21世纪高等院校优秀教材

小波分析

梁学章　何甲兴　王新民　李强　编著

国防工业出版社

http://www.ndip.cn

图书在版编目(CIP)数据

小波分析/梁学章等编著. 一北京:国防工业出版社,
2005.1

ISBN 7-118-03710-9

Ⅰ.小... Ⅱ.梁... Ⅲ.小波分析 Ⅳ.0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 119094 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 12¼ 216 千字

2005 年 1 月第 1 版 2005 年 1 月北京第 1 次印刷

印数:1—4000 册 定价:20.00 元

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

前　言

小波分析是近20年来迅猛发展起来的一门新兴的学科，已被广泛应用于数值分析、信号处理、图像处理、量子理论、地震勘探、语音识别、计算机视觉、CT成像、机械故障诊断等领域。小波分析具有重要的理论价值和实际应用价值，是众多学科共同关注的热点。现在它已成为各相关领域的专家和技术人员必须掌握的一种重要数学方法。

本书是作者在总结多年小波分析教学和科研经验的基础上编写而成的。在编写过程中除了参考目前已有的小波分析方面的教材和专著外，还注意跟踪当前小波分析的理论和应用研究前沿，反映小波分析研究的最新进展。

本书系统介绍了小波分析的基本内容，包括小波标架，一元正交小波，双正交小波及小波包，二元张量积小波的构造方法、性质、算法及其应用等。鉴于目前已有教材中对多小波和非张量积型二元小波的介绍太少，我们还对多小波和二元Box-样条小波进行了专门的介绍。

本书不仅注重小波分析的基本思想、基本理论和基本方法的讲解，也注重结合实际应用。本书内容通俗易懂，适合作为理工科高年级本科生和研究生相关专业课程的教材，同时也可作为有关工程技术人员的参考用书。

由于作者水平有限，书中不妥与错误疏漏之处在所难免，敬请广大读者与同行批评指正。

编者

2004年11月

目　　录

第 1 章　绪　论

1.1　小波分析的由来及发展

小波分析的发展历史最早可追溯到 1910 年 Haar 提出的小波规范正交基，不过当时还没有“小波”这个概念。20 世纪 30 年代，Littlewood 和 Paley 对 Fourier 级数建立了二进制频率分量分组理论（L－P 理论），这是多尺度分析思想的最早来源。1946 年，Gabor 提出的窗口 Fourier 变换（也称短时 Fourier 变换）对弥补 Fourier 变换的不足起到了一定的作用。后来 Calderon，Zygmund，Stein 和 Weiss 等人将 L－p 理论推广到高维，并建立了奇异积分算子理论。1965 年，Calderon 给出了再生公式。1974 年，Coifmann 对 Hardy 空间 H^p 给出了原子分解。1975 年，Calderon 用他早先提出的再生公式给出了 H^1 的原子分解，这一公式已成为许多函数分解的出发点，它的离散形式已接近小波展开，只是还没得到组成一正规正交系的结论。1981 年，Strömberg 对 Haar 系进行了改进，构造了一组具有指数衰减且有限次连续可微的正交基，这些工作为小波分析奠定了基础。1984 年，Morlet 在分析地震波的局部性时，发现传统的 Fourier 变换不具有时—频局部性，很难达到实际需要，因此他首先提出了小波分析（Wavelet Analysis）这一概念，并把它用于信号分解中。随后，Grossman 对 Morlet 的方法进行了研究。

