



蜗牛科学系列

轻松解读科学奥秘

微积分超入门

如果一开始就能把握对微积分的基本认识，

你会发现不用记忆太多的公式，

思考问题的方法却变得越来越简单。

保证谁都能理解它，谁都会觉得有趣，

在体验其乐趣和奥妙的同时，慢慢习惯用它来思考问题吧！

〔日〕平野叶一 著 乔颖 译



世界图书出版公司

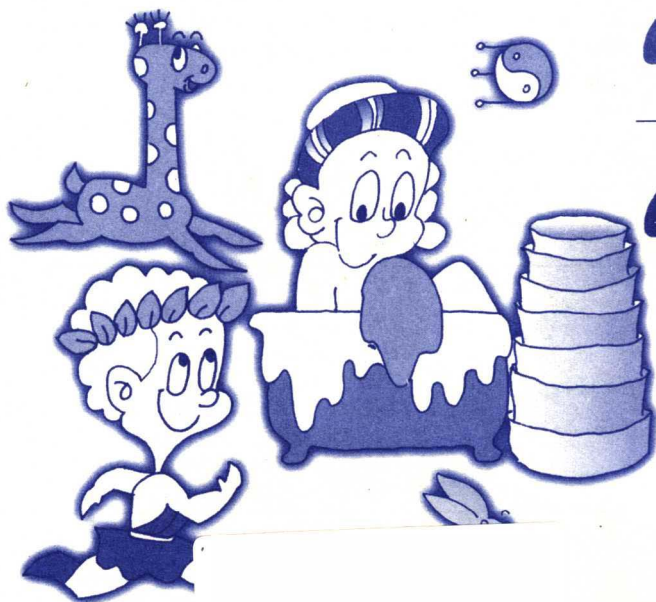
0172
148

蜗牛科学系列

轻松解读科学奥秘

微积分超入门

〔日〕平野叶一 著 乔颖 译


$$\frac{dy}{dx}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

世界图书出版公司
上海·西安·北京·广州

图书在版编目(CIP)数据

轻松解读科学奥秘:微积分超入门 / (日)平野叶一著;乔颖译.
—上海:上海世界图书出版公司,2005.2

(蜗牛科学系列)

ISBN 7-5062-6866-3

I. 轻... II. ①平... ②乔... III. ①微分—普及读物②积分—普及读物 IV. O172-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 000458 号

TITLE: [エスカルゴサイエンス 微分と積分超入門]

by [平野葉一]

Copyright © Y. Hirano, Japan, 2001, 3rd Printing 2002

Original Japanese language edition published by NIPPON JITSUGYO PUBLISHING CO., LTD.

All rights reserved, including the right to reproduce this book or portions thereof in any form without the written permission of the original publisher.

Chinese translation rights arranged with NIPPON JITSUGYO PUBLISHING CO., LTD., through Nippon Shuppan Hanbai Inc. Tokyo, Japan.

轻松解读科学奥秘

——微积分超入门

[日]平野叶一 著 乔颖 译

上海世界图书出版公司 出版发行

上海市尚文路 185 号 B 楼

邮政编码 200010

上海景皇文化发展有限公司排版

上海市印刷十厂有限公司印刷

如有印装质量问题,请与印刷厂联系

(质检科电话:021-65414992)

