概率论与数理统计学习指导

GAILü LUN
YU SHULI TONGJI XUEXI ZHIDAO

夏宁茂 秦 衍 编著

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

概率论与数理统计学习指导

YU SHULI TONGJI XUEXI ZHIDAO

夏宁茂 秦 衍 编著

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/夏宁茂,秦衍 编著.
上海:华东理工大学出版社,2005.6
ISBN 7-5628-1708-1

Ⅰ.概... Ⅱ.①夏... ②秦... Ⅲ.①概率论-学习指导-参考资料②数理统计-考试-参考资料
Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 043718 号

概率论与数理统计学习指导

编　　著/ 夏宁茂　秦　衍
责任编辑/ 李国平
封面设计/ 赵　军
责任校对/ 金慧娟
出版发行/ 华东理工大学出版社
　　　　地　址:上海市梅陇路 130 号,200237
　　　　电　话:(021)64250306(营销部)
　　　　传　真:(021)64252707
　　　　网　址:press.ecust.edu.cn
印　　刷/ 常熟市华顺印刷有限公司
开　　本/ 787×1092　1/16
印　　张/ 13.25
字　　数/ 313 千字
版　　次/ 2005 年 6 月第 1 版
印　　次/ 2005 年 6 月第 1 次
印　　数/ 1—5050 册
书　　号/ ISBN 7-5628-1708-1/O·134
定　　价/ 20.00 元

前言

本辅导书主要是面向考研学生和本科优秀生的.在多年的本科教学与考研班辅导中,发现学生在遇到诸如"分布函数相同的随机变量是否相等?"这类问题时常会感到茫然.究其原因,可能是学生往往习惯使用在"高等数学"学习中业已养成的确定性思维模式来看待随机现象,从而在总体上把握不住随机处理的思想.鉴于此,我们一改以往众多教材采用的单纯应试复习的模式,以"内容+方法+题型"的模式重新编写教材,以达到复习、综合、提高的目的.围绕国家教育委员会颁布的"考研数学复习大纲"和"高等工业学校概率论与数理统计课程教学基本要求",抓住重点,抓住大概率事件,以概率思想复习概率,力图使读者通过较短时间的学习,融会贯通,以取得理想的效果.

本书特点如下:

1. 采用"内容+方法+题型"的编写模式,使读者在应试时,能以较扎实的数学概念与处理思想为基础,应对各种可能的变化.

2. 强调"综合性",既有"概率统计"本身内容的前后综合,以体现知识原有的网络结构;亦有不同数学学科之间的综合,以适应考研时集高等数学、线性代数、概率论与数理统计三部分内容于一张试卷的实际情况.

3. 书本中融合了作者数十年的教学经验和体会,提出了不少独创的解题技巧与记忆口诀,以帮助读者深入掌握各种重要的概念和方法.

4. 本书讲解的例题中有分析、解法和评注,引导读者从单纯的题解中归纳出有用的方法和内涵,便于举一反三,以"区间覆盖"代替"点覆盖".

5. 配置的习题有多种题型与层次,以便读者适应考试的不同要求.

本书由于改变了以往考研教材经常采用的单纯应试的复习模式,注入了内容的综合与提高,故也可用作大学本科学生的"概率论与数理统计"课程教学辅导参考书.在同步学习时,如果遇到要用后面知识的题目,则可暂时跳过该题,以后回过头来再看此题,定会另有收获.

本书在编写过程中,得到了华东理工大学出版社的大力支持,得到了王宗尧教授、鲁习文教授和孙龙祥教授的支持和关心,倪中新老师提出了合理的建议,在此表示衷心的感谢.同时也感谢高焕超、谢臻赟所做的图文编辑工作.

本书的主要内容虽然多次在华东理工大学的研复班和理工优秀生班中使用,但由于作者的知识局限,有不当和错误之处,敬请读者和专家批评指正.