真正的小波热开始于 1985 年。当时 Meyer 创造性地构造出了一个具有一定衰减性的光滑函数 $\psi(x)$，其二进制伸缩和平移生成的函数系 $\{\psi_{j,k}(x):=2^{j/2}\psi(2^jx-k);j,k\in Z\}$ 构成了 $L^2(R)=\{f(x)$ 可测；$\int_R|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty\}$ 的规范正交基，后来被称为 Meyer 基，这对小波分析的发展起到了非常重要的作用。1988 年，Mallat 提出了多分辨率分析（Multiresolution Analysis）的概念，在统一在此之前的 Strömberg，Meyer，Lemarie 和 Battle 工作的基础上，给出了构造正交小波基的一般方法。Mallat 受金字塔算法的启发，以多分辨率分析为基础，提出了著名的快速小波变换算法——Mallat 算法（Fast Wavelet Transform），这是小波理论的突破性成果，其作用和地位相当于 Fourier 分析中的 FFT 算法。1988 年，Daubechies 构造出了具有紧支集的光滑正交小波基——Daubechies 紧支集正交小波基，这种小波得到了广泛的应用。1989 年，作为正交小波基的推广，Coifmann，Meyer 和 Wickerhauser 等又引入了正交小波包的概念。1990 年,崔锦泰和王建忠构造了基于样条函数的所谓半正交小波函数(semi - wavelet),并讨论了具有最好局部性的多尺度分析的生成函数及相应的小波函数。1991 年,Goodman,Lee 和 Tang 给出了多小波的概念,即尺度函数和小波可由多个函数构成。随后,Geronimo,Hardin,Donovan 和 Massopust 给出了用分形函数构造多小波的方法和例子。Micchelli 和 Xu 给出了构造区间上的不连续正交多小波的一般方法。Cohen,Daubechies 和 Vial 讨论了利用直线上的 Daubechies 小波改造成有限区间上的小波的方法。1992 年,Cohen,Daubechies 和 Feauveau 给出了紧支集双正交小波的构造方法。多小波和双正交小波克服了正交单小波的一些缺点,可使小波同时兼顾更多的实际应用中需要的性质。另外,Meyer,S. L. Lee,G. Plonka 和陈翰麟等人的重要工作推动了周期小波的发展。

目前,小波分析的理论和应用都得到了迅猛的发展,被广泛应用于数值分析、信号处理、图像处理、量子理论、地震勘探、语音识别、计算机视觉、CT 成像、机械故障诊断等领域,已成为众多学科共同关注的热点。

1.2 预备知识

1.2.1 常用记号

R: 表示全体实数的集合;

R^+:表示全体非负实数的集合;

R^n: 表示 n 维欧氏空间;

C: 表示全体复数集合;

Z: 表示全体整数集合;

Z_+:表示全体非负整数集合;

Z^2: 表示实平面上全体整数点的集合;

N: 表示全体正整数集合。

1.2.2 Banach 空间与 Hilbert 空间

定义 1.2.1 设 X 为一个集合,如果对任意的 $x,y,z\in X$,恒成立

(1) $d(x,y)\geq 0$,且 $d(x,y)=0$ 等价于 $x=y$;

(2) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$,

则我们把 d 称为距离函数,(X,d)称为距离空间。

定义 1.2.2 如果对$\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$,使得当 $m, n > M$ 时有 $d(x_m, x_n) < \varepsilon$,我们把距离空间$(X, d)$中的序列$\{x_n\}$称为 Cauchy 序列。

定义 1.2.3 如果距离空间(X, d)中的每个 Cauchy 序列都收敛到 X 中的点,则称距离空间(X, d)是完备的。

定义 1.2.4 如果:

1) E 内定义了“+”运算,使得对任意的 $x, y \in E$ 有

(1) $x + y = y + x \in E$;

(2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

(3) 存在 $\theta \in E$,使得 $x + \theta = x$;

(4) 对任意 $x \in E$,存在 $-x \in E$, 使得 $x + (-x) = \theta$,

2) E 内订义了数乘运算,使得对任意的 $x, y \in E$ 及数$\alpha, \beta \in K$(实或复数域)有

(1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \in E$;

(2) $1 \cdot x = x$, $0 \cdot x = 0$;

(3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

(4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

则集合 E 称为实(复)线性空间。

定义 1.2.5 设 X 是数域K 上的线性空间,对于 $x \in X$, $\| x \|$ 对应于一个非负实数,且对任意 $x, y \in X$, $\alpha \in K$,都有

(1) $\| x \| = \theta$ 等价于$x = \theta$;

