

概率统计

(第三版)

同济大学概率统计教研组 编著

同济大学出版社

概 率 统 计

(第三版)

同 济 大 学
概率统计教研组 编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书在原《概率统计(工程数学)》的基础上,根据我们多年的教学改革实践修订而成,内容包括随机事件与概率、离散型随机变量及其分布、连续型随机变量及其分布、随机变量的数字特征、随机变量序列的极限、现代概率论基础简介、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析。书中各章附有相当数量的习题,书末附有习题的参考答案,供读者查阅。本书在教育部制定的教学大纲的基础上,紧扣硕士研究生入学考试大纲,并以此规范概率统计中的术语与记号。

本书以提高读者解题能力与解决实际问题能力为基本出发点,从实例引入抽象的基本概念,从抽象的数学定理又回到具体的应用问题,有助于读者较快地掌握近代的概率统计知识。本书可作为高等院校本科生(包括理工类与经济类)概率论与数理统计课程的教材或参考书,也可作为广大概率统计应用人员的工具性参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计/同济大学概率统计教研组编著.

—上海:同济大学出版社,1994.3(2004.3 第三版)

ISBN 7-5608-1310-0

I. 概… II. 同… III. ① 概率论-应用-工程技术 ② 数理统计-应用-工程技术 IV. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 10379 号

概率统计(第三版)

同济大学概率统计教研组 编著

责任编辑 李炳钊 责任校对 郁 峰 封面设计 李志云

出 版
发 行

同济大学出版社

(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经 销

全国各地新华书店

印 刷

同济大学印刷厂印刷

开 本

787mm×960mm 1/16

印 张

19

字 数

380000

印 数

5201—16200

版 次

1994 年 3 月第一版 2000 年 5 月第二版

2004 年 3 月第三版 2004 年 7 月第二次印刷

书 号

ISBN 7-5608-1310-0/O·116

定 价

21.00 元

本书若有印装质量问题, 请向本社发行部调换

第三版前言

跨入新世纪以来,随着高等院校招生规模的扩大,我国高等教育正经历着从精英教育向大众教育的转变过程. 社会各界对提高教育质量的要求日益高涨. 教材质量直接影响到高等学校教学水平的提高. 为了使近代的概率统计知识成为广大本科生(包括理工类与经济类)和概率统计应用人员手中的一个重要数学工具,本书再次作了修订.

在保持原书风格与体系的基础上,第三版遵循以下思路进行修订:(1) 突出概率论是本科段教学的重点;(2) 明确随机变量是概率论的研究对象;(3) 强调分布是随机变量的核心;(4) 深化随机变量相互独立性在多个随机变量中的作用;(5) 强化随机变量数字特征的应用;(6) 增加前、后知识点的联系. 愿读者通过阅读本书能学以致用,不仅提高解题能力,而且提高解决实际问题的能力.

书中不妥之处,敬请读者指正.

第三版的修订工作由何迎晖执笔.

编 者

2004 年元旦

第二版前言

1997 年原国家教委把概率统计课程纳入全国硕士研究生入学统一考试内容,此举极大地促进了概率统计的教学工作,同时也推动了本书的修订工作。

第二版在保持原书特色的基础上力图贯彻下列思想:(1) 突出概率论中随机变量分布这一核心内容;(2) 在不脱离现有本科生实际数学水平的基础上,以离散型随机变量为对象,严格叙述并论证概率论中的基本理论;(3) 在内容安排上,适当注意概率统计在经济类与管理类专业中的应用;(4) 与硕士研究生入学统一考试大纲相衔接,并以此规范概率统计中的术语与记号;(5) 与硕士研究生的后续课程——“随机过程”与“应用统计”相衔接;(6) 为了使读者今后深入学习概率统计知识,增加第六章介绍现代概率论基础的一些常识,供课外选读。

根据我们教学实践估计,如果使用本书作教材,只进行概率论部分(前五章)教学约需 32 学时;按大部分专业的考研要求,进行概率统计(前五章及第七、八、九章)教学约需 60 学时。

这些年来,承蒙使用本书师生的厚爱,收到了各种修改意见。我们在此谨表谢意,同时也欢迎读者今后继续赐教。

第二版完成之际正值新旧世纪之交。若本书在客观上成为 21 世纪的教材,则纯属巧合,而非编者主观努力的成果。

第二版的修订工作由何迎晖执笔。

编 者

2000 年元旦

第一版前言

概率论与数理统计是随机数学的两个分支,它们在各个领域中都有极其广泛的应用.目前,概率论与数理统计已经成为绝大多数工科专业大学生的一门重要的基础理论课程.

