中学教材

标准学案

ZHONGXUE JIAOCAI
BIAOZHUN XUEAN

数学

高二上册

学苑出版社

QIAN YAN 前言

亲爱的中学生朋友：

摆在你们面前的这本全新的教学辅导用书，是一群有实战经验的大朋友为你们在课堂上学好教材而编写的。课堂生活是你们学校生活的最基本构成，它的质量，直接影响着当下及今后你们的多方面发展和成长。请记住：选择一套好的课堂辅助用书，就如选好一个得力的学习“帮手”。

教学是由教与学两个主体的互动来完成的。传统的教辅用书，多以教师为中心，从教师的教出发去编写，忽视了学生作为学习主体的存在。为此，一本完全站在你们的角度，从你们课堂学习需要出发而设计的全新辅导用书——《中学教材标准学案》诞生了。

“学案”，顾名思义就是一种学习方案，它体现了对你们学习过程的规划、学习思路的梳理、学习方法的点拨、学习规律的总结、训练样题的设计。

“标准”，是说这套书内容的组织、材料的选择、流程的设计都是符合你们课堂学习及考试规律的。目前，你们的学习还不是完全独立的，要在教师的指导下进行；学习的内容也不是随意的，而是按照教学大纲精心选择的；课堂学习过程也是有目的、有计划、有组织进行的，不像日常生活可以任意安排。因此，我们在设计这套书时，抱定的宗旨是：与你们的课堂学习生活靠近些、再靠近些；标准些，再标准些。

在正式阅读本书正文之前，请仔细读读下面的阅读地图！

章节标题	
预习导航	以填空、例题、设问、解答等多种方式帮助你预习教材，提取教材关键信息
通解设计	对教材进行逐字逐句逐段的详细解读，讲知识、讲概念、讲思路、讲方法——或是对线索脉络的梳理，或是对概念的阐释与运用，或是对内涵本质的挖掘与联系，或是对记忆、思维技巧的培养和导引。为突出其可操作性，强调的是案例举证式、解剖麻雀式的实例点评，并依据双栏双色设计，体现实例与点评之间的互动
整合全案	重组、综合、迁移教材所学知识，彰显高中学习的归纳意识、综合意识、反省意识、主干知识导学导练意识、试题编制与解析的权威意识、高考资讯的传递意识等
同步达标	高度重视同步性。A级题一看就懂，一做就会；B级题体现创新与应用，略有难度
趣味阅读	选取与本章节相关的有趣的或科技前沿内容，以拓展视野，开发潜智
本章综合测评	提供带有参考答案的规范考卷，进行过程性学习评价
本章习题答案	标明课本上的课后习题的页码及序号
本章高考试题精选	汇集高考名题，提供标准答案，明确考试方向，突出学习重点

考虑到学科特点，以上栏目有的略有不同。

同学们，本学案以你们课堂学习模式为标准，以你们的学习进步为己任，将不遗余力地引领你们走向成功的彼岸。

编　者

2005 年 5 月

MU LU 目录

第六章 不等式

6.1 不等式的性质

预习导航(预习教材,提取教材关键信息)

1. 实数与数轴上的点________.
2. 比较两个实数 a 与 b 的大小,其步骤为:①______;②______;③______.
3. 对于任意的两个实数,若有 $a-b<0$,则有________;若有 $a-b=0$,则有________;若有 $a-b>0$,则有________.
4. 如果 $a>b$,那么________;如果 $b<a$,那么________,即________.用语言描述为:把不等式的左边和右边交换,所得不等式与原不等式________.
5. 如果 $a>b,b>c$,则________.这就是不等式的________性.
6. 如果 $a>b$,则 $a+c>b+c$;反之,若 $a+c>b+c$,则 $a>b$,即 $a>b$ ______ $a+c>b+c$,即不等式两边同加上或减去同一个数,不等号的方向______.
7. 如果 $a>b,c>d$,则 $a+c>b+d$,即同向不等式具备可________性.
8. 如果 $a>b$,且 $c>0$,则 $ac>bc$;如果 $a>b$,且 $c<0$,则 $ac<bc$,即若不等式的两边同乘以一个正数,不等号的方向________;若不等式的两边同乘以一个负数,不等号的方向要________.注意:定理与 c 的符号________关,而与 a、b 的符号________关.
9. 若 $a>b>0$,且 $c>d>0$,则 ac ________ bd;若 $a<c<0$,且 $b<d<0$,则 ac ________ bd.该结论可推广为:若 $a_1>b_1>0,a_2>b_2>0,\cdots,a_n>b_n>0$,则 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n>b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\cdots\cdot b_n$;当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=a,b_1=b_2=\cdots=b_n=b$时,上述不等式可变为:________.
10. 若 $a>b>0$,则$\sqrt[n]{a}$ ________ $\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N}^*)$.

