項dv_{1-3}外，还有（3）中原来的$p_{1-3}v_{1-3}dv_{1-3}$，这就是交叉点的第三条綫段上的$pvdv$。加起来得$(-p_1v_1+p_3v_3+p_{1-3}v_{1-3})dv_{1-3}$。使$dv_{1-3}$的系数等于零，并在写交叉点的$\Sigma pv$时，考虑綫段上箭头的方向，就得$\Sigma pv=0$。这就說明前面的等式与环的数目无关，因而不論水准网的环数是多少，交叉点的Σpv总应等于零。

現在我們把根据最小二乘法原理推出的$\Sigma pv=0$，以及各v还应滿足的条件方程式（2）和电路計算所用的式子$\Sigma i=0$和$\Sigma iR=U$相比較，式中i是电流，流向交叉点的电流和流出交叉点的电流取相反的符号，R是电阻，U是环中的电动势。如果取$R=\dfrac{1}{p}$，則在电路中，$\Sigma i=\Sigma\dfrac{iR}{R}=\Sigma PiR=0$；取电路中的电动势等于相应水准环高差閉合差$\Delta h$，則$\Sigma iR=U=\Delta h$。

水　准　网	电　　路
$\Sigma pv=0$，	$\Sigma piR=0$，
考虑了U的方向，$\Sigma U=-\Delta h$。	$\Sigma iR=\Delta h$。

对比水准网和电路，容易看出，$U=-iR$。

我們在下面以四个环的水准网为例，比較最小二乘法的平差和电路的計算。

图2表示有四个环的水准网，各环的高差閉合差是

$$\left.\begin{aligned}\Delta h_{\mathrm{I}}&=h_1+h_{1-2}+h_{1-4},\\ \Delta h_{\mathrm{II}}&=-h_{1-2}+h_2+h_{2-3},\\ \Delta h_{\mathrm{III}}&=-h_{2-3}+h_3+h_{3-4},\\ \Delta h_{\mathrm{IV}}&=-h_{1-4}-h_{3-4}+h_4\text{。}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (9)$$

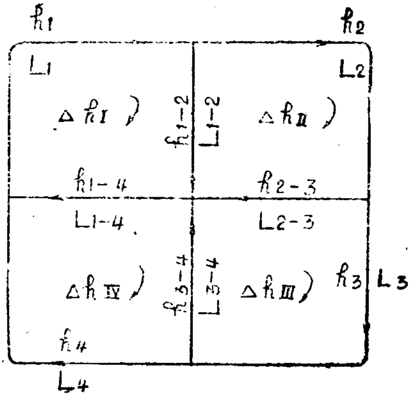

图 2

用 v_1，v_{1-2}，v_{1-4}，…… 代表相应高差 h_1, h_{1-2}, h_{1-4}，…… 的改正数，L_1, L_{1-2}, L_{1-3}，……是各綫段的長度，权 P 是和長度成反比的。图 2 的法方程式是：

$$
\left.
\begin{aligned}
&(L_1+L_{1-2}+L_{1-4})k_1-L_{1-2}k_2-L_{1-4}k_4+\Delta h_{\mathrm{I}}=0,\\
&-L_{1-2}k_1+(L_{1-2}+L_2+L_{2-3})k_2-L_{2-3}k_3+\Delta h_{\mathrm{II}}=0,\\
&-L_{2-3}k_2+(L_{2-3}+L_3+L_{3-4})k_3-L_{3-4}k_4+\Delta h_{\mathrm{III}}=0,\\
&-L_{1-4}k_1-L_{3-4}k_3+(L_{1-4}+L_{3-4}+L_4)k_4+\Delta h_{\mathrm{IV}}=0.
\end{aligned}
\right\}\cdots(10)
$$