夏宁茂　秦　衍

2005.3.18

目 录

第一章
随机事件和概率

一、教学内容阐述及考纲要点诠释

1. 随机事件,概率及基本关系

1) 样本空间,随机事件及事件间的关系

随机现象是概率统计中要处理的主要对象,在一定条件下该现象的结果可能有多种且呈现偶然性,一般事先无法断定其结果,但在相同条件下进行大量重复试验时却呈现一定的规律性,具有必然性的一面.它的偶然性往往用取值(或结果)的不同来表示.而其必然性则往往用概率来体现,故取值范围与概率体现构成了随机现象(随机变量)的两个重要特征.

为研究随机事件,首先分析随机现象可能取得的各种可能结果.在试验中每一个可能出现的,不可再分解的最简单结果称为该试验的基本事件或样本点,用 ω 表示;而样本点的全体构成样本空间,记为 Ω,随机事件(以后简称为事件)即为 Ω 中的子集.当 Ω 确定以后,事件间的关系或运算可用集合关系或运算进行描述.

事件关系或运算	集合关系或运算
必然事件	Ω
不可能事件	Φ
A 发生必然导致 B 发生	$A\subset B$
A 与 B 同时发生或同时不发生	$A=B$
A 与 B 至少一个发生	$A\cup B$
A 与 B 同时发生	$A\cap B$(或 AB)
A 发生而 B 不发生	$A-B$(或 $A\overline{B}$,或 $A-AB$)
A 与 B 不可能同时发生	$AB=\Phi$(或称 AB 不相容)
A 的对立事件	$\overline{A}$(或 $\Omega-A$)

不难验证事件运算有以下规律:

a) 交换律:$A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$

b) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$

c) 分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$

d) 摩根律：$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

注：与"∪"运算符相联系的有"+"，下面我们在 $AB=\Phi$ 时把"∪"记为"+"以强调其不相容性. 然而应注意的是在考试时(或有的书本中)常混用"∪"与"+"，而不管 A 与 B 是否相容.

2) 概率的定义及基本性质

概率是表征随机事件出现某结果的机会大小的一个量，它可以有极限定义(统计定义)与公理化定义两种解释. 在极限定义中把事件 A 发生的概率理解为频率的极限. 而公理化定义，则规定对应于每个随机事件 A，若在给定的样本空间下存在符合下面三个条件的数 $P(A)$，则称 $P(A)$为事件 A 发生的概率：a)非负性，即 $P(A)\geqslant 0$，b)规范性，即 $P(\Omega)=1$，c)可列可加性，即对事件 $A_1, A_2, \cdots$，且在 $i\neq j$ 时 $A_iA_j=\Phi$，$i, j=1, 2, \cdots$，则总有 $P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$，其中 $\sum$ 是前面所提到的"+"运算的一种简单表示法，这里强调对 A_i 进行并运算时，存在两两不相容性.

事件具有如下性质：

a) $P(\Phi)=0$

b) $P(\overline{A})=1-P(A)$

c) $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$，当 $A\supset B$ 时，成立 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

d) 有限可加性，即若当 $i\neq j$ 时，$A_iA_j=\Phi$，则成立：$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

e) 一般加法定理，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，此式还可推广到其他有限个数，即：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)$$

注：在以前的考试中，概率与事件的性质是经常遇到的考点之一，有时为了增加知识点，考题还往往会联系条件概率与独立性.

2. 古典概型及几何概型

1) 样本点计数基本公式及类比原则

在古典概率的计算中常涉及样本空间中某子集所含的样本点个数的计数问题. 例如从 n 个元素中抽取 r 个元素 $(1\leqslant r\leqslant n)$，问有多少种抽法. 其答案应按抽取方式，即每次抽取后是否放回，以及所抽到的 r 个元素是否要考虑不同次序而分成四种情况：

a) 计序放回，不同抽法数为：

$$N=n^r \tag{1.1}$$

b）计序不放回，不同抽法数为：

$$N = \mathrm{A}_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) \tag{1.2}$$

特别地，当 $r = n$ 时 $\mathrm{A}_n^r = n(n-1)\cdots(1) = n!$.