关键信息

1. 一一对应
2. 作差 变形 判断差的符号
3. $a<b$ $a=b$ $a>b$
4. $b<a$ $a>b$ $a>b\Leftrightarrow b<a$ 异向
5. $a>c$ 传递
6. $\Leftrightarrow$ 不改变
7. 加
8. 不改变 改变 有 无
9. $>$ $>$ $a^n>b^n$
10. $>$

通解设计(名师点拨解疑,重点、难点轻松过关)

重点、难点解析

1. 实数大小的比较

对于任意两个实数,都有

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$;

$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;

$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

上面等价符号的左式反映的是实数的运算性质,右式反映的则是实数的大小顺序,合起来就成为实数的运算性质和大小顺序之间的关系.它是不等式这一章的理论基础,也是不等式性质的证明、证明不等式和解不等式的主要依据.

两个实数比较大小,通常用作差法来进行,其一般步骤是:

第一步:作差;

第二步:变形,这是作差比较法的关键.作差后一般

学法指导

[例1]比较 $3(1+a^2+a^4)$与$(1+a+a^2)^2$ 的大小.

【分析】由于这两个代数式均为多项式,故可应用 $a>b\Leftrightarrow a-b>0$;$a=b\Leftrightarrow a-b=0$;$a<b\Leftrightarrow a-b<0$ 进行大小比较.

【解】$3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2=3+3a^2+3a^4-(1+a^2+a^4+2a+2a^2+2a^3)=2+2a^4-2a-2a^3$

$=2(1-a)+2a^3(a-1)=2(1-a)(1-a^3)$

$=2(1-a)^2(1+a+a^2)=2(1-a)^2[(1+\frac{1}{2}a)^2+\frac{3}{4}a^2]\geqslant 0.$

当且仅当 $a=1$ 时,上述等号成立.

故当 $a=1$ 时,$3(1+a^2+a^4)=(1+a+a^2)^2$;

当 $a\neq 1$ 时,$3(1+a^2+a^4)>(1+a+a^2)^2$.

[例2]设 $x\in\mathbf{R}^+,n\in\mathbf{N}^*$,试比较 x^n+x^{-n}与 $x^{n-1}+x^{1-n}$的大小.

变形为：

①常数.

如：比较$(a-1)(a-4)$与$(a-2)(a-3)$的大小．

解：$(a-1)(a-4)-(a-2)(a-3)=(a^2-5a+4)-(a^2-5a+6)=-2<0$，

$\therefore (a-1)(a-4)<(a-2)(a-3)$.

②常数或几个平方和的形式，常用配方法或实数特征$a^2\geqslant 0$判断差的符号.

如：比较a^2+1与a的大小．

解：$a^2+1-a=a^2-a+1$

$$=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0,$$

$\therefore a^2+1>a$.

③几个因式积的形式，常用因式分解法．

如：若$a>b>c$，试比较$ab+bc$与$ac+b^2$的大小．

解：
$$ab+bc-(ac+b^2)=ab+bc-ac-b^2=a(b-c)-b(b-c)=(a-b)(b-c).$$

$\because a>b>c$，$\therefore a-b>0$，$b-c>0$.

$\therefore (a-b)(b-c)>0$.

$\therefore ab+bc>ac+b^2$.

另外，还常用通分、有理化等变形手段．

如：已知$a>b>c>0$，试比较$\frac{a-c}{b}$与$\frac{b-c}{a}$的大小．

解：
$$\frac{a-c}{b}-\frac{b-c}{a}=\frac{a(a-c)-b(b-c)}{ab}=\frac{(a^2-b^2)-(ac-bc)}{ab}=\frac{(a-b)(a+b-c)}{ab}.$$

$\because a>b>c>0$，

$\therefore a-b>0$，$ab>0$，$a+b-c>0$.