式中 k_1，k_2，k_3，k_4 是联系数。

求改正数 v 的式子是：

$$
\begin{aligned}
&v_1=\frac{1}{p_1}k_1=L_1k_1,\\
&v_{1-2}=\frac{1}{p_{1-2}}(k_1-k_2)=L_{1-2}(k_1-k_2),
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
v_{1-4} &= \frac{1}{p_{1-4}}(k_1-k_4) = L_{1-4}(k_1-k_4), \\
v_2 &= \frac{1}{p_2}k_2 = L_2k_2, \\
v_{2-3} &= \frac{1}{p_{2-3}}(k_2-k_3) = L_{2-3}(k-k_3), \\
v_3 &= \frac{1}{p_3}k_3 = L_3k_3, \\
v_{3-4} &= \frac{1}{p_{3-4}}(k_3-k_4) = L_{3-4}(k_3-k_4), \\
v_4 &= \frac{1}{p_4}k_4 = L_4k_4。
\end{aligned}\right\} \cdots (11)
$$

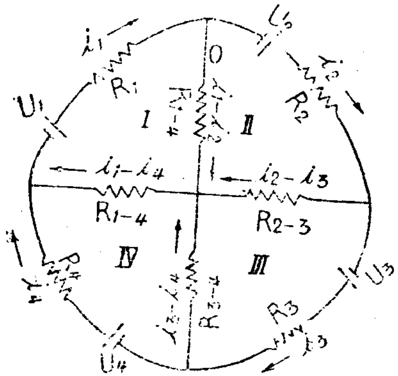

图 3

图 3 是相当图 2 的电迴路。迴路中电动势的大小和方向与高差閉合差的大小方向一致，而迴路中的电阻 R 等于相应綫段的長度 L。

根据克希柯夫定律，标出各綫段的电流和电流的方向。还可以在每一圈內写出有关电动势 U 和 iR 之間的关系式。

在第 I 圈內

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{I}} &= i_1R_1 + (i_1-i_2)R_{1-2} + (i_1-i_4)R_{1-4} \\
&= (R_1+R_{1-2}+R_{1-4})i_1 - R_{1-2}i - R_{1-4}i_4,
\end{aligned}
$$

即 $(R_1+R_{1-2}+R_{1-4})i_1 - R_{1-2}i_2 - R_{1-4}i_4 - U_{\mathrm{I}} = 0,$

同样在 II、III、IV 圈内有

$$
\left.\begin{aligned}
&-R_{1-2}i_1 + (R_{1-2}+R_2+R_{2-3})i_2 - R_{2-3}i_3 \\
&\qquad - U_{\mathrm{II}} = 0,
\end{aligned}\right\} (12)
$$

$$\left.\begin{aligned}&-R_{2-3}i_2+(R_{2-3}+R_3+R_{3-4})\ i_3-R_{3-4}i_4-\\&\qquad -U_{\mathrm{III}}=0,\\&-R_{1-4}i_1\ -R_{3-4}i_3\ +(R_{1-4}+R_{3-4}+R_4)\ i_4-\\&\qquad -U_{\mathrm{IV}}=0.\end{aligned}\right\}$$

因为$U_{\mathrm{I}}=\Delta h_2$，$U_{\mathrm{II}}=\Delta h_{\mathrm{II}}$，$U_{\mathrm{III}}=\Delta h_{\mathrm{III}}$，$U_{\mathrm{IV}}=\Delta h_{\mathrm{IV}}$，

同时$R_1=L_1$，$R_{1-2}=L_{1-2}$，$R_{1-4}=L_{1-4}$，$R_2=L_2$，$R_{2-3}=L_{2-3}$，$R_3=L_3$，$R_{3-4}=L_{3-4}$，$R_4=L_4$，

所以，比較方程式(10)和方程式(12)，很容易看出$i_1=-k_1$，$i_2=-k_2$，$i_3=-k_3$，$i_4\doteq-k_4$。

这样，$v_1=L_1k_1=-R_1i_1$，

$$\left.\begin{aligned}&v_{1-2}=L_{1-2}\ (k_1-k_2)\ =-R_{1-2}\ (i_1-i_2)\ ,\\&v_{1-4}=L_{1-4}\ (k_1-k_4)\ =-R_{1-4}\ (i_1-i_4)\ ,\\&v_2=L_2k_2=-R_2i_2,\\&v_{2-3}=L_{2-3}\ (k_2-k_3)\ =-R_{2-3}\ (i_2-i_3)\ ,\\&v_3=L_3k_3=-R_3i_3,\\&v_{3-4}=L_{3-4}\ (k_3-k_4)\ =-R_{3-4}\ (i_3-i_4)\ ,\\&v_4=L_4k_4=-R_4i_4\text{。}\end{aligned}\right\}\cdots\ (13)$$