c）不计序放回，不同抽法数为：

$$N = \mathrm{C}_{n+r-1}^r = \binom{n+r-1}{r} \tag{1.3}$$

d）不计序不放回，不同抽法数为：

$$N = \mathrm{C}_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{1.4}$$

实际中除了上面 4 个公式外，还有 2 个组合公式，它们分别适用于：

a）从 n 个元素中按不计序不放回方式抽取 r 个元素，但已知 n 个元素可分为 k 类，每类元素个数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ $(n = n_1 + \cdots + n_k)$，而要求 r 个元素中各类元素个数分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ $(r = r_1 + \cdots + r_k)$，则抽法数可以有：

$$N = \binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\cdots\binom{n_k}{r_k} \tag{1.5}$$

（注：此法常用于“超几何分布”的计算）.

b）把 n 个元素分成 k 个部分，要求每部分分别有 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 个元素 $(n = n_1 + \cdots + n_k)$，则分法数可以有：

$$N = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \tag{1.6}$$

（注：当 $k = 2$ 时，本式与公式(1.4)相同，此式常可用于“抽位置”问题，在抽样时采用部分计序法，即 n_i 内部不计序，而 k 个不同部分之间还是有差别的.）

类比原则：由于上面的公式只强调了不同抽取的抽法个数，而不涉及具体每个抽法的内容，故如能在不同问题中建立起某种一一对应关系，则上面 6 个公式可以照样用在其他的场合. 例如图 1-1：

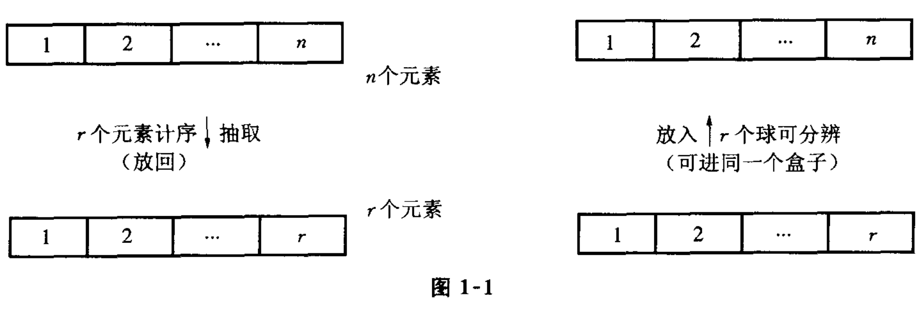

图 1-1

由于上面两种场合的样本可以有一一对应关系(即可以类比),故样本点个数应该相同,具体讲"抽取"对应于"放入","计序"对应于"分辨","放回"对应于"可进同一盒子".

2) 古典概型和几何概型的概率计算

所谓古典概型指的是满足下面两个条件的概率模型:

a) 样本空间中样本点个数有限,即 $\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$.

b) 每个样本点出现的可能性相同,即 $P(w_i) = \dfrac{1}{n}$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

在古典概型下,随机事件 A 的概率可以化为事件 A 的有利事件数 m 与样本空间基本事件总数 n 的商,即 $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

几何概型具有与古典概型相似的某种等概性.但是对几何概型而言,样本点总数不再是有限个.通常样本点充满一条直线上的长度有限的线段或二维平面上面积有限的平面区域,因此几何概型概率的计算往往化为两条线段长度的商或两块区域面积之商,其分子对应于事件 A,而分母对应于样本空间.

注 1:概率计算与样本空间有密切关系,故在计算时必须仔细弄清,特别是在考题表达不很清楚时,必须想到古典概型中的放回与计序区别.在几何概型中也要注意正确样本空间的选取,不同样本空间可能会得出不同的结果.

注 2:古典概率的计算有很大的技巧性,在考试中较多采用的是"常用模型+公式组合"的办法,所以记住几个有用的模型还是必要的.

注 3:概率计算时分子与分母要匹配,而又由于分母涉及较为简单的样本空间,故往往先算分母再算分子.