各地新华书店经销

开本: 890 × 1240 1/32 印张: 5.125 字数: 140 000

2005 年 2 月第 1 版 2005 年 2 月第 1 次印刷

印数: 1-8 000

ISBN 7-5062-6866-3/O·26

图字号:09-2004-159

定价: 15.00 元

<http://www.wpcsh.com.cn>

《蜗牛科学系列》序

钟启泉

自20世纪60年代以来,随着新科技革命的狂飙突进,人类社会的生活方式以及人的精神世界和价值观念都发生了巨大的变革。科学不仅改变了人类认识世界的思维方式,更把人类生活中某些陈腐不堪的行为习惯和落后观念扫进了历史的垃圾堆或贮存于历史的博物馆。当人类跨入21世纪的门槛时,科学的发展更是日新月异:一方面,知识的高度分化使各门自然科学的分支学科在各自独立的领域内不断地实现着一系列重大的突破;另一方面,社会生活的日益复杂化迫使各门学科不断地走向融合,跨学科的整合已成为时代发展的必然趋势。科学在当代社会生活中所产生的举足轻重的影响以及科学的新发展迫使世界各国十分重视科学教育和科普工作。如何使青少年一代拥有广博的科技知识,掌握精确的科研方法,具有理性的科学精神成为摆在教育界、科技界和出版界面前的一个极为紧迫的时代课题。为解决这一课题,世界各国除大力进行科技教育之外,还不遗余力地进行科普宣传工作,出版了大量优秀的科普读物,如《第一推动丛书》《世界科学大师丛书》《剑桥文丛》《时间简史》等,这些科普读物以其形式多样、内容丰富、主题新颖而备受广大学生与公众的青睐。

科学知识作为一种巨大的社会力量,其本身价值何以体现,主要取决于它被传播和应用的广度与深度。科普读物正是传播科学的一个重要的载体,它以其独特的传播功能成为沟通科学与大众的桥梁,缩短了两者之间的距离。当科普读物作用于不同层次的读者时必然对他们的科学知



识、科学方法和科学精神产生深刻的影响。由于科普读物在传播科学知识、宏扬科学精神、进行科学教育方面所具有的不可替代的功能,我国出版界近年来出版了一批科普读物,旨在帮助人们及时地跟上科学发展的步伐、了解科技发展的最新动态、掌握现代社会所必须的科技知识。但在众多的科普读物中真正优秀的出版物却极为少见,而面向青少年的高质量的科普读物更是凤毛麟角。从已出版的一些科普读物来看,主要存在以下几个缺陷:其一,内容陈旧。所选内容老化,停留于常识性和已过时的一些知识,不能及时反映科学研究的最新成果,从而使公众失去了对科学的敏感性。其二,立意不高。喋喋不休于科学知识的介绍,而忽视科学探究欲的激发以及科学方法的启迪,导致公众对单调刻板的“科学知识”失去了兴趣。其三,风格乏味。在写作风格和编写方式上,以冰冷僵硬的语言进行说教,以居高临下的口气进行指导,以空洞苍白的排版呈现内容,令读者读起来就如喝着白开水一样,枯燥乏味,又如听冗长沉闷的报告一样,昏昏欲睡。

优秀的科普读物有责任把科学发展的最新动态和最新的科研成果及时地介绍给读者,使公众自始至终保持着对科学的敏感,也有责任把科学的最新发展所引发的人们日常生活的变化及时地向公众进行通报,使公众始终保持着对科学的兴趣。与此相应的是,负责任的出版社应把出版优秀的科普读物视为自己义不容辞的职责,及时地向公众推出高质量、有价值,为读者所喜闻乐见的科普读物。鉴于我国目前面向公众的科普读物质量不高以及面向青少年学生的优秀科普读物尚不多见的现状,上海世界图书出版公司译介出版了这套科普读物,以青少年学生作为主要阅读对象,兼顾有一定阅读能力的大众。本套丛书致力于在中学生中普及最新科学知识,弘扬符合时代主题的科学精神并试图打破学科界限,谋求学科知识的整合,弥合长期的文理分科所造成的知识裂痕。这样,既可以



克服理科学专业所学专业过难且极枯燥的弊病,又可以为文科学生打开一扇学习科普知识的天窗。

本套科普读物以传播基本的科学原理和最新的科学知识为己任,它所涉及的科学领域既包括数学、微积分、概率统计、物理学、生物学、化学等学科的基本原理,也引入了生化学、遗传学、病理学等新兴学科的最新研究成果。其内容从微观到宏观,从物质科学到生命科学,几乎涵盖了自然科学的所有领域。更为难能可贵的是,为了帮助读者理解基本的科学原理,丛书的作者采用了通俗易懂的语言、妙趣横生的画面和精美别致的图表,这样,即使是非专业的学生读起来,也不会有太大的困难。本套丛书的作者大多是日本知名大学的资深教授,他们驾御文字的功底极为深厚,他们的行文往往若行若止、曲折逶迤,令人回味无穷。大手笔的科普作家能够把音乐创作的方法与激情融入到科普写作中,从而使撰写出来的文章诙谐而不失庄重,幽默而不失严谨,轻松而不失深沉。