为了便于读者掌握概率论与数理统计的基本概念与基本理论,初步掌握处理随机现象的基本思想与方法,提高运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力,本书在内容处理上作了如下安排:(1)以实际例子引进概率统计的基本概念;(2)强调概率统计在工程技术上的应用;(3)以离散型随机变量为对象讲清概率论中的基本概念与基本性质,以连续型随机变量为背景强调概率论的计算与应用;(4)对随机变量的分布强调值域这个容易被忽视的概念;(5)按国家标准采用规范的概率统计术语.

本书是我们教研组全体任课老师历年教学工作的一个总结.油印讲义在教学中曾使用了多次.现根据1992年国家教委下达的“高等工业学校概率论与数理统计课程教学基本要求”作了进一步的修订.本书可作为高等工业学校概率论与数理统计课程的教材或教学参考书.

本书由王金宝(第一、二章),钱志坚(第三、四章),钱伟民(第五、六章)与庄勇荣(第七、八章)编写初稿,由何迎晖统稿并写第二稿,最后由潘承毅修改、润色、定稿.在编写过程中,闵华玲、蒋凤瑛等老师提供了许多宝贵的意见与帮助,在此向他们致谢.

限于编者的水平,本书的不足之处,衷心希望读者批评指正.

编 者

1992年10月

目 录

第一章 随机事件与概率

§ 1.1 随机事件	(1)
一、随机试验(1) 二、样本空间(2) 三、随机事件(2) 四、随机事件之间的关系与运算(3)	
§ 1.2 等可能概型	(6)
一、古典概率(6) 二、几何概率(9)	
§ 1.3 频率与概率	(11)
§ 1.4 概率的公理化定义与性质	(13)
§ 1.5 条件概率与随机事件的独立性	(16)
一、条件概率(16) 二、随机事件的独立性(18) 三、独立性在可靠性问题中的应用(21) 四、贝努利概型与二项概率(22)	
§ 1.6 全概率公式与贝叶斯公式	(24)
习题	(28)

第二章 离散型随机变量及其分布

§ 2.1 随机变量	(32)
§ 2.2 概率函数	(34)
§ 2.3 常用离散型随机变量	(35)
§ 2.4 二维随机变量及其分布	(41)
一、联合概率函数(41) 二、边缘概率函数(43)	
§ 2.5 随机变量的独立性与条件分布	(45)
一、随机变量的独立性(45) 二、条件概率函数(46)	
§ 2.6 随机变量函数的分布	(50)
一、一维随机变量函数的概率函数(50) 二、二维随机变量函数的概率函数(51)	
习题	(55)

第三章 连续型随机变量及其分布

§ 3.1 分布函数	(60)
------------------	------

§ 3.2 概率密度函数	(63)
§ 3.3 常用连续型随机变量	(66)
§ 3.4 二维随机变量及其分布	(71)
一、联合密度函数(71) 二、边缘密度函数(74)	
§ 3.5 随机变量的独立性与条件分布	(76)
一、随机变量的独立性(76) 二、条件密度函数(78)	
§ 3.6 随机变量函数的分布	(81)
一、一维随机变量函数的密度函数(81) 二、二维随机变量函数的密度函数(84)	
习题	(88)
 第四章 随机变量的数字特征	
§ 4.1 数学期望	(92)
§ 4.2 方差与标准差	(100)
§ 4.3 协方差与相关系数	(103)
§ 4.4 矩与协方差矩阵	(110)
§ 4.5 分位数、变异系数与众数	(111)
§ 4.6 两个不等式	(113)
习题	(116)
 第五章 随机变量序列的极限	
§ 5.1 大数定律	(120)
§ 5.2 中心极限定理	(123)
习题	(127)
 第六章 现代概率论基础简介	
§ 6.1 概率空间	(129)
§ 6.2 随机变量的分布	(132)
§ 6.3 随机变量的数字特征	(137)
§ 6.4 复值随机变量	(140)
§ 6.5 特征函数	(144)
一、一维特征函数(148) 二、多维特征函数(149)	
§ 6.6 多维正态分布	(149)