上列各式中的$-R_1i_1$，$-R_{1-2}\ (i_1-i_2)$，…等就是图2中电阻的箭头所对一端的电位减去另一端的电位。这就証明了箭头所指方向的高差的改正数就等于电路中相应电阻上箭头所指的一端和另一端的电位差。应注意电动势的正負号应和高差閉合的符号一致（参考图4）。

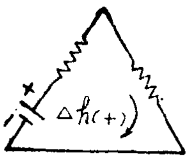

图 4a

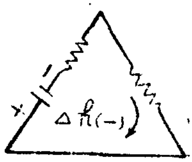

图 4b

此外，电路中的电阻只要和相应綫段的長度成正比，不一定要相等，因为电阻按比例增加或減少后，电流就按相同比例減少或增加，而电位差还是保持不变。各环的电动势也可乘上一个倍数，但求得的电位差要被此乘数除。

下面再比較一下結点平差和电路計算。图5中三个水准点的

已知高程是H_1，H_2 和 H_3。测出的結点x和三个水准点之間的高差是h_1，h_2和h_3。用L_1，L_2和L_3表示各綫段的距离。根据最小二乘法原理，結点x的高程H_x应等于H_1+h_1，H_2+h_2，和H_3+h_3 的权平均数，而权是和 L_1，L_2，L_3成反比的，就是：

$$H_x=\frac{\frac{1}{L_1}(H_1+h_1)+\frac{1}{L_2}(H_2+h_2)+\frac{1}{L_3}(H_3+h_3)}{\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_3}}。$$

現在

$$v_1=H_x-(H_1+h_1)=$$

$$\frac{\frac{1}{L_1}(H_1+h_1)+\frac{1}{L_2}(H_2+h_2)+\frac{1}{L_3}(H_3+h_3)}{\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_3}}-(H_1+h_1)=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_3}}\left[\frac{1}{L_2}(H_2+h_2)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{L_3}(H_3+h_3)-\left(\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_3}\right)(H_1+h_1)\right]$$

$$=\frac{L_1L_2L_3}{L_1L_2+L_2L_3+L_3L_1}\left(\frac{\Delta h_{\mathrm{I}}}{L_2}-\frac{\Delta h_{\mathrm{II}}}{L_3}\right)=\frac{L_1L_3\Delta h_{\mathrm{I}}-L_1L_2\Delta h_{\mathrm{II}}}{L_1L_2+L_2L_3+L_3L_1} \qquad (14)$$

在相应的电路中（图 6），$U_{\mathrm{I}}=\Delta h_{\mathrm{I}}$，$U_{\mathrm{II}}=\Delta h_{\mathrm{II}}$，$R_1=L_1$，$R_2=L_2$，$R_3=L_3$。

在 I 圈中 $\quad i_2R_2-i_1R_1=U_{\mathrm{I}} \qquad (15)$

在 II 圈中 $\quad i_1R_1+(i_1+i_2)R_3=U_{\mathrm{II}}$，

即 $\quad i_1(R_1+R_3)+i_2R_3=U_{\mathrm{II}}$。 $\qquad (16)$

$$R_3(15)-R_2(16)-i_1R_1R_3-i_1(R_1+R_3)$$

$$=R_3U_{\mathrm{I}}-R_2U_{\mathrm{II}},$$

即 $\quad i_1=-\dfrac{R_3U_{\mathrm{I}}-R_2U_{\mathrm{II}}}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$，