$\therefore \frac{(a-b)(a+b-c)}{ab}>0$.

$\therefore \frac{a-c}{b}>\frac{b-c}{a}$.

第三步：定号，就是确定差是大于0，还是等于0，还是小于0.

最后得出结论．

概括为："三步，一结论"，这里的"定号"是目的，"变形"是关键．

2. 不等式的性质

定理1　$a>b\Leftrightarrow b<a$.（对称性）

定理2　$\left.\begin{matrix}a>b\\ b>c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a>c$.（传递性）

定理3　$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$.

（加法单调性）

推论1　$a+b>c\Leftrightarrow a>c-b$.

（移项法则）

推论2　$\left.\begin{matrix}a>b\\ c>d\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+c>b+d$.

（同向不等式相加法则）

此结论还可以推广：任意有限个同向不等式的两边分别相加，所得不等式与原不等式同向．

【解】$x^n+x^{-n}-(x^{n-1}+x^{1-n})=(x^n-x^{n-1})+(x^{-n}-x^{1-n})$

$=x^{n-1}(x-1)+x^{-n}(1-x)=(x-1)(x^{n-1}-\frac{1}{x^n})$.

$\because x\in\mathbf{R}^+$，$n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore$当$0<x\leqslant 1$时，$x-1\leqslant 0$，

$0<x^{n-1}\leqslant 1$，$0<x^n\leqslant 1$，

$\therefore \frac{1}{x^n}\geqslant 1$，$\therefore x^{n-1}-\frac{1}{x^n}\leqslant 0$. $\therefore (x-1)(x^{n-1}-\frac{1}{x^n})\geqslant 0$.

当$x>1$时，$x-1>0$，$x^{n-1}>1$，$x^n>1$，

$\therefore \frac{1}{x^n}<1$，$\therefore (x-1)(x^{n-1}-\frac{1}{x^n})>0$. 综上可得$x^n+x^{-n}\geqslant x^{n-1}+x^{1-n}$.

[例3]已知$a\geqslant 1$，试比较$M=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$和$N=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$的大小．

【分析】若直接求差可得$M-N=\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}-2\sqrt{a}$，此式的正负不易判定；若先将$M$、$N$通过分子有理化，然后再求差，就容易判定$M-N$的正负了．

【解】$M-N=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})-(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}=\frac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}.$$

$\because a\geqslant 1$，$\therefore \sqrt{a-1}<\sqrt{a+1}$，即$\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}<0$.

又$\because \sqrt{a+1}+\sqrt{a}>0$，$\sqrt{a}+\sqrt{a-1}>0$，$\therefore M-N<0$，即$M<N$.

[例4]给定下列5个命题：

(1)$a>b\Rightarrow 2^{-x}\cdot a>2^{-x}\cdot b$；(2)$a>b$，$c>d\Rightarrow a-c>b-d$；(3)$a>b$，$c<d$，$cd\neq 0\Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{d}{b}$；(4)$|a|>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}^*)$；(5)$a<b<0\Rightarrow \frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$.

其中正确命题的个数是……………………………………（　　）

A. 0　　　B. 1　　　C. 2　　　D. 3

【分析】由不等式的性质，逐一验证每一个命题的真伪．

【解】(1)成立，因为$2^{-x}>0$，由性质4知$2^{-x}\cdot a>2^{-x}\cdot b$.

(2)不成立，令$a=5$，$b=4$，$c=3$，$d=1$，有$a-c<b-d$.

(3)不成立，$a>b>0$，$c<0$，$d>0$时，显然有$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$.

(4)不成立，$|a|>b>0\Rightarrow |a|^n>b^n$，但$|a|^n$与$a^n$可能相等，也可能互为相反数．

(5)不成立，$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}=\frac{b}{a(a-b)}<0$，可得$\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$. 故选B.

[例5]设$20<a<34$，$24<b<60$，求$a+b$，$a-b$及$\frac{a}{b}$的范围．

【分析】本题关键是求出$-b$与$\frac{1}{b}$的范围，然后只要利用同向不等式的可加性及两边都是正数的同向不等式的可乘性，问题即可得到解决．

【解】由已知$20<a<34$，$24<b<60$，得$44<a+b<94$，$-60<-b<-24$，故$-40<a-b<10$，又由$24<b<60$得$\frac{1}{24}>\frac{1}{b}>\frac{1}{60}$，

所以$\frac{34}{24}>\frac{a}{b}>\frac{20}{60}$，即$\frac{17}{12}>\frac{a}{b}>\frac{1}{3}$.