3. 条件概率,独立性与概率计算三公式

1) 条件概率与独立性

在随机事件 B 发生的条件下随机事件 A 发生的概率称为条件概率,记作 $P(A \mid B)$,对条件概率要注意以下几件事:

a) 定义概率 $P(A \mid B)$ 时,必先要求 $P(B) \neq 0$.

b) 有数学展开式 $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

c) 有直接计算法,即直接观察 B 的样本中 A 所占样本的个数,它与 B 的样本个数之比即为概率 $P(A \mid B)$.

d) 把 B 固定而让 A 在 Ω 中变动时,可记 $P(A \mid B) = P(\cdot \mid B)$ 以强调 A 可以变化,此时容易验证 $P(\cdot \mid A)$符合概率公理化定义中三个条件,故可认为它是个新的概率,即可令 $P(\cdot \mid B) = P_{旧}(\cdot \mid B) = P_{新}(\cdot)$,从而有关概率的一些运算法则对条件概率仍适用.例如由于 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,故 $P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$.类似可有 $P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P(A_1A_2 \mid B)$ 等.

独立性是概率论中最重要的概念之一,A 与 B 独立的含义是 B 事件发生与否不影响

事件 A 的发生. 用条件概率叙述事件独立的概念,即成立 $P(A \mid B) = P(A)$. 关于独立要注意以下几点:

a) 独立与乘法公式有关. $P(AB) = P(A)P(B)$ 就是独立的另一种定义. 后面的随机变量中无论是离散型的还是连续型的,在独立的定义中都可见到乘法公式的存在.

b) 对于随机事件 A、B,设它们独立,则 $(A, \overline{B})$、$(\overline{A}, B)$、$(\overline{A}, \overline{B})$ 均独立. 若注意到 $\overline{A}$ 是仅由 A 产生的, $\overline{B}$ 是仅由 B 产生的,则本性质与随机变量的下述性质有密切关系:设 ξ、η 独立,则 $f(\xi)$ 与 $g(\eta)$ 也独立,其中 f 与 g 是常见的函数. 此性质对于讨论 χ^2 分布, t 分布, F 分布或其他习题时常常是很有帮助的.

c) 独立、不相容、不相关是三个不同的概念,其中不相容常与加法公式相联系,独立常与乘法公式相联系.

d) 对于多于两个的随机事件,比两两独立更强的有相互独立的概念.

e) 对独立性的判别有时可从卷面上直接看出,有时要间接地去判断. 而常碰到的是:放回试验往往是独立的,简单随机抽样往往是独立的,单点分布与任何分布独立,二点分布之间独立与不相关等价,二维正态分布的边际分布独立与不相关亦等价.

2) 概率计算的乘法公式,全概率公式与贝叶斯公式

乘法公式 $P(AB) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$ (当然此处要求有关的条件概率有定义)通常用于交运算的概率计算,特别当 A、B 独立时成立 $P(AB) = P(A)P(B)$, 对于多于两个事件的交运算可有类似的公式. 例如 $P(ABC) = P(A \mid BC)P(BC) = P(A \mid BC)P(B \mid C)P(C)$ 等.

全概率公式 $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)$, 这里 $\Omega = \sum_{i=1}^{n} B_i$ 为 Ω 的一个分割,适用于整体难算分开易算的场合.

贝叶斯公式也称为逆概公式 $P(B_i \mid A) = \dfrac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{P(A)} = \dfrac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 这里 $\Omega = \sum_{i=1}^{n} B_i$ 为 Ω 的一个分割,适用于条件概率正解不易而逆解容易的场合.

4. 独立重复试验与二项分布、几何分布、巴斯卡分布

1) 二项分布与多项分布

在 n 次独立二状态重复试验中某状态恰好出现 k 次 $(0 \leqslant k \leqslant n)$ 的概率为 $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, 其中 p, q 分别是一次试验中出现两个状态的概率, p, $q > 0$, 且 $p + q = 1$, 这时的分布称为二项分布. 它是概率论中仅次于正态分布的重要分布,由于它又是离散分布,故考试中涉及到的可能性很大. 其特点是"独立二状态",即在独立重复做试验时,其结果仅涉及两个状态

(例如硬币向上或向下,电压超过 220 V 或小于等于 220 V,所遇道口的交通灯是红灯或非红灯等).