本套科普读物将把读者引入一个色彩斑斓、绚丽芬芳的科学世界,读者置身于其中如同在碧草蓝天的旷野中感受科学之花的芳香;又如在烟波浩淼的海洋中领略知识之源的浩瀚。漫步于科学的芳草地,你可以像婴儿贪婪地吮吸母亲乳汁那样品尝大地母亲盛产的科学果实;泛舟于知识的大海洋,你可以像探险家拼命地揭示世界秘密那样撩开科技神秘的面纱。

相信本套丛书的出版必将为我国科普事业的发展吹进一股清新的春风。

2004.9

(作序者为华东师范大学终身教授,教育部人文社会科学重点研究基地华东师范大学课程与教学研究所所长、教育部社会科学委员会委员)



前 言

大家对“微分与积分”的印象如何呢？

高中生会说：“那是理科生才学的、很难的东西。”大学生抱怨着：“为什么现在文科生也要学！”而父亲们也许会说：“电视上报道说三岁的天才儿童会解微积分呢！”

自从出现“轻数理”的思潮后的很长一段时间，不只是微积分，就是连数学整个儿都开始被排除在大学入学考试之外。因此，对微积分失去了兴趣和关心也是不可避免的。更何况 IT 时代到来的今天，我们常常可以听到“现在是电脑时代，打开教科书哪能看见微积分呀”之类的话。

但是，请等一下。我丝毫不想煞有介事地劝说什么“数学很有用”，“数学中充满了智慧的乐趣”。正是因为，在 IT 时代，这个信息泛滥的多样化的时代，微积分才变得越来越有趣——这也是一个事实。

在这个日益多样化的 21 世纪信息化时代，大家的周围充满了黑匣子——虽然在生活中常常能看见，有的也常能用到，却不知其中的构造。从与银行存款、股价之类相关的经济活动到交通信息、樱花花期等等的休闲情报，21 世纪的现代社会中夹杂着各种微观变化与宏观变化。虽然似乎单击一下互联网就可以解决许多事情，但如果我们知道其中的内情，便可以有更多享受其中乐趣的方法。

说得更专业些的话，世界中充满了图形化、模型化、次序的分析和理论构造等等数学性的思考。而“变化和合并”，即“感知非常细小的变化和趋向”从而“从整体上把握这一变化”，正是微积分最擅长的领域。



本书正如书名所示,是微积分的超入门书。本书的目标读者群是对微积分感兴趣的读者,将要学习微积分的高中生,还有进入大学后必须学习微积分的大学生(如经济系的学生),就职后感觉有必要掌握金融业等领域微积分知识的人……总之,不管过去有无学过微积分,不管现在对微积分是否有印象,即使是“现在有关微积分的认识、想法几乎等于零”,都可以读懂这本书。

和学校教育中的数学稍微有些差别,本书并不是大学入学考试的答题指导也不提供应试技巧。笔者希望的是,通读这本书读者可以轻轻松松地接触微积分,体会拥有 2000 多年历史的微积分思考的乐趣。

在这个日益多样化的信息化社会,我们置身于各种各样的变化之中。我们需要捕捉这些变化,并综合地去理解……因此,有必要掌握微积分的思考方式和相关知识。如果本书能对广大读者愉快地理解世界和社会起到一些帮助的话,将是笔者的莫大荣幸。