定理 4 $\left.\begin{matrix}a>b\\c>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac>bc$；$\left.\begin{matrix}a>b\\c<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac<bc$.（乘法单调性）

推论 1 $\left.\begin{matrix}a>b>0\\c>d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac>bd$.（同向不等式相乘法则）

推论 2 $\left.\begin{matrix}a>b>0\\n\in\mathbf{N}^*\end{matrix}\right\}\Rightarrow a^n>b^n$.（乘方法则）

还可推出如下常用性质：

$\left.\begin{matrix}a>b\\ab>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.（倒数法则）

简证：$\left.\begin{matrix}a>b>0\\ab>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}\Rightarrow\frac{1}{b}>\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

定理 5 $\left.\begin{matrix}a>b>0\\n\in\mathbf{N}^*\end{matrix}\right\}\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.（开方法则）

定理 5 的证明，应用的是反证法．因$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$的反面有两种情形，即$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$和$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，所以不能仅仅否定了$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，就"归谬"了，而必须进行"穷举"，把这两种情形都否定才能得出$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$的正确结论．

把定理 4 的推论 2 和定理 5 结合起来，可以把这一性质推广到正有理指数幂的情形，即如果 $a>b>0$，m 为正有理数，则 $a^m>b^m$.

不等式的性质是解不等式、证明不等式的理论依据．在运用这些基本性质时，要注意不等式成立的条件，尤其要注意符号变化情况，同时也要注意每条性质是否具有可逆性．

运用不等式的性质时，要注意不要弱化了条件，也不要强化了条件，否则都会得出错误结论．如：

在应用"$a>b,ab>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$"这一性质时，有些同学要么是弱化了条件，写成 $a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；要么是强化了条件，写成 $a>b>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

[例6]已知 $f(x)=px^2-q$，且$-4\leqslant f(1)\leqslant-1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant5$，求 $f(3)$ 的取值范围．

【分析】可考虑将 $f(3)$ 写成 $f(1)$、$f(2)$ 的线性组合，即 $f(3)=mf(1)+nf(2)$ 的形式，然后用不等式的运算性质推算 $f(3)$ 的取值范围．

【解】依题意，有$\begin{cases}p-q=f(1),\\4p-q=f(2),\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}p=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)],\\q=-\frac{4}{3}f(1)+\frac{1}{3}f(2).\end{cases}$

$\therefore f(3)=9p-q=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$.

$\because -1\leqslant f(2)\leqslant5$，$\therefore -\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3}$.

$-4\leqslant f(1)\leqslant-1$，$\therefore\frac{5}{3}\leqslant-\frac{5}{3}f(1)\leqslant\frac{20}{3}$.

$\therefore -\frac{8}{3}+\frac{5}{3}\leqslant f(3)\leqslant\frac{20}{3}+\frac{40}{3}$.

即$-1\leqslant f(3)\leqslant20$.

当$\begin{cases}f(1)=-1,\\f(2)=-1,\end{cases}$即$\begin{cases}p-q=-1,\\4p-q=-1,\end{cases}$即$\begin{cases}p=0,\\q=1,\end{cases}$时，左边取等号；

当$\begin{cases}f(1)=-4,\\f(2)=5,\end{cases}$即$\begin{cases}p-q=-4,\\4p-q=-5,\end{cases}$即$\begin{cases}p=3,\\q=7,\end{cases}$时，右边取等号．

【注】这种类型的题目常见的错误是

由$\begin{cases}-4\leqslant p-q\leqslant-1,\\-1\leqslant4p-q\leqslant5,\end{cases}$加减消元得 $0\leqslant p\leqslant3$，

$1\leqslant q\leqslant7$，从而$-7\leqslant f(3)=9p-q\leqslant26$.

事实上，$f(3)$不可能取得$[-7,26]$上的一切值，p、q 是两个相互联系、相互制约的量，在得出 $0\leqslant p\leqslant3$，$1\leqslant q\leqslant7$ 后，并不意味着 p、q 可以独立地取得区间$[0,3]$及$[1,7]$上的一切值．如取 $p=0$，$q=7$ 时，$p-q=-7$，已不满足$-4\leqslant p-q\leqslant-1$.