在独立重复试验时,若每次试验可以有 r 个状态 $(r \geqslant 2)$, 而各个状态的出现的概率分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_r\left(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$, 则 n 次试验中 r 种状态出现次数分别为 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ $(k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n)$ 次的概率为 $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$, 称这种概率分布为多项分布,而当 $r = 2$ 时就是前面的二项分布.

注:对二项分布必须注意如何判别与如何计算的问题,判别常用"独立二状态"去考察,而在计算时除了注意可用近似公式(例如泊松定理与中心极限定理)外,还要学会如何通过简单运算把问题化为二项分布来讨论.

2) 几何分布与巴斯卡分布

在独立二状态试验序列中,记 ξ 为第 r 次成功时试验的总次数,则 $P(\xi = k) = \binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}$, $k = r, r+1, \cdots$, 其中 p, q 含义与二项分布时相同,这种分布称为巴斯卡分布. 巴斯卡分布与二项分布都涉及到独立二状态的重复试验序列,但所讨论的随机事件是不同的. 二项分布中总试验次数 n 是预先给定的,但巴斯卡分布中的总试验次数可以变化. 当 $r = 1$ 时巴斯卡分布即为几何分布.

注:虽几何分布、巴斯卡分布不属考纲的范围,然而由于它们可以视为二项分布的变形,故考试中也可能出现.

二、典型例题

【例 1】 设 $0 < P(B) < 1$, 试证 A, B 独立的充要条件是 $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$

证:必要性,设随机事件 A, B 独立,则 $P(A \mid B) = P(A)$, 又因此时 A, $\overline{B}$亦独立,故 $P(A \mid \overline{B}) = P(A)$, 从而成立必要条件 $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$.

充分性,设 $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$, 利用展开公式可有

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})},$$

去掉分母,得

$$P(\overline{B})P(AB) = P(B)P(A\overline{B}),$$

代入 $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$ 后,可化为 $[1 - P(B)]P(AB) = P(B)P(A\overline{B})$,

从而

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(B)P(A\overline{B}) + P(B)P(AB) = P(B)[P(A\overline{B}) + P(AB)] \\ &= P(B)P(A\overline{B} + AB) = P(B)P(A), \end{aligned}$$

从而 A、B 独立.

注:本题条件 $0 < P(B) < 1$ 是为了保证 $P(B) \neq 0$, $P(\overline{B}) \neq 0$, 从而条件概率存在.

【例 2】 设 $P(C \mid AB)=1$,试证 $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

分析:题中 $P(C \mid AB)=1$ 即为 $\dfrac{P(ABC)}{P(AB)}=1$, $P(ABC)=P(AB)$, 一般不能立即推出 $C\supset AB$, 只能通过零概集间接证明对概率成立 $P(C)\geqslant P(AB)$. 将要证明的结论等价于 $1\geqslant P(A)+P(B)-P(C)$, 因为 $P(A)+P(B)-P(C)\leqslant P(A)+P(B)-P(AB)$ 利用加法定理及概率的性质可得所要证明的结论.

证:由条件 $P(C\mid AB)=1$,可知 $P(ABC)=P(AB)$, 由此可得

$$P(C)\geqslant P(ABC)=P(AB),$$

利用 $A\cup B$ 的加法定理

$$\begin{aligned}1\geqslant P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&\geqslant P(A)+P(B)-P(C),\end{aligned}$$

从而

$$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1.$$

注:设 $A=\Phi$, 则 $P(A)=0$, 但若 $P(A)=0$, 不能推出 $A=\Phi$. 同样由 $P(B)=1$ 不能推出 $B=\Omega$, 这种零概集不一定是不可能发生的观念,对初学者尤其要当心.

【例 3】 对随机事件 A、B、C,试证 $P(AB)+P(AC)-P(BC)\leqslant P(A)$.

分析:考虑到所要证明的结论中右边与事件 A 有关,故对 $P(AB)+P(AC)$ 利用加法定理得 $P(AB+AC)-P(ABC)$, 又因为 $BC\supset ABC$, 于是有 $P(BC)\geqslant P(ABC)$, 再利用概率的性质可得要证明的结论.