(2) $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|$;

(3) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$,

称$\| x \|$为 x 的范数,称$(X, \| \cdot \|)$为线性赋范空间。

显然,线性赋范空间也是距离空间。

定义 1.2.6 完备的线性赋范空间称为 Banach 空间。

定义 1.2.7 设 X 为数域K(实数域或复数域)上的线性空间,对 $f, g \in X$,$\langle f, g \rangle$对应于一个复数,对任意 $\alpha, \beta \in K$ 满足

(1) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$;

(2) $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$;

(3) $\langle f, f \rangle \geqslant 0$,且$\langle f, f \rangle = 0$ 等价于 $f = 0$,

称$\langle f, g \rangle$为 f 与 g 的内积。我们把引入了内积的线性空间称为内积空间。若 X 为内积空间,$x \in X$,定义其范数:$\| x \| = (\langle x, x \rangle)^{1/2}$,则显然 X 还是一个线性赋范空间。完备的内积空间称为 Hilbert 空间。

内积空间中的范数和内积之间有如下等价关系：

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\} \tag{1.1}$$

1.2.3 Lebesgue 积分理论

定理 1.2.1(Fatou) 设可测函数 $f_n(x)\geqslant 0, f_n(x)\to f(x), a.e.$，则

$$\int_R f(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to+\infty}\int_R f_n(x)\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

这里 $\varliminf_{n\to+\infty}\alpha_n = \lim_{n\to+\infty}\{\inf_{k\geqslant n}\alpha_k\}$。

定理 1.2.2(控制收敛定理) 设可测函数 $f_n(x)\to f(x)\ a.e.$，$|f_n(x)|\leqslant g(x)$，$\int_R g(x)\mathrm{d}x < \infty$，则 $f(x)$ 的积分存在，并且

$$\int_R f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_R f_n(x)\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

定理 1.2.3(Fubini) 设可测函数 $f(x,y)$ 满足 $\int_{R^2}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$，则

$$\iint_{R^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_R \mathrm{d}x\int_R f(x,y)\mathrm{d}y = \int_R \mathrm{d}y\int_R f(x,y)\mathrm{d}x \tag{1.4}$$

设 $f(x)$ Lebesgue 可测，对于每个 $p, 1\leqslant p\leqslant\infty$，我们令

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left\{\int_R |f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in R}|f(x)|, & p=\infty \end{cases} \tag{1.5}$$

记

$$L^p(R) = \{f(x)\text{Lebesgue 可测}\mid \|f\|_p < \infty\} \tag{1.6}$$

则可以证明，$L^p(R), 1\leqslant p\leqslant\infty$ 是 Banach 空间。对于任何的 $f\in L^p(R)$，称 $\|f\|_p$ 为 f 的 $L^p(R)$ 范数。进一步可以证明 $L^p(R)$ 范数有如下性质：

(1) $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$(Minkowski 不等式)；

(2) $\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_{p(p-1)^{-1}}$(Holder 不等式)；

其中 $p=\infty$ 时，$p(p-1)^{-1}$ 用 1 代替。特别地，当 $p=2$ 时有：

(3) $\|fg\|_1\leqslant\|f\|_2\|g\|_2$(Schwarz 不等式)。

在 $L^2(R)$ 中我们令

$$\langle f,g\rangle = \int_R f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x,\ \forall f,g\in L^2(R) \tag{1.7}$$

则可以证明：$\langle\cdot,\cdot\rangle$定义了一个内积，并且赋予了此内积的 $L^2(R)$构成了一个 Hilbert 空间。显然有 $\|f\|_2=\langle f,f\rangle^{1/2}$。

设 $f(x)$Lebesgue 可测，对于每个 p，$1\leqslant p\leqslant\infty$，我们令

$$\|f\|_{L^p(0,2\pi)}:=\begin{cases}\left\{\int_0^{2\pi}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty\\ \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|f(x)|, & p=\infty\end{cases}\tag{1.8}$$