所以用不等式的运算性质求范围时，尽量只用一次，如果需要多次使用性质时，要考虑等号能否取到，否则可能会出现范围过大或过小的情况．

整合全案（重组、综合、拓展教材所学知识）

1. 不等式的性质与函数的综合运用

(1)不等式的许多性质具有"函数"的背景，如"$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}^*)$"，其实就是幂函数 $y=x^n$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上的单调性．反之，不等式也是研究函数性质的有力工具，比如函数的单调性的定义就是通过不等式描述的．因此，高考中考查不等式的性质常与函数结合在一起进行．

[例7]如果 $0<m<b<a$，那么……………………………………（　　）

A. $\cos\frac{b+m}{a+m}<\cos\frac{b}{a}<\cos\frac{b-m}{a-m}$

B. $\cos\frac{b}{a}<\cos\frac{b-m}{a-m}<\cos\frac{b+m}{a+m}$

C. $\cos\frac{b+m}{a+m}<\cos\frac{b-m}{a-m}<\cos\frac{b}{a}$

如：2001 年全国高考题：

若 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$，$\sin\alpha+\cos\alpha=a$，$\sin\beta+\cos\beta=b$，则…………………………………………………（　）

A. $a<b$　　B. $a>b$

C. $ab<1$　　D. $ab>2$

解析：$a=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha)$

$=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$.

类似地，$b=\sqrt{2}\sin(\beta+\frac{\pi}{4})$.

由 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$，知

$\frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\beta+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，

而函数 $y=\sin x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上是单调递增的.

$\therefore\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})<\sqrt{2}\sin(\beta+\frac{\pi}{4})$，即 $a<b$.

∴应选 A.

又如 2004 年辽宁高考题：

对于 $0<a<1$，给出下列四个不等式

①$\log_a(1+a)<\log_a(1+\frac{1}{a})$

②$\log_a(1+a)>\log_a(1+\frac{1}{a})$

③$a^{1+a}<a^{1+\frac{1}{a}}$　　④$a^{1+a}>a^{1+\frac{1}{a}}$

其中成立的是（　）

A. ①与③　B. ①与④　C. ②与③　D. ②与④

解析：这里需要考察对数函数 $y=\log_a x$ 的单调性.

∵$0<a<1$，∴函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

∵$0<a<1$，$\therefore\frac{1}{a}>a>0$，$\therefore 1+a<1+\frac{1}{a}$

$\therefore\log_a(1+a)>\log_a(1+\frac{1}{a})$

又当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，

$\therefore a^{1+a}>a^{1+\frac{1}{a}}$.

故应选 D.

(2)利用作商比较多项式的大小就是利用指数函数的单调性，如 $y=a^x$，当 $a>1,x>0$ 时，$y=a^x>1$；当 $0<a<1,x<0$ 时，$y=a^x>1$.

如：当 $a>0,b>0$ 时，比较 a^ab^b 与 a^bb^a 的大小.

解：作商有 $\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=\frac{a^{a-b}}{b^{b-a}}=(\frac{a}{b})^{a-b}$.

当 $a>b>0$ 时，$\frac{a}{b}>1,a-b>0,(\frac{a}{b})^{a-b}>1$；

当 $a=b$ 时，$\frac{a}{b}=1,a-b=0,(\frac{a}{b})^{a-b}=1$；

D. $\cos\frac{b-m}{a-m}<\cos\frac{b}{a}<\cos\frac{b+m}{a+m}$

【解析】由不等式的性质，易知 $\frac{b+m}{a+m}>\frac{b}{a}>\frac{b-m}{a-m}$，又由已知得 $\frac{b-m}{a-m}>0,\frac{b+m}{a+m}<1<\frac{\pi}{2}$，而函数 $y=\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上为减函数，故选 A.

[例8]已知奇函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，$a,b,c\in\mathbf{R}$，且 $a+b>0,b+c>0,c+a>0$，则 $f(a)+f(b)+f(c)$ 的值与 0 的关系是______.

【分析】这是一道将函数的奇偶性，单调性同不等式的性质结合在一起的综合题，解决此类问题的基本方法就是从条件出发，逐个分析条件，再将由各个条件得到的信息汇总，找到解题的方法.