证:由于

$$AB\cup AC=A\cap(B\cup C)\subset A,$$

所以

$$P(AB\cup AC)\leqslant P(A).$$

而

$$P(AB\cup AC)=P(AB)+P(AC)-P(ABC)\geqslant P(AB)+P(AC)-P(BC),$$

从而

$$P(AB)+P(AC)-P(BC)\leqslant P(A).$$

注:事件与概率的关系是考研中经常遇到的考点之一,它经常会联系条件概率与独立性的概念,若题目以证明题形式出现,则必须严格证明. 若以填空和选择题形式出现时,所谓的文氏图或以特例代入的方式亦是可行的.

【例 4】 有 10 个电阻,其阻值分别为 1 Ω, 2 Ω, …, 10 Ω,从中取出三个要求其中一个小于 5 Ω,一个等于 5 Ω,一个大于 5 Ω,问取一次能达到要求的概率.

分析:本题电阻阻值尽管有 10 种,但根据问题要求实际分为 3 类,即小于 5 Ω,等于 5 Ω,以及大于 5 Ω 三个类型,这种想法亦常用于后面二项分布等的状态分类中. 这是一个从 $n=10$ 个元素中抽取 $r=3$ 个元素的问题. 在古典概型问题中必须注意计序放回的不同情况. 对于本题,由于问及一次能达的要求,故应理解为一次摸三个,即属于不计序不放回的问题,此题求解过程与超几何分布的引入时的过程十分相似.

解:基本事件数由公式(1.4)易知为$\binom{10}{3}$,而分子的有利事件数则可用公式(1.5)计算,其中 $r=3$, $n_1=4$, $n_2=1$, $n_3=5$.

从而所求概率为

$$p=\frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{6}.$$

【例 5】 某城有 N 辆车,车牌号从 1 到 N,某观察员在某地把所遇到的 n 辆车的牌号抄下(可能重复抄到车牌号),问抄到最大号码正好为 k 的概率 $(1\leqslant k\leqslant N)$.

分析:本题仍属古典概型,由于可重复抄到同一车牌号,故属于放回试验.对应的公式可取公式(1.1),即放回计序;或公式(1.3),即放回不计序.在题目表达两者差别不明显时往往取公式(1.1),就是说除非题目强调一般很少使用公式(1.3).考虑到本题的概率计算中基本事件总数可用 N^n 计算.为计算有利事件数,我们用 $A-B$ 方法化简之,抄到最大车牌号正好为 k 的事件概率等于抄下的车牌号不超过 k 的事件概率减去抄下车牌号不超过 $k-1$ 的事件概率,故仍可用公式(1.1).

解:设 A 为抄下的车牌号不超过 k, B 为抄下车牌号不超过 $k-1$ 的事件.

从而所求概率

$$p=P(A-B)=P(A)-P(B)=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}.$$

【例 6】 袋中有 a 只黑球, b 只白球,现把球一只一只摸出,求第 k 次摸出黑球的概率 $(1\leqslant k\leqslant a+b)$

分析:由问题可知该抽样方式是不放回抽样,从而根据黑白球是否各有区别可分为两种情况考虑:

a) 总数为 $a+b$ 个球中不仅区分黑白,而且黑球间有差别,白球间亦有差别.

b) 仅区分黑白,而黑球之间无差别,白球之间亦无差别.对这种部分区分的问题,可用"去序法"把由于差别引起的效果剔除掉.

解法一:对于 a)的情况,基本事件总数可按公式(1.2)计算,即 $(a+b)!$. 而为考虑有利事件数,把摸出的球按先后次序排成一行,形成如下形式 * * … * 黑 * … *,其中第 k 个位置要求是黑球,对该位置当然可有 a 种选择,而一旦取定某黑球以后,余下的球可在 $a+b-1$ 个球中仍用公式(1.2),计算其不同排法,从而有利事件数为 $a(a+b-1)!$,最后由除法可得所求概率为

$$p_1=\frac{a(a+b-1)!}{a+b}=\frac{a}{a+b}.$$

解法二:对于 b)的情况,基本事件总数应为 $\frac{(a+b)!}{a!b!}$,其结果与公式(1.4)是相同的,而

有利事件数则应为 $\frac{a(a+b-1)!}{a(a-1)!b!}$，把两者相除可得概率

$$p_2 = \frac{a}{a+b}.$$

注 1：注意解答中 $p_1 = p_2$ 故本问题不用指明黑球间、白球间是否有差别，同时答案与 k 无关，这就是说不管 k 如何，可用 $k=1$ 时的结果来计算，这结论应记住.