记

$$L^p(0,2\pi)=\{f(x)\text{ 为以 }2\pi\text{ 为周期的 Lebesgue 可测函数}\mid \|f\|_{L^p(0,2\pi)}<\infty\}\tag{1.9}$$

则我们可以证明，$L^p(0,2\pi)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$ 是 Banach 空间。对于任何的 $f\in L^p(0,2\pi)$，我们称 $\|f\|_{L^p(0,2\pi)}$为 f 的 $L^p(0,2\pi)$范数，简记为 $\|f\|_p$。我们可以证明此范数亦满足前面的 Minkowski，Holder 和 Schwarz 不等式。类似于 $L^2(R)$，我们在 $L^2(0,2\pi)$中也可以定义内积

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi}f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x,\ \forall f,g\in L^2(0,2\pi)\tag{1.10}$$

并且定义了此内积的 $L^2(0,2\pi)$构成了一个 Hilbert 空间。

另外，对于序列$\{c_k\}_{k\in Z}$，我们令

$$\|\{c_k\}\|_{l^p}:=\begin{cases}\left\{\sum_{k\in Z}|c_k|^p\right\}^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty\\ \sup_{k\in Z}|c_k|, & p=\infty\end{cases}\tag{1.11}$$

记

$$l^p(Z)=\{\{c_k\}_{k\in Z}\mid \|\{c_k\}\|_{l^p}<\infty\}\tag{1.12}$$

则可以证明，$l^p(Z)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，是 Banach 空间。对于任何的$\{c_k\}_{k\in Z}\in l^p(Z)$，称$\|\{c_k\}\|_{l^p}$为$\{c_k\}_{k\in Z}$的 l^p 范数，简记为$\|\{c_k\}\|_p$。我们可以证明此范数亦满足相应的 Minkowski，Holder 和 Schwarz 不等式。类似地，我们在 $l^2(Z)$中定义内积

$$\langle\{c_k\},\{d_k\}\rangle=\sum_{k\in Z}c_k\bar{d}_k,\ \forall\{c_k\},\{d_k\}\in l^2(Z)\tag{1.13}$$

并且定义了此内积的 $l^2(Z)$亦为一个 Hilbert 空间。

第 2 章　连续小波变换

2.1　Fourier 级数与 Fourier 变换

若 $f(x)\in L^2(0,2\pi)$，即 $f(x)$ 是以 2π 为周期的 $(0,2\pi)$ 上平方可积的函数，则有 Fourier 级数展开

$$f(x) = \sum_{n\in Z} c_n e^{inx} \quad (\text{平方平均收敛})$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx, n \in Z \tag{2.1}$$

并且有 Parseval 公式成立

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in Z} |c_n|^2 \tag{2.2}$$

若 $f(x)\in L^1(R)$，我们定义其 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\omega) = \int_R f(x)e^{-i\omega x}dx \tag{2.3}$$

并且若更有 $\hat{f}(\omega)\in L^1(R)$，$f(x)$ 在点 x 处连续，则下面 Fourier 逆变换公式成立：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_R \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega \tag{2.4}$$

对 $L^2(R)$ 中函数的 Fourier 变换可以这样定义：由 $L^1(R)\cap L^2(R)$ 在 $L^2(R)$ 是稠的，故可把 $L^1(R)$ 上 Fourier 变换的定义保范扩张到 $L^2(R)$ 上。即对 $\forall f(x)\in L^2(R)$，定义其 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\omega) = \mathscr{L}\mathrm{im}_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(x)e^{-i\omega x}dx \quad (\text{平方平均收敛}) \tag{2.5}$$

由 Plancherel 定理知上述定义有意义，并且成立反演公式：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{L}\mathrm{im}_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega \quad (\text{平方平均收敛}) \tag{2.6}$$

对 $f(x),g(x)\in L^2(R)$，下面 Parseval 公式成立

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\langle\hat{f},\hat{g}\rangle$$