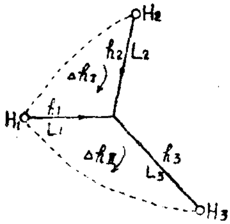

图 5

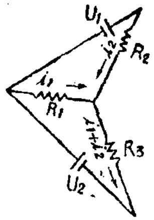

图 6

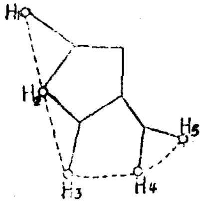

图 7

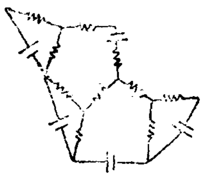

图 8

$$-i_1R_1=\frac{R_1R_3U_{\mathrm{I}}-R_1R_2U_{\mathrm{II}}}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}\cdots\cdots\cdots\cdots\ (17)$$

比較（17）和（14）后，就可看出高差 h_1 的改正数 U_1 等于电阻 R_1 上箭头所指一端和另一端的电位差，同样可証明 h_2，h_3 的改正数各等于相应电路上兩端的电位差。这就說明結点平差和电路計算是一样的，只要注意使电路中的圈数和平差时的条件数目相同。

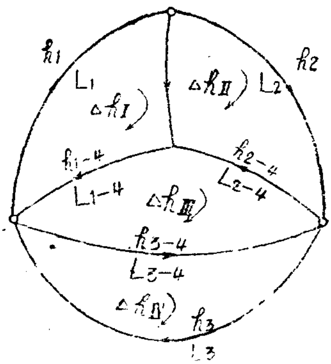

图 9

图 7 是較复杂的水准网，网内有10条綫段，10个点子，其中5点是高程已知的水准点，10个点需要9条綫段把它們連結起来，而

现在有10条綫段，所以有一个条件，此外，5个水准点又增加了4个条件，这样共有5个条件。图8是相当图7的綫路，共有5个圈。

常会遇到有中間环的水准网或导綫网，图9就是一个水准网的例子。用同样符号代表各量，其方程式將为：

$$\left.\begin{aligned}&(L_1+L_{1-2}+L_{1-4})k_1-L_{1-2}k_2\\&\qquad-L_{1-4}k_4+\Delta h_{\mathrm{I}}=0,\\&-L_{1-2}k_1+(L_{1-2}+L_2+L_{2-4})\,k_2\\&\qquad-L_{2-4}k_4+\Delta h_{\mathrm{II}}=0,\\&(L_3+L_{4-3})\,k_3-L_{3-4}k_4+\Delta h_{\mathrm{III}}=0,\\&-L_{1-4}k_1-L_{2-4}k_2-L_{3-4}k_3+(L_{1-4}+\\&\qquad L_{2-4}+L_{3-4})\,k_4+\Delta h_{\mathrm{IV}}=0。\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(18)$$

在电週路图10中，仍用克希柯夫定律标出电流及其方向，所不同的是第Ⅱ环所加电动势系用U'_{I}表示。参照图10可以列出下面的方程式組：

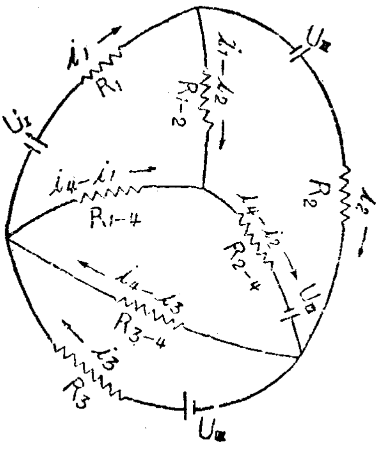

图10

$$\left.\begin{aligned}&(R_1+R_{1-2}+R_{1-4})\,i_1-R_{1-2}i_2\\&\qquad-R_{1-4}i_4-U_{\mathrm{I}}=0,\\&-R_{1-2}i_1+(R_2+R_{2-4}+R_{1-2})\,i_2\\&\qquad-R_{2-4}i_4-(U_{\mathrm{II}}-U_{\mathrm{IV}})=0,\\&(R_3+R_{4-3})\,i_3-R_{3-4}i_4-U_{\mathrm{III}}=0,\\&-R_{1-4}i_1-R_{2-4}i_2-R_{3-4}i_3+\\&\qquad(R_{1-4}+R_{2-4}+R_{3-4})\,i_4-U_{\mathrm{IV}}=0。\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(19)$$