第七章 数理统计的基本概念

§ 7.1 直方图与条形图	(155)
§ 7.2 总体与样本	(159)
§ 7.3 经验分布函数	(161)
§ 7.4 统计量	(163)
§ 7.5 三个常用分布	(166)
§ 7.6 抽样分布	(171)
一、正态总体的情形(172) 二、非正态总体的情形(175)	
习题	(176)

第八章 参数估计

§ 8.1 参数估计问题	(180)
§ 8.2 两种常用点估计	(181)
一、矩估计(181) 二、极大似然估计(183)	
§ 8.3 估计量的评选标准	(189)
§ 8.4 置信区间	(193)
§ 8.5 正态总体下未知参数的置信区间	(196)
一、一个正态总体的情形(196) 二、两个正态总体的情形(202)	
§ 8.6 0-1 分布中未知概率的置信区间	(205)
习题	(207)

第九章 假设检验

§ 9.1 假设检验问题	(211)
§ 9.2 正态总体下未知参数的假设检验	(214)
一、一个正态总体的情形(215) 二、两个正态总体的情形(220)	
§ 9.3 0-1 分布中未知概率的假设检验	(223)
§ 9.4 两类错误	(224)
§ 9.5 χ^2 拟合优度检验	(226)
§ 9.6 数据中异常值的检验	(230)
习题	(235)

第十章 回归分析与方差分析

§ 10.1 相关关系问题	(239)
§ 10.2 一元回归分析	(240)

一、线性模型(240)	二、最小二乘法(241)	三、回归系数的显著性检验(246)	四、预测与控制(248)
§ 10.3	线性化方法		(250)
§ 10.4	多元回归分析简介		(252)
§ 10.5	单因子方差分析		(253)
一、方差分析问题(253)	二、方差分析方法(255)		
§ 10.6	双因子方差分析简介		(259)
习题			(262)

附表

一、常用分布、记号及数字特征一览表	(265)
二、二项分布的概率函数值表	(266)
三、泊松分布的概率函数值表	(268)
四、标准正态分布函数值及分位数表	(270)
五、 χ^2 分布的分位数表	(271)
六、 t 分布的分位数表	(273)
七、 F 分布的分位数表	(274)
八、半极差型检验的临界值表	(276)
九、邻差型检验的临界值表	(277)
十、相关系数检验的临界值表	(278)
习题答案	(279)
参考书目	(290)

第一章 随机事件与概率

概率论是研究随机现象的统计规律性的一个数学分支. 本章介绍概率论中的基本概念——随机事件与随机事件的概率, 并进一步讨论随机事件的关系与运算, 以及概率的性质与计算方法.

§ 1.1 随机事件

在自然界与人类的社会活动中常常会出现各种各样的现象. 例如, 一枚硬币向上抛起后必然会落地; 在相同的大气压与温度下, 气罐内的分子对罐壁的压力是个常数. 这类现象的共同特点是, 在确定的试验条件下它们必然会发生, 称这类现象为**确定性现象**. 另一类现象则不然. 例如, 将一枚硬币上抛, 着地时究竟正面向上还是反面向上, 这在上抛前是无法断言的. 但是, 人们从长期实践中知道, 多次重复上抛同一枚硬币出现正面向上的可能性占一半左右, 这类在个别试验中呈现不确定的结果, 而在大量重复试验中结果呈现某种规律性的现象称为**随机现象**, 这种规律性称为**统计规律性**. 为研究随机现象的统计规律性作准备, 本节介绍随机试验、样本空间与随机事件等概念.