【解析】∵$a+b>0$，∴$a>-b$.

又∵函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，∴$f(a)<f(-b)$.

又∵$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，∴$f(a)<-f(b)$. ①

同理可得：$\begin{cases}f(b)<-f(c),② \\ f(c)<-f(a).③\end{cases}$ 由不等式性质定理 3 的推论，将①、②、③左右两边分别相加得 $f(a)+f(b)+f(c)<-[f(a)+f(b)+f(c)]$.

$\therefore 2[f(a)+f(b)+f(c)]<0$. 故 $f(a)+f(b)+f(c)<0$.

[例9]证明：$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

【分析】证明函数的单调性，根据定义先取任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，只要再判断出 $f(x_1)-f(x_2)$ 的符号，即可得出结论.

【证明】任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=(\sqrt{x_1^2+1}-x_1)-(\sqrt{x_2^2+1}-x_2)=(\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1})-(x_1-x_2)=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-(x_1-x_2)=$

$(x_1-x_2)(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_1^2+1}}-1)$.

∵$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，∴$x_1-x_2<0$，

又 $\sqrt{x_1^2+1}>\sqrt{x_1^2}=x_1$，$\sqrt{x_2^2+1}>\sqrt{x_2^2}=x_2$.

$\therefore\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2}=1$. $\therefore\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-1<0$.

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

[例10]设 $a>0$，且 $a\neq1$，试比较 $\frac{1}{2}\log_a t$ 与 $\log_a\frac{t+1}{2}$ 的大小.

【分析】比较两个对数的大小，通常作差比较. 利用对数函数及不等式的性质进行变形，注意对底数 a 进行分类讨论.

【解】$\frac{1}{2}\log_a t-\log_a\frac{t+1}{2}=\log_a\sqrt{t}-\log_a\frac{t+1}{2}=\log_a\frac{2\sqrt{t}}{1+t}$.

∵$t+1-2\sqrt{t}=(\sqrt{t}-1)^2\geqslant0$，∴$t+1\geqslant2\sqrt{t}$，$\therefore 0<\frac{2\sqrt{t}}{t+1}\leqslant1$.

(1)当 $0<a<1$ 时，$\log_a\frac{2\sqrt{t}}{t+1}\geqslant0$，

$\therefore\frac{1}{2}\log_a t\geqslant\log_a\frac{t+1}{2}$（当且仅当 $t=1$ 时取"="号）.

当 $a<b$ 时，$0<\frac{a}{b}<1$，$a-b<0$，$(\frac{a}{b})^{a-b}>1$.

故 $a^ab^b\geqslant a^bb^a$.

2. 利用实数的比较大小解决实际问题

其一般步骤为：

(1)阅读并正确理解题意；

(2)建立数学模型；

(3)利用比较大小的方法解决数学模型；

(4)给实际问题作出结论.

(2)当 $a>1$ 时，$\log_a\frac{2\sqrt{t}}{t+1}\leqslant 0$，

$\therefore \frac{1}{2}\log_a t\leqslant\log_a\frac{t+1}{2}$(当且仅当 $t=1$ 时取"=").

[例11]甲、乙两车从 A 地沿同一路线到达 B 地，甲车一半时间的速度为 a，另一半时间的速度为 b；乙车用速度 a 行走一半路程，用速度 b 行走另一半路程．若 $a\neq b$，试判断哪辆车先到达 B 地？

【分析】本题就是比较走完全程所用时间的多少.

【解】设 A、B 两地的路程为 s，甲、乙两车所用时间分别为 t_1、t_2，则 $t_1=\frac{2s}{a+b}$，$t_2=\frac{s}{2a}+\frac{s}{2b}$.

$\therefore t_1-t_2=\frac{2s}{a+b}-(\frac{s}{2a}+\frac{s}{2b})=s(\frac{2}{a+b}-\frac{a+b}{2ab})=\frac{s[4ab-(a+b)^2]}{2ab(a+b)}=\frac{-s(a-b)^2}{2ab(a+b)}$.

$\because s>0$，$a>0$，$b>0$，$ab(a+b)>0$，

又 $a\neq b$，$\therefore (a-b)^2>0$，$\therefore t_1-t_2<0$，即 $t_1<t_2$．故甲先到达 B 地.