如果使$U'_{\mathrm{I}}-U_{\mathrm{IV}}=U_{\mathrm{II}}$，則方程式組（17）就是相应于图 9 法方程式（18）的样子。这样，$U'_{\mathrm{I}}=U_{\mathrm{II}}+U_{\mathrm{IV}}$。 ·············· (20)

由此，可得出結論：中間环的电动势可施加于任一边上，但佔有該边的另一环所加的电动势并不等于原値，在同方向决定閉合差的情况下，它等于本环原电动势和中間环电动势的代数和。

Ⅱ．求未知数最或然値的函数的均方誤差

設欲求下例直綫函数的均方誤差

$$F=f_0+f_1V_1+f_2V_2+f_3V_3+\cdots\cdots+f_nV_n, \quad \cdots\cdots \quad (21)$$

式中各 f 为常数，V 是条件观測中測得値平差后的最或然値，f_0 是常数項。

因为各 V 是整体平差得到的，必須把它們变换为独立观測値 M 的函数，才能应用誤差傳播公式。

已知：

$$V_i=M_i+v_i，\ 权为 p_i。$$

代入（21），得

$$\begin{aligned}F=f_0&+f_1M_1+f_2M_2+f_3M_3+\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+f_nM_n+f_1v_1+f_2v_2\\&+f_3v_3+\cdots\cdots\cdots+f_nv_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (22)\end{aligned}$$

改正数：

$$\left.\begin{aligned}v_1&=\frac{1}{p_1}\ (a_1k_1+b_1k_2+\cdots\cdots+t_1k_t)\ ,\\v_2&=\frac{1}{p_2}\ (a_2k_1+b_2k_2+\cdots\cdots+t_2k_t)\ ,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\v_n&=\frac{1}{p_n}\ (a_nk_1+b_nk_2+\cdots\cdots+t_nk_t)\ 。\end{aligned}\right\}\cdots \quad (23)$$

（23）式中的 a，b ……才是条件方程式中的系数，k 是联系数。

用 f_1 乘（23）第一式，f_2 乘第二式…… f_n 乘第 n 式，將

各乘积相加后併項，得

$$f_1v_1+f_2v_2+f_3v_3+\cdots\cdots+f_nv_n=\left[\frac{af}{p}\right]k_1+\left[\frac{bf}{p}\right]k_2+$$
$$+\left[\frac{cf}{p}\right]k_3+\cdots\cdots+\left[\frac{tf}{p}\right]k_t。$$

式 (22) 变为：

$$F=f_0+[fM]+\left[\frac{af}{p}\right]k_1+\left[\frac{bf}{p}\right]k_2+\left[\frac{cf}{p}\right]k_3+\cdots\cdots$$
$$+\left[\frac{tf}{p}\right]kt, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (24)$$

式中 k_1 k_2, k_3 $\cdots\cdots k_n$ 由下列法方程式求得：

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{aa}{p}\right]k_1+\left[\frac{ab}{p}\right]k_2+\cdots\cdots+\left[\frac{at}{p}\right]k_t+w_a=0,\\
&\left[\frac{ab}{p}\right]k_1+\left[\frac{bb}{p}\right]k_2+\cdots\cdots+\left[\frac{bt}{p}\right]k_t+w_b=0,\\
&\left[\frac{at}{p}\right]k_1+\left[\frac{bt}{p}\right]k_2+\cdots\cdots+\left[\frac{tt}{p}\right]k_t+w_t=0。
\end{aligned}\right\}\cdots \quad (25)$$