Fourier 变换对于平移不变线性系统进行频谱分析是很方便的，因为一个平移不变线性系统可以用卷积来表示：

$$g(x)=\int_R h(x-u)f(u)\mathrm{d}u=h*f(x)$$

由 Fourier 变换的性质有 $\hat{g}(\omega)=\hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega)$，即积分运算化成了其 Fourier 变换的乘法运算。显然，研究 $\hat{f}(\omega)$ 与 $\hat{g}(\omega)$ 之间的关系要比直接研究 $f(t)$ 与 $g(t)$ 之间的关系简单。但对于非平移不变线性系统，Fourier 变换用起来不一定很方便，即便是平移不变线性系统，由 Fourier 变换的定义可以看出，$\hat{f}(\omega)$ 与 $\hat{g}(\omega)$ 取决于 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在整个实轴上的整体性质。因此，不能反映信号在局部时间范围内的特征。而在许多实际问题中，我们恰好关心信号的局部特征，这也是 Fourier 变换的固有缺点。

2.2 窗口 Fourier 变换

设 $f(x)\in L^2(R)$，为研究 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的频谱特征，一个自然的想法就是先用区间 $[a,b]$ 上的特征函数 $\chi_{[a,b]}(x)$ 乘以 $f(x)$，即先对 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上进行截断，再对 $\chi_{[a,b]}(t)f(x)$ 进行 Fourier 变换。但由于 $\chi_{[a,b]}(x)$ 在 $x=a,b$ 两点出现间断，因此可能会导致 $\chi_{[a,b]}(x)f(x)$ 出现 $f(x)$ 不应有的间断，这会给 $\hat{f}(\omega)$ 附加新的高频成分。

1946 年，Gabor 引进了窗口 Fourier 变换的概念，他的做法是引进一个光滑的函数 $g(x)$（称之为窗口函数），以及参数 b（可以自由选取），通过 $g(x-b)f(x)$ 的 Fourier 变换来灵活反映 $f(x)$ 的局部性质。

定义 2.2.1 若函数 $g(x)\in L^2(R)$，并且 $xg(x)\in L^2(R)$，$\|g\|=1$，则称 $g(x)$ 为窗口函数。

设 $g(x)$ 为一个窗口函数，我们定义其窗口中心 x_g^* 和窗口宽度 Δ_g 分别为

$$x_g^*=\int_R x|g(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\Delta_g=\left\{\int_R(x-x_g^*)^2|g(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2}$$

定义 2.2.2 对于 $f(x)\in L^2(R)$，定义其窗口 Fourier 变换为

$$Gf(\omega,b)=\int_R\overline{g(x-b)}f(x)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x \tag{2.7}$$

显然，$Gf(\omega,b)$反映了$f(x)$在时间窗$[x_g^*+b-\Delta_g, x_g^*+b+\Delta_g]$上的局部信息，该窗也称为$Gf(\omega,b)$的依赖域。

由于

$$
\begin{aligned}
(e^{i\omega x}g(x-b))^{\wedge}(\xi) &= \int_R g(x-b)e^{i\omega x}e^{-i\xi x}dx = \\
&\int_R g(x-b)e^{-i(\xi-\omega)x}dx = \\
&e^{-i(\xi-\omega)b}\int_R g(x)e^{-i(\xi-\omega)x}dx = \\
&e^{-i(\xi-\omega)b}\hat{g}(\xi-\omega)
\end{aligned}
$$

由 Parseval 公式及式(2.7)有

$$
Gf(\omega,b) = \frac{1}{2\pi}\int_R \overline{\hat{g}(\xi-\omega)}\hat{f}(\xi)e^{i(\xi-\omega)b}d\xi \tag{2.8}
$$

若进一步有$\omega\hat{g}(\omega)\in L^2(R)$，我们定义$\hat{g}(\omega)$的中心和宽度如下：

$$
\omega_{\hat{g}}^* = \frac{1}{2\pi}\int_R \omega\,|\hat{g}(\omega)|^2 d\omega
$$

$$
\Delta_{\hat{g}} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_R(\omega-\omega_{\hat{g}}^*)^2|\hat{g}(\omega)|^2 d\omega\right\}^{1/2}
$$