同步达标(学练结合.快速提高)

A 组(基础巩固)

一、选择题

1. 若 a、$b\in\mathbf{R}$，$a>b$，则下列不等式中成立的是…………（　）

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>0$　　D. $(\frac{1}{3})^a<(\frac{1}{3})^b$

2. 有以下四个条件：① $b>0>a$；② $0>a>b$；③ $a>0>b$；④ $a>b>0$. 其中能使 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 成立的有…………（　）

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

3. 已知命题"$a\geqslant b\Rightarrow c\geqslant d$"和"$a<b\Rightarrow e\leqslant f$"是真命题，则下列命题中的真命题是…………（　）

A. $e\geqslant f\Rightarrow c>d$　　B. $c\leqslant d\Rightarrow e<f$

C. $e<f\Rightarrow c\geqslant d$　　D. $c<d\Rightarrow e\leqslant f$

4. $-1<a<b<0$，则下面不等式中正确的是…………（　）

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<b^2<a^2$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<a^2<b^2$

C. $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<a^2<b^2$　　D. $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<b^2<a^2$

5. 下列推导中，不正确的是…………（　）

A. $c-a<c-b\Rightarrow a>b$

B. $\begin{cases}\frac{c}{a}<\frac{c}{d}\\ c>0\end{cases}\Rightarrow a>d$

C. $\begin{cases}a>b>0\\ c>d>0\end{cases}\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$

D. $\sqrt[2n]{a}<\sqrt[2n]{b}\Rightarrow a<b(n\in\mathbf{N}^*)$

6. 当 $0<a<b<1$ 时，下列不等式正确的是…………（　）

A. $(1-a)^{\frac{1}{b}}>(1-a)^b$　　B. $(1+a)^a>(1+b)^b$

C. $(1-a)^b>(1-a)^{\frac{b}{2}}$　　D. $(1-a)^a>(1-b)^b$

二、填空题

7. 若 $x>2$，则 x^3 ______ $2x^2-x+2$.(填">"、"="或"<")

8. 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，则 $2\alpha-\frac{\beta}{3}$ 的取值范围是______.

9. 若 $a^2+a<0$，则 a^2，a，$-a^2$，$-a$ 由大到小的顺序是______.

10. 已知 $a>b$，$a-\frac{1}{a}>b-\frac{1}{b}$ 同时成立，则 ab 应满足的条件是______.

三、解答题

11. 若 $c>a>b>0$，求证：$\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$.

12. 比较 x^6+1 与 x^4+x^2 的大小.

13. 已知 $0<a<\frac{1}{2}$，$A=1-a^2$，$B=1+a^2$，$C=\frac{1}{1-a}$，$D=\frac{1}{1+a}$，试比较 A、B、C、D 的大小.

[illegible]

一、选择题

1. 已知命题 p：$\begin{cases}2<x+y<4,\\0<xy<3,\end{cases}$ 命题 q：$\begin{cases}0<x<1,\\2<y<3,\end{cases}$ 则命题 p 是 q 的 …………………………………………（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 已知 $a>b>c$，则 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}$ 的值是 …………（　　）

A. 正数　　B. 负数或零

C. 非负数　　D. 不确定

3. 若 $\log_a 2<\log_b 2<0$，则 ……………………………………（　　）

A. $0<a<b<1$　　B. $0<b<a<1$

C. $a>b>1$　　D. $b>a>1$

4. 若 $a<b<0$，则下列结论中正确的是 ……………………（　　）

A. 不等式 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 和 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 均不成立

B. 不等式 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 均不成立

C. 不等式 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 和 $(a+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{a})^2$ 均不能成立

D. 不等式 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 和 $(a+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{a})^2$ 均不能成立

5. 已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$0<x<1$，比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小，下列正确的是 ……………………………（　　）

A. $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

B. $|\log_a(1-x)|<|\log_a(1+x)|$

C. $|\log_a(1-x)|=|\log_a(1+x)|$

D. 当 $0<a<1$ 时，前者较大；当 $a>1$ 时，后者较大

6. 设 a、b 是两个实数，给出下列条件：①$a+b>1$；②$a+b=2$；③$a+b>2$；④$a^2+b^2>2$；⑤$ab>1$. 其中能推出"a、b 中至少有一个数大于 1"的条件是 ……………………………………（　　）

A. ②③　　B. ①②③　　C. ③④⑤　　D. ③

二、填空题

7. 若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 a^2-2a+b^2 与 $4b-8$ 的大小关系为______.