平野叶一

2001 年 4 月



目 录

第一章 形象认识微分与积分

- 1 动画——微分与积分的第一印象 / 2
- 2 “连续变化”是怎样的变化 / 4
- 3 平均速度 VS 瞬时速度 / 6
- 4 如何求瞬时速度 / 8
- 5 从地图的面积着手了解积分 / 10
- 6 面积是线段的集合吗 / 12
- 7 微分与积分到底是什么 / 14

专栏 1 《林德纸草书》的数学 / 16

第二章 初探极限世界

- 1 骑士能到达城堡吗
——最大限度的概念 / 18
- 2 $0.99999\dots = 1$ 吗 / 20
- 3 以分数表示循环小数 / 22
- 4 阿喀琉斯能追上乌龟吗 / 24
- 5 极限值 = 收敛 / 26

专栏 2 飞矢不动? / 28

第三章 通往微分之路:曲线的切线

- 1 切线是什么 / 30
- 2 追踪赛车方向 / 32
- 3 圆的弦的极限就是切线 / 34
- 4 曲线尖头部位画不出切线 / 36
- 5 变化的比例 / 38
- 6 平均变化率和弦的斜率 / 40
- 7 瞬间的弦的斜率=切线的斜率 / 42
- 8 “微分系数”是微分的根本原理 / 44
- 9 求出切线的方程 / 46

专栏3 《九章算术》的体积计算 / 48

第四章 有曲线可“微分”

- 1 馒头和函数 / 50
- 2 微分系数太麻烦,使用“导函数”吧 / 52
- 3 微分运算(1)
——二次函数的运算是基础 / 54
- 4 微分运算(2)
——直线和常数的情况 / 56
- 5 使用“微分公式”立刻得出答案 / 58
- 6 微分函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + \dots$ / 60
- 7 记忆更复杂的微分公式 / 62

8 微分练习 / 64

专栏 4 天才关孝和的圆周率 / 66

第五章 掌握微分公式,顺利解题

1 切线的斜率道出了“曲线的形状” / 68

2 曲线的升降

——单调递增与单调递减 / 70

3 局部的最大和最小

——极大值、极小值 / 72

4 通过图表描绘出曲线的大致形状

——掌握函数增减表 / 74

5 判断曲线凹凸的方法

——求二次微分 $f''(x)$ 的正负 / 76

6 懂得增减、极值、凹凸,就可完全掌握图象 / 78

7 三次函数的图象是怎样的 / 80

8 三次函数可以作几条切线 / 82

9 高效制作“滴水槽”的方法 / 84

10 肥皂泡的膨胀速度 / 86

专栏 5 最快的旋轮线曲线 / 88

第六章 积分是微分的逆运算吗

1 求原函数 / 90

2 这就是积分公式 / 92

3 是先积分后微分,还是先微分后积分 / 94

4 从切线的斜率求原来的函数 / 96

5 定积分中“C”消失了 / 98

6 积分练习 / 100

专栏6 通过积分预测“樱花前线” / 102

第七章 掌握积分

1 微小的变化决定全体(1)

——求圆的面积 / 104

2 微小的变化决定全体(2)