用待定系数 Q_a 乘 (25) 第一式，Q_b 乘第二式，$\cdots\cdots Q_t$ 乘第 t 式，并將乘积总加于式 (24) 中，得

$$\begin{aligned}
F=k_1&\left\{\left[\frac{aa}{p}\right]Q_a+\left[\frac{ab}{p}\right]Q_b+\cdots\cdots+\left[\frac{at}{p}\right]Q_t+\left[\frac{af}{p}\right]\right\}\\
+k_2&\left\{\left[\frac{ab}{p}\right]Q_a+\left[\frac{bb}{p}\right]Q_b+\cdots\cdots+\left[\frac{bt}{p}\right]Q_t+\left[\frac{bf}{p}\right]\right\}\\
+&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+k_t&\left\{\left[\frac{at}{p}\right]Q_a+\left[\frac{bt}{p}\right]Q_b+\cdots\cdots+\left[\frac{tt}{p}\right]Q_t+\left[\frac{tf}{p}\right]\right\}\\
+&w_aQ_a+w_bQ_b+\cdots\cdots+w_tQ_t+f_0+[fM]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (26)
\end{aligned}$$

选擇待定系数时，令

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{aa}{p}\right]Q_a+\left[\frac{ab}{p}\right]Q_b+\cdots+\left[\frac{at}{p}\right]Q_t+\left[\frac{af}{p}\right]=0\\
&\left[\frac{ab}{p}\right]Q_a+\left[\frac{bb}{p}\right]Q_b+\cdots+\left[\frac{bt}{p}\right]Q_t+\left[\frac{bf}{p}\right]=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

$$\left[\frac{at}{p}\right]Q_a+\left[\frac{bt}{p}\right]Q_b+\cdots+\left[\frac{tt}{p}\right]Q_t+\left[\frac{tf}{p}\right]=0。$$

这样，式（26）变为：

$$F=w_aQ_a+w_bQ_b+w_cQ_c+\cdots+w_tQ_t+f_0+[fM]\ 。\qquad(28)$$

各w是按条件方程式求出的闭合差，即：

$$\left.\begin{aligned}w_a&=a_1M_1+a_2M_2+a_3M_3+\cdots\cdots+a_nM_n+a_0\\&=[aM]+a_0,\\w_b&=b_1M_1+b_2M_2+b_3M_3+\cdots\cdots+b_nM_n+b_0\\&=[bM]+b_0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\w_t&=t_1M_1+t_2M_2+t_3M_3+\cdots\cdots+t_nM_n+t_0\\&=[tM]+t_0.\end{aligned}\right\}\qquad(29)$$

代入（28）式：

$$\begin{aligned}F=&a_0Q_a+b_0Q_b+\cdots\cdots+t_0Q_t+f_0\\&+\ (a_1Q_a+b_1Q_b+\cdots\cdots+t_1Qt+f_1)\ M_1\\&+\ (a_2Q_a+b_2Q_b+\cdots\cdots t_2Q_t+f_2)\ M_2\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\ (a_nQ_a+b_nQ_b+\cdots\cdots+t_nQ_t+f_n)\ M_n.\end{aligned}\qquad(30)$$

令

$$\left.\begin{aligned}&a_0Q_a+b_0Q_b+\cdots\cdots+f_0Q_t+f_0=w_0,\\&a_1Q_a+b_1Q_b+\ \cdots\cdots\ +t_1Q_t\ +\ f_1=w_1,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\&a_nQ_a+b_nQ_b+\cdots\cdots t_nQ_t+f_n=w_n,\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\qquad(31)$$

代入（30）式，得

$$F=w_0+w_1M_1+w_2M_2+w_3M_3+\cdots\cdots+w_nM_n。\qquad(32)$$

假設M_i的均方誤差为m_i，單位权均方誤差为μ，則得

$$m_1=\frac{\mu}{\sqrt{p_1}},\ m_2=\frac{\mu}{\sqrt{p_2}}\cdots\cdots\ m_n=\frac{\mu}{\sqrt{p_n}}。$$

这样，