则由式(2.8)可知，$Gf(\omega,b)$还反映了$f(x)$在频率窗$[\omega_{\hat{g}}^*+\omega-\Delta_{\hat{g}}, \omega_{\hat{g}}^*+\omega+\Delta_{\hat{g}}]$上的局部信息。

另外，我们希望窗口尽可能的小，这样$Gf(\omega,b)$才能更灵敏地反映出$f(x)$和$\hat{f}(\xi)$的变化来。但实际上，Δ_g和$\Delta_{\hat{g}}$不可能同时都任意小。关于这点，有如下的 Heisenberg 测不准原则。

定理 2.2.1 设$g(x)\in L^2(R)$为R上的几乎处处可微的窗函数，并且$g'(x)\in L^2(R)$，则$\Delta_g\Delta_{\hat{g}}\geqslant\frac{1}{2}$。

证明 我们只就$x_g^*=\omega_{\hat{g}}^*=0$的情形给予证明。一般的情形读者可作为练习来证明。

此时应用 Schwarz 不等式可知

$$
\begin{aligned}
(\Delta_g\Delta_{\hat{g}})^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_R|xg(x)|^2dx\int_R|\omega\hat{g}(\omega)|^2d\omega = \\
&\int_R|xg(x)|^2dx\int_R|g'(x)|^2dx \geqslant
\end{aligned}
$$

$$\left(\int_R |xg(x)\overline{g'(x)}|\,\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant$$

$$\left(\frac{1}{2}\int_R (xg(x)\overline{g'(x)} + x\overline{g(x)}g'(x))\mathrm{d}x\right)^2 =$$

$$\frac{1}{4}\left(\int_R x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2$$

下面我们只需证明 $\left|\int_R x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|g(x)|^2\mathrm{d}x\right| = 1$ 即可。

由于$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x|g(x)|^2) = g(x)\overline{g(x)} + xg'(x)\overline{g(x)} + xg(x)\overline{g'(x)} \in L^1(R)$，而 $x|g(x)|^2 = \int_0^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t|g(t)|^2)\mathrm{d}t$，故 $\lim\limits_{|x|\to\infty} x|g(x)|^2$ 存在。又 $x|g(x)|^2 \in L^1(R)$，从而 $\lim\limits_{|x|\to\infty} x|g(x)|^2 = 0$，故

$$\left|\int_R x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|g(x)|^2\mathrm{d}x\right| = \left|x|g(x)|^2\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_R |g(x)|^2\mathrm{d}x\right| = 1$$

定理证完。

请读者试证明：$g(x)$取 Gaussian 分布时，有 $\Delta_g\Delta_{\hat{g}} = \frac{1}{2}$。

下面讨论窗口 Fourier 变换的性质。

定理 2.2.2 设 $g(x)$是一个窗口函数，$f(x)\in L^2(R)$，则其窗口 Fourier 变换 $Gf(\omega,b)\in L^2(R^2)$，并且对任何的 $h(x)\in L^2(R)$都有

$$\iint_{R^2} Gf(\omega,b)\overline{Gh(\omega,b)}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}b = 2\pi\int_R f(x)\overline{h(x)}\mathrm{d}x \tag{2.9}$$

证明 由 $f, g\in L^2(R)$及

$$\iint_{R^2} |f(x)g(x-b)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}b =$$

$$\int_R |f(x)|^2\int_R |g(x-b)|^2\mathrm{d}b\mathrm{d}x =$$

$$\int_R |f(x)|^2\mathrm{d}x = \|f\|^2 < \infty$$

则由 Fubini 定理可知，对几乎所有的 $b\in R$，函数 $f(x)\overline{g(x-b)}$关于 x 是平方可积的，故 $Gf(\omega,b)\in L^2(R)$（因其恰为 $f(x)g(x-b)$关于 x 的 Fourier 变换）。从而由 Parseval 公式得