——测量侧面的水压 / 106

3 利用定积分计算面积

——曲线所成面积 / 108

4 二次函数所形成的面积 / 110

5 可以将面积认为是“积分的和”吗 / 112

6 求两条曲线围成的区域面积 / 114

7 以定积分求面积

——微积分学的基本定理 / 116

8 体积是面积的和

——阿基米德的主张 / 118

9 卡瓦列里原理

——截面积比一定时,体积比也与之相同 / 120

10 来切切萝卜

——以积分求体积 / 122

11 圆锥的体积公式

——为什么是圆柱体积的三分之一 / 124

12 斜切圆柱所得体积 / 126

13 旋转圆,得到球

——切面总为圆 / 128

专栏7 “微积分的创始人”之间关系恶劣? / 130

第八章 得心应手使用微分与积分

1 用积分求极值的差

——微积分的基本定理的应用 / 132

2 正方形的 n 分之一的面积

——用抛物线 3 等分 / 134

3 年轮形点心(圆柱体)的体积

——“圆柱形薄膜”的集合 / 136

4 求圆环体的体积

——Guldin(古鲁金)定理 / 138

5 削苹果皮

——微分使得“次数”下降 / 140

6 关于微分方程

——用积分来解 / 142

7 苹果自由下落

——推导出万有引力定律 / 144

8 往往返返的距离

——用面积求距离 / 146

9 用“近似计算”快速求解

——利用 $(1+h)^n \approx 1+nh$ / 148

专栏8 微分方程不可解? / 150

第一章

形象认识 微分与积分



请大家回想一下电视和电影上的动画片。画面中的画动了起来,那是为什么呢?

我们画的一幅一幅的画当然是不会动的,正所谓图片。那么,为什么动画看上去是动的呢?那是因为我们以每秒钟几十枚图片的超高速在看它。动画正是由许许多多透明薄板上画成的图片组成的。在每枚图片上画着一点点逐渐变化的动作,当我们以每秒钟几十枚的速度播放这些图片时,整体看上去那画自然就动了起来。

“微小的差异”正是微分积分的奥秘

那么,为什么这动画和微分与积分有关系呢?那是因为微分与积分和“些许变化——微小的变化”有关。所谓微分,正是这“些许变化”。

如下一页的连续两枚图片上所绘,后一枚比起前一枚只是在动作上有了非常微小的变化。

这样,观察动作中的微小变化就是所谓的“微分”。相反,连接一系列的微小变化,使整体顺当地活动起来就是所谓的“积分”。

但是,如果各枚图片间动作上的变化过大,动画的动作就不自然了。因此,为了使动作自然,需要减小各枚图片间的变化。也就是增加每秒钟的图片枚数,即尽量缩小每枚的播放时间。从尽量缩小时间幅度的方面考虑变化,正是微分积分的奥秘。



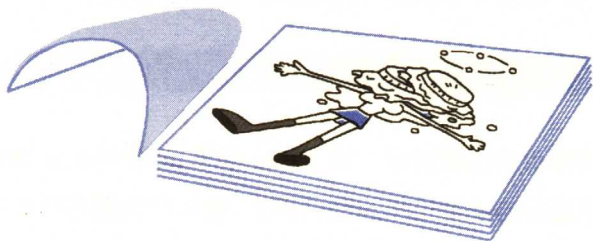
动画的原理

观察某一微小变化=微分



动作上的“些许变化”

连接一系列微小的变化=积分



大家小时候玩过在笔记本上画画的游戏吗？在笔记本的边上画上小人，比如每隔一页改变一点手的动作。这样，快速翻动笔记本时，可以看见那手似乎动了起来。

在对动画的图片的说明中,我们考察了极短时间内的动作变化,那么变化是什么呢?

图 1-1 表示的是邮政包裹的市内邮寄费。从中可知质量每超过 2kg 就要增收邮寄费,而在每 2kg 之内收取相同的费用。即,邮政包裹的邮寄费不是“随质量连续变化”,而是呈阶段性变化。

而图 1-2 表示的是电车从出站起到达下一个车站之间的速度变化。从中可知,电车逐渐提速直至达到时速 80km,之后减速到达 B 站。表中的“连续、顺滑的曲线”表示了电车相对于时间的速度变化。

本处于停止状态的电车驶出后,不可能像包裹邮寄费那样突然地达到时速 80km。即在时速 0km 到 80km 之间车速连续变化(增加),之后,到再次停止为止也呈连续变化(减小)。

微分考虑“连续性变化”

人的动作也是连续变化。从下往上举手,即使是很快速的动作,在一定时间内手进行的也是连续运动。那么,要如何捕捉这样的连续变化呢?动画是通过存在极小时间差的图片描绘这样的连续变化的。也就是,准备这样一些图片,这些图片分别表示以一定的时间差运动着的每个瞬间。

微分也是以类似图片的形式捕捉连续性变化的。也可以说,捕捉连续变化中的瞬间的方法就是微分。