一、随机试验

在客观世界中, 随机现象是极为普遍的. 例如, 某地的年降雨量, 河流某处的年最高水位, 相同条件下生产的电子元件的寿命, 某交通道口中午 1 小时内汽车流量等等. 为了对随机现象的统计规律性进行研究, 有时要做一些试验. 这里所说的试验必须具有以下三个特点:

- (i) 试验可以在相同的条件下重复地进行;
- (ii) 试验的所有可能结果在试验前已经明确, 并且不止一个;
- (iii) 试验前不能确定试验后会出现哪一个结果.

在概率论中, 称具有上述三个特点的试验为**随机试验**, 简称为**试验**.

下面给出一些随机试验的例子:

例 1.1 上抛一枚硬币并观察硬币着地时向上的面, 这是一个试验.

例 1.2 观察某交通道口中午 1 小时内汽车流量(单位: 辆), 这是一个试验. 可

能出现的试验结果可以是非负整数中的任意一个,但试验前无法确定究竟会出现哪一个非负整数.

例 1.3 从某厂生产的相同型号的灯泡中抽取一只,测试它的寿命(即正常工作的小时数).这是一个试验.可能出现的试验结果可以是非负实数中的任意一个,但试验前无法确定究竟会出现哪一个非负实数.

在实际生活中还存在许多随机试验的例子.例如,彩票的开奖,质检部门对产品的质量检查等等.

二、样本空间

要研究一个随机试验,首先要弄清楚这个试验所有可能的结果.每一个可能出现的结果称为样本点,记作 ω (必要时带有下标或上标).全体样本点组成的集合称为样本空间,记作 Ω .换句话说,样本空间是试验的所有可能结果所组成的集合.这个集合中的元素就是样本点.

例 1.1(续) 在例 1.1 中,样本空间 $\Omega = \{\text{正面}, \text{反面}\}$,它由两个样本点组成.

例 1.2(续) 在例 1.2 中,样本空间 $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$,它是一个数集,它由可列无限个^①样本点组成.

例 1.3(续) 在例 1.3 中,样本空间 $\Omega = [0, \infty)$,它是一个数集,它由不可列无限个样本点组成.

从这三个例子中我们可以看到,样本空间可以是数集,也可以不是数集;样本空间可以是有限集,也可以是无有限集.

有时候,为了数学上处理的方便,可以把样本空间作适当的扩大.例如,在例 1.3 中,灯泡寿命实际上不会超过某个足够大的正数,但我们仍取样本空间为 $[0, \infty)$,必要时甚至还可以取样本空间为 $(-\infty, \infty)$.在例 1.2 中也作了类似的扩大.

三、随机事件

当我们通过随机试验来研究随机现象时,常常不是关心某一个样本点在试验后是否出现,而是关心满足某些条件的样本点在试验后是否出现.例如,在例 1.2 中,要通过对该道口汽车流量的观察来决定是否需要扩建道口.假定超过 600 辆便认为需要扩建.这时,我们关心的便是试验结果是否大于 600.满足这一条件的样本点组成了样本空间的一个子集.称一个随机试验的样本空间的子集为**随机事件**,简称为**事件**.随机事件通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示.仅含一个样本点的随机事件称为**基本事件**.在例 1.1 中,有两个基本事件 $\{\text{正面}\}$ 、 $\{\text{反面}\}$;在例 1.2 与例 1.3 中,分别有无

^① 可列无限个的含义是:这无限个元素可以按某种次序排成一列.例如,自然数有可列无限个.