$$\frac{1}{2\pi}\int_R |Gf(\omega,b)|^2 d\omega = \int_R |f(x)g(x-b)|^2 dx$$

故

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{R^2} |Gf(\omega,b)|^2 d\omega db = \int_R\int_R |f(x)\overline{g(x-b)}|^2 dx db =$$

$$\int_R |f(x)|^2 \int_R |g(x-b)|^2 db dx =$$

$$\int_R |f(x)|^2 < \infty$$

即 $Gf(\omega,b) \in L^2(R^2)$。进而有

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{R^2} Gf(\omega,b)\overline{Gh(\omega,b)} d\omega db =$$

$$\int_R\int_R f(x)\overline{g(x-b)}g(x-b)\overline{h(x)} dx db =$$

$$\int_R f(x)\overline{h(x)}\int_R |g(x-b)|^2 db dx =$$

$$\int_R f(x)\overline{h(x)} dx$$

定理证完。

定理 2.2.3 设 $g(x)$是窗口函数,$f(x) \in L^2(R)$,则窗口 Fourier 逆变换公式成立。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\iint_{R^2} Gf(\omega,b)g(x-b)e^{i\omega x} d\omega db \tag{2.10}$$

证明

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{R^2} Gf(\omega,b)g(x-b)e^{i\omega x} d\omega db =$$

$$\int_R f(x)\overline{g(x-b)}g(x-b) db =$$

$$f(x)\int_R |g(x-b)|^2 db = f(x)$$

定理证完。

2.3 连续小波变换

定义 2.3.1 如果函数 $\psi(x)\in L^2(R)$满足容许条件

$$C_\psi = \int_R \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega < +\infty$$

且满足规范化条件 $\|\psi\| = 1$,则称 $\psi(x)$为基本小波。

若更设 $\hat{\psi}(\omega)$在点 $\omega = 0$ 连续,则由容许条件得

$$\int_R \psi(x)\mathrm{d}x = \hat{\psi}(0) = 0$$

也就是说 $\psi(x)$必是有正有负的振荡的波形,使得其均值为零。这也是称其为小波的原因。

定义 2.3.2 设 $f(x)\in L^2(R)$,$\psi(x)$为基本小波,$a,b\in R$,定义 $f(x)$的连续小波变换为

$$Wf(a,b) = \int_R f(x)\,|a|^{1/2}\,\overline{\psi(a(x-b))}\mathrm{d}x \tag{2.11}$$

由于

$$(|a|^{1/2}\psi(a(x-b)))^\wedge(\omega) = |a|^{-1/2}\hat{\psi}\left(\frac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega b} \tag{2.12}$$

则由 Parseval 公式,式(2.11)又可写为

$$Wf(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_R \hat{f}(\omega)\,|a|^{-1/2}\,\overline{\psi\left(\frac{\omega}{a}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega b}\mathrm{d}\omega \tag{2.13}$$

若更有 $\psi(x)$及 $\hat{\psi}(\omega)$均为窗口函数,设其窗口中心和窗口宽度分别为 x_ψ^*,Δ_ψ及$\omega_{\hat{\psi}}^*$,$\Delta_{\hat{\psi}}$,则由式(2.11)和式(2.13)知,$Wf(a,b)$反映了信号 $f(x)$在时—频分析窗$\left[x_\psi^* + b - \frac{\Delta_\psi}{a}, x_\psi^* + b + \frac{\Delta_\psi}{a}\right]\times[\omega_{\hat{\psi}}^* - a\Delta_{\hat{\psi}}, \omega_{\hat{\psi}}^* + a\Delta_{\hat{\psi}}]$内的局部信息。故其分析窗具有自适应性。

一般说来,满足容许条件的 $\psi(x)$便可以作为基本小波了。但实际上我们一般还要求 $\psi(x)$具有一定的正则条件,以便 $\hat{\psi}(\omega)$在频域上表现出较好的局部性。为此,要求 $\psi(x)$具有一定的消失矩性质,即

$$\int_R x^p\psi(x)\mathrm{d}x = 0,\ p = 1,2,\cdots,n$$

此条件等价于