注 2：本问题还有另外一种解法，它运用于 k 较小时的情况，下面以 $k=3$ 时情况 a）为例加以说明，设 A_i 为第 i 次抽到黑球，$i=1, 2, 3$，故所求的是 A_3 的概率，先把事件 A_3 分解为 $A_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$，从而利用加法公式可有

$$P(A_3) = P(A_1A_2A_3) + P(A_1\overline{A}_2A_3) + P(\overline{A}_1A_2A_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3).$$

由于涉及不放回抽样，故独立性在此不适用，从而对交事件概率要用条件概率计算，例如 $P(A_1A_2A_3) = P(A_3 \mid A_1A_2)P(A_2 \mid A_1)P(A_1) = \frac{a-2}{a+b-2}\times\frac{a-1}{a+b-1}\times\frac{a}{a+b}$，类似可得另外三式，把它们相加可得 $p=\frac{a}{a+b}$. 这里仅讨论了 $k=3$ 的前面的各种可能. 但解答 a）中却讨论了 $k=3$ 的前后各种情况，表面上看似乎不同，但实际上用全概率公式后易知两者所得的结果是一样的.

【例 7】 某批产品中有 a 件次品，b 件正品，我们分别采用放回，不放回两种抽样方式从中抽取 n 件产品 $(1 \leqslant n \leqslant a+b)$，问正好有 k 件次品 $(0 \leqslant k \leqslant a)$ 的概率为多少？

解：a）对放回抽样当然有计序和不计序之分，但在题目不明确时往往用计序法，故本题基本事件总数为 $(a+b)^n$（对应于公式(1.1)），为考虑有利事件数，我们分两步：第一步抽位置，这可用公式(1.6)或(1.4)计算，即 $\binom{n}{k}$ 种. 一旦位置取定为某一种后，再考虑正品与次品的各种放回计序结果，这仍可用公式(1.1)计算，从而有利事件数共有 $\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$，把两个结果相除可得概率

$$p = \binom{n}{k}\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}.$$

注：本结果亦称为二项分布，这是由于如记 $p=\frac{a}{a+b}$，$q=\frac{b}{a+b}$，则它与普通二项分布公式中 $p(\xi=k) = \binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ 是完全一样的.

b）对于不放回抽样，当然亦有计序与不计序之分，但由于本问题所得结果相同（注意此结论不能任意推广到其他场合），故此处只讨论不计序场合或更严格讲对正品之间不再区分，对次品之间亦不再区分，从而可套用公式(1.4)或公式 (1.6)，在求得有利事件数与基本

事件总数以后，相除就得要求的概率

$$p=\frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}.$$

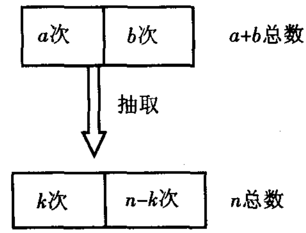

图 1-2

注：本结果常被称为超几何分布，它被广泛地应用于产品检查中. 实际使用中，常用图来帮助记忆，其中的文字形式亦可灵活改变(图 1-2). 而公式可记为正品抽正品，次品抽次品，总数抽总数.

【例 8】 某站每隔 5 分钟有一辆车通过，乘客到达该站的时间是任意的，求乘客候车时间不多于 2 分钟的概率.

分析：本问题属几何概型，其等概性由乘客到站时间的任意性与车辆到达时间的均匀性看出，于是问题可简化为 0 到 5 分钟内的情况，在计算时可认为事件 A 的概率为 $P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}$，其中 $L(A)$，$L(\Omega)$分别是 A，Ω 的几何度量，在此处 $L(\Omega)$为[0、5]的长度.

解：设事件 A 表示乘客候车时间不多于 2 分钟.