限多个基本事件。

在试验后,如果出现随机事件 A 中所包含的某个样本点,那么称事件 A 发生;否则,就称事件 A 不发生。在例 1.2 中,设 A 表示“流量大于 600”,在试验后事件 A 可能发生,也可能不发生。如果试验结果是 689,那么便认为事件 A 发生。

样本空间 Ω 是其自身的一个子集,因而也是一个事件。由于样本空间 Ω 包含所有的样本点,因此每次试验后必定有 Ω 中的一个样本点出现,即 Ω 必然发生。称 Ω 为必然事件。空集 ϕ 永远是样本空间的一个子集,因而也是一个事件。由于空集 ϕ 不包含任何一个样本点,因此每次试验后 ϕ 必定不发生。称 ϕ 为不可能事件。必然事件 Ω 与不可能事件 ϕ 是两个特殊的随机事件。

四、随机事件之间的关系与运算

在一个样本空间中,可以有許多随机事件,希望通过对较简单的事件的了解去掌握较复杂的事件。为此,需要研究事件之间的关系与事件之间的运算。

由于事件是一个集合,因此,事件之间的关系与事件之间的运算应该按照集合论中集合之间的关系与集合之间的运算来规定。

给定一个随机试验, Ω 是它的样本空间,事件 A, B, C 与 $A_i (i=1, 2, \dots)$ 都是 Ω 的子集。

(1) 如果 $A \subset B$ (或 $B \supset A$), 那么称事件 B 包含事件 A 。它的含义是: 事件 A 发生必定导致事件 B 发生。图 1.1 给出了这种包含关系的一个几何表示。

在例 1.3 中,事件 A 表示“灯泡寿命不超过 200 小时”,事件 B 表示“灯泡寿命不超过 300 小时”,易见, $A \subset B$ (或 $B \supset A$)。

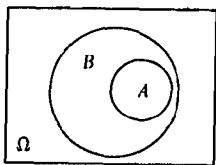


图 1.1 $A \subset B$

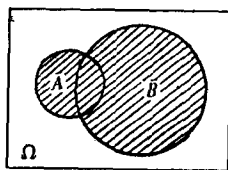


图 1.2 $A \cup B$

(2) 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 即 $A = B$, 那么称事件 A 与事件 B 相等。

(3) 事件 $A \cup B = \{\omega: \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件 (或并事件)。它的含义是: 当且仅当事件 A 与事件 B 中至少有一个发生时, 事件 $A \cup B$ 发生。图 1.2 给出了这种运算的一个几何表示。

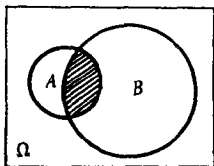
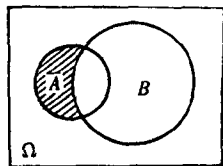
例如, 在某建筑工地上, 事件 A 表示“缺少水泥”, 事件 B 表示“缺少黄砂”。于是, 和事件 $A \cup B$ 表示“缺少水泥或黄砂”。

一般地,用 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 表示 n 个事件 $A_1, \dots, A_n$ 的和事件;用 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示可列无限个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的和事件.

(4) 事件 $A \cap B = \{\omega: \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件(或交事件). 它的含义是:当且仅当事件 A 与事件 B 同时发生时,事件 $A \cap B$ 发生. 积事件也可以记作 AB . 图 1.3 给出了这种运算的一个几何表示.

例如,某输油管线长10km. 事件 A 表示“前5km油管正常工作”,事件 B 表示“后5km油管正常工作”. 于是,积事件 $A \cap B$ 表示“整个输油管正常工作”.

一般地,用 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 表示 n 个事件 $A_1, \dots, A_n$ 的积事件;用 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示可列无限个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的积事件.

图 1.3 $A \cap B$ 图 1.4 $A - B$

(5) 事件 $A - B = \{\omega: \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件. 它的含义是:当且仅当事件 A 发生且事件 B 不发生时,事件 $A - B$ 发生. 图 1.4 给出了这种运算的一个几何表示.

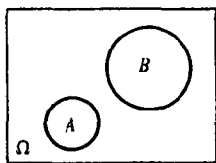
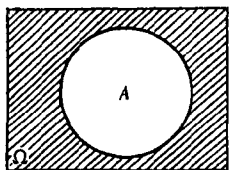
例如,某种圆柱形零件的长度与外径都合格时才算合格. 事件 A 表示“长度合格”,事件 B 表示“外径合格”. 于是,差事件 $A - B$ 表示“长度合格但外径不合格”.

(6) 如果 $A \cap B = \emptyset$,那么称事件 A 与事件 B 互不相容(或互斥). 它的含义是:事件 A 与事件 B 在一次试验中不会同时发生. 图 1.5 给出了这种运算的一个几何表示.

如果一组事件(可以由无限个事件组成)中任意两个事件都互不相容,那么称这组事件两两互不相容.

例如,在例 1.3 中,事件 A 表示“灯泡寿命不超过 200 小时”,事件 B 表示“灯泡寿命至少为 300 小时”. 易见, $AB = \emptyset$,即 A 与 B 互不相容. 如果事件 C 表示“灯泡寿命在(200 小时, 300 小时)内”,那么, A, B, C 构成一个两两互不相容的事件组. 又如,任意两个基本事件总是互不相容;任意一组基本事件总是两两互不相容.

(7) 事件 $\Omega - A$ 称为事件 A 的对立事件(或逆事件,或余事件),记作 $\bar{A} = \Omega - A$. 它的含义是,当且仅当事件 A 不发生时,事件 $\bar{A}$ 发生. 易见, $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = \Omega$. 由于 A 也是 $\bar{A}$ 的对立事件,因此称事件 A 与 $\bar{A}$ 互逆(或互余). 图 1.6 给出了这种运算的一个几何表示.

图 1.5 $A \cap B = \emptyset$ 图 1.6 $\bar{A}$

例如,某建筑物在经历一场地震后,事件 A 表示“建筑物倒塌”.于是,事件 $\bar{A}$ 表示“建筑物幸存”.

按差事件与对立事件的定义,易见有 $A - B = A\bar{B}$.

与集合论中集合的运算一样,事件之间的运算满足下述定律:

(i) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

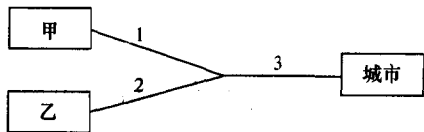
(ii) 结合律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;

(iii) 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(iv) 德·摩根(De Morgan)法则: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

这些定律都可以推广到任意多个事件.

例 1.4 某城市的供水系统由甲、乙两个水源与三部分管道 1, 2, 3 组成(图 1.7). 每个水源都足以供应城市的用水. 设事件



A_i 表示“第 i 号管道正常工作”, $i=1, 2, 3$.

于是,“城市能正常供水”可表示为

$$(A_1 \cup A_2) \cap A_3;$$

图 1.7 供水系统示意图

由德摩根法则可知,“城市断水”可表示为

$$\overline{(A_1 \cup A_2) \cap A_3} = \overline{(A_1 \cup A_2)} \cup \bar{A}_3 = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cup \bar{A}_3.$$

例 1.5 某工程队承包建造了 3 幢楼房, 设事件 A_i 表示“第 i 幢楼房经验收合格”, $i=1, 2, 3$. 试用 A_1, A_2, A_3 表示下列事件:

- (1) 只有第 1 幢楼房合格;
- (2) 恰有 1 幢楼房合格;
- (3) 至少有 1 幢楼房合格;
- (4) 至多有 1 幢楼房合格.

解 事件 $\bar{A}_i$ 表示“第 i 幢楼房经验收不合格”, $i=1, 2, 3$.

(1) “只有第 1 幢楼房合格”包含了“第 2、第 3 幢楼房不合格”的意思, 因此, 这个

事件可以表示成 $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$.

(2) “恰有 1 幢楼房合格”没有指明究竟哪一幢楼房合格,因此这个事件可以表示成

$$A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$$

$A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3, \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ 这三个事件构成一个两两互不相容的事件组.