于是 $L(A)=2$，而 $L(\Omega)=5$，故 $P(A)=\frac{2}{5}$.

【例 9】 在长度为 a 的线段内任取两点将其分成三段，求它们可构成一个三角形的概率.

分析：本题也属几何概型，设三段线段长分别为边 1，边 2，边 3. 设由于三边之和为 a，故不妨令：边 $1=x$，边 $2=y$，边 $3=a-x-y$，则其基本事件集为

$$\{(x,\ y)\mid 0<x<a,\ 0<y<a,\ 0<a-x-y<a\},$$

其中第三个不等式可化为 $0<x+y<a$. 由于涉及 x，y 的二维平面集合，故相应的几何度量应为面积，从而基本事件集的几何度量为$\triangle AOB$ 的面积 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}a^2$.

为考虑有利事件集，注意到要构成三角形，必须要求二边之和大于第三边，例如：(边 1)＋(边 2)＞(边 3)，用 x，y 表示即 $x+y>a-(x+y)$，从而知 $x+y>\left(\frac{a}{2}\right)$，而由前面条件 $0<x+y<a$ 又知 $a>x+y>\left(\frac{a}{2}\right)$，从而对 (边 3) $=a-(x+y)$ 必须成立关系 $0<a-(x+y)<\left(\frac{a}{2}\right)$；边 1，边 2 也具有类似的关系式，即 $0<x<\left(\frac{a}{2}\right)$，$0<y<\left(\frac{a}{2}\right)$，

由它们的交集可找到有利事件集△DCE(图 1-3)，而其面积 $S_{\triangle DCE}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2$，最后利用几何概型计算概率.

解：设所取两点将长度为 a 的线段分成三段长度分别为：x, y, $a-x-y$, 则其基本事件集为

$\{(x,\ y)\mid 0<x<a,\ 0<y<a,\ 0<a-x-y<a\}$,

其中第三个不等式等价于 $0<x+y<a$, 从而基本事件集的几何度量为△AOB 的面积 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}a^2$.

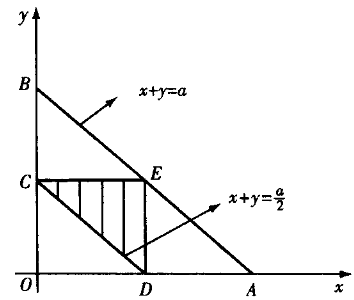

图 1-3

考虑有利事件集，注意到三段线段要构成三角形，要求任意二线段长度之和大于第三线段的长度，于是有：$x+y>a-(x+y)$, $x+a-(x+y)>y$, $y+a-(x+y)>x$, 整理得：

$$x+y>\left(\frac{a}{2}\right),\ 0<x<\left(\frac{a}{2}\right),\ 0<y<\left(\frac{a}{2}\right),$$

由它们的交集得到有利事件集的几何度量为△DCE 的面积 $S_{\triangle DCE}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

$$\text{概率为 } p=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle DCE}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{2}}=\frac{1}{4}.$$

【例 10】 从[0, 1]中随机取两个数，求下列事件的概率 a)两数之和小于$\frac{6}{5}$, b)两数之积小于$\frac{1}{4}$,c)以上两条件同时满足.

解：本问题属几何概型，设 x, y 表示从[0, 1]中取出的两个数，考虑二维平面集合 $\Omega=\{(x,\ y):0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$，此时相应的几何度量应为正方形的面积，$L(\Omega)=1$.

a) 设事件 A 表示“两数之和小于$\frac{6}{5}$”,

则 A 为 $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $x+y<\frac{6}{5}$ 的交集(图 1-4)，所以由几何概率公式

$$P(A)=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\right)}{1}=\frac{17}{25}.$$

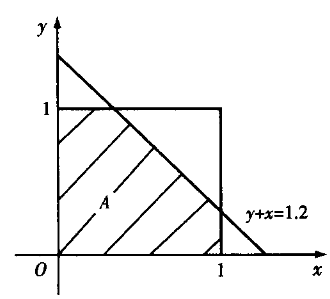

图 1-4

b) 设事件 B 表示“两数之积小于$\frac{1}{4}$”,