(3) “至少有 1 幢楼房合格”可以看成 A_1, A_2, A_3 这三个事件中至少有一个发生,因此这个事件可以表示成 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. A_1, A_2, A_3 这三个事件不构成一个两两互不相容的事件组. 另一方面,“至少有 1 幢楼房合格”的对立事件是“3 幢楼房全不合格”,因此,所求事件也可以表示成 $\overline{\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3}$. 由德摩根法则知道

$$\overline{\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3} = \bar{\bar{A}_1} \cup \bar{\bar{A}_2} \cup \bar{\bar{A}_3} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

(4) “至多有 1 幢楼房合格”是下列两个互不相容的事件的和事件:“恰有 1 幢楼房合格”与“3 幢楼房全不合格”,因此所求事件可以表示成

$$A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$$

由例 1.5(3)看出,事件的表达一般不唯一.“至少有 1 幢楼房合格”还可以表示成

$$\bigcup_{i=1}^3 \{\text{恰有 } i \text{ 幢楼房合格}\} = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \\ \cup \bar{A}_1 A_2 A_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup A_1 A_2 A_3.$$

这是七个两两互不相容的事件之并.

§ 1.2 等可能概型

在一次试验中,随机事件 A 可能发生,也可能不发生. 随机事件发生的可能性的大小用区间 $[0, 1]$ 中的一个数来刻画,这个数称为**概率**. 事件 $A, B, C, \dots$ 的概率分别记作 $P(A), P(B), P(C), \dots$. 作为事件的两个特殊情况:必然事件 Ω 与不可能事件 $\emptyset$, 自然应该合理地规定

$$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0.$$

如何计算概率? 这是本章以下内容讨论的主题. 本节讨论最简单的情形——**等可能概型**,即样本空间中的每个样本点在一次试验中以相等的可能性出现.

一、古典概率

上抛一枚硬币,观察硬币着地时向上的面.假定这枚硬币质地均匀,因此“出现正面”与“出现反面”的可能性是相等的.从常识上知道,这两个事件的概率都应该是 $\frac{1}{2}$.

一个口袋中装有5只外形相同的球,分别编有号码1, ..., 5.现在从这个口袋中任取一只,取到偶数号码的球的概率有多大?由于样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_5\}$,这五个样本点在一次试验中出现的可能性都相等.“取到偶数号码的球”这一事件 $A = \{\omega_2, \omega_4\}$.从常识上知道, $P(A) = \frac{2}{5}$.

一般地,称具有下列两个特征的随机试验的数学模型为**古典概型**:

- (i) 试验的样本空间 Ω 是个有限集,不妨记作 $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$;
- (ii) 每个样本点在一次试验中以相等的可能性出现,即

$$P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_n\}).$$

古典概型是概率论发展初期的主要研究对象.在古典概型中,如果事件 A 中包含 n_A 个样本点,那么规定

$$P(A) = \frac{n_A}{n}.$$

用这种方法算得的概率称为**古典概率**.

例 1.6 把一枚均匀硬币连抛两次.设事件 A 表示“出现两个正面”,事件 B 表示“出现两个相同的面”.试求 $P(A)$ 与 $P(B)$.

解 把一枚硬币连抛两次看作一次试验,依次出现的向上的面看作一个样本点.样本空间 $\Omega = \{\text{正正}, \text{先正后反}, \text{先反后正}, \text{反反}\}$ 这是一个古典概型.因此 $n=4$.由 $A = \{\text{两正}\}$ 知道 $n_A=1$,因此 $P(A) = \frac{1}{4}$;由 $B = \{\text{两正}, \text{两反}\}$ 知道, $n_B=2$,因此 $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

在例1.6中,如果取样本空间 $\Omega^* = \{\text{两正}, \text{一正一反}, \text{两反}\}$,那么,就不能按古典概率公式来计算了,因为各个样本点出现的可能性不相等.

使用古典概率计算公式,要涉及计数运算.当样本空间中元素较多时,需要用初等数学中有关“计数法”(例如排列组合)的知识.

我们来定义一个记号,它是组合数的推广.规定

$$\binom{n}{r} = \begin{cases} \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}, & r=1, 2, \dots; \\ 1, & r=0. \end{cases}$$