8. 若 $1<x<a$，则 $\log_a(ax)$______ $\log_a x^2$（填">""="或"<"）.

9. 若 $a>b>0$，则 $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{b+1}-\sqrt{b}$ 的大小关系是______.

10. 若不等式 $x^2-\log_m x<0$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 的范围内恒成立，则实数 m 的取值范围是______.

三、解答题

11. 在等比数列 $\{a_n\}$ 和等差数列 $\{b_n\}$ 中，$a_1=b_1>0$，$a_3=b_3>0$，$a_1\neq a_3$. 试比较 a_5 和 b_5 的大小.

12. 已知 $1\leqslant \lg\frac{x}{y}\leqslant 2$，$2\leqslant \lg\frac{x^2}{\sqrt{y}}\leqslant 3$，求 $\lg\frac{x^3}{\sqrt[3]{y}}$ 的取值范围.

13. 某水库水位已超过警戒水位，由于上游连降暴雨，每小时流入水库有相同水量，为了保护大坝的安全，要求水库的水位迅速下降到警戒水位以下，需打开若干孔泄洪闸（每孔泄洪闸泄洪量都相同），若使水位下降到警戒水位，经测算，打开两孔泄洪闸，需 40 小时；打开 4 孔泄水闸，需 16 小时. 现要求在 8 小时内使水位下降到警戒水位以下，问至少需打开几孔泄洪闸？

考[illegible]

1. （2003 年，北京）设 $y_1=4^{0.9}$，$y_2=8^{0.48}$，$y_3=(\frac{1}{2})^{-1.5}$，则 …（　　）

A. $y_3>y_1>y_2$　　B. $y_2>y_1>y_3$

C. $y_1>y_2>y_3$　　D. $y_1>y_3>y_2$

2. （2004 年，北京，理）已知 a、b、c 满足 $c<b<a$，且 $ac<0$，那么下列选项中不一定成立的是 ……………………………（　　）

A. $ab>ac$　　B. $c(b-a)<0$

C. $cb^2<ab^2$　　D. $ac(a-c)<0$

●名师解密

1. D　本题考查利用指数函数的单调性来比较实数的大小.

【解析】$y_1=4^{0.9}=2^{1.8}$，$y_2=8^{0.48}=(2^3)^{0.48}=2^{1.44}$，$y_3=2^{1.5}$.

指数函数 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$\therefore 2^{1.8}>2^{1.5}>2^{1.44}$.

即 $y_1>y_3>y_2$. 选 D.

2. C　本题考查不等式的基本性质.

【解析】由已知得 $a>c$，又 $ac<0$，

$\therefore a>0$，$c<0$.

故 A、D 一定成立，B 一定不成立.

选项 C 中，若 $b=0$，则 C 不成立；

若 $b\neq 0$，则 C 成立.

故选 C.

拓展阅读

没有捷径可以走

古希腊的阿基米德不仅是一个卓越的科学家，而且是一个很好的老师，他生前培养过许多学生，在这些学生中有一个特别的人物，他是希腊国王多禄米．

闲着没事的多禄米，有一天忽然心血来潮想学一点儿什么东西．当时，阿基米德已是一位十分著名的科学家了．多禄米想了一想，决定把阿基米德请来，拜他为师，学习一点几何知识．

接到国王召见，阿基米德不敢怠慢，急忙来到了皇宫．这里金碧辉煌，气势典雅．白玉大理石铺成的透明地板，水晶珍珠般的吊灯，雕龙刻虎的巨大梁柱，把整座宫殿装扮得格外豪华、漂亮．阿基米德一边欣赏着宫殿中的装饰，一边想，这些宏伟的建筑中不知凝结了多少科学家和劳动人民的智慧和心血，尤其是那些精巧、别致的设计，无不反映出建造者们在数学、特别是几何学方面很深的造诣．

从此以后，阿基米德就当上了国王的私人数学教师．刚开始上几何课时，国王挺认真，似乎下了决心要学好这门课．可是，时间一长，多禄米的兴趣就逐渐往下落了，尽管阿基米德讲授的几何学内容都很浅显，但对于不爱学习的国王而言，一堂课的时间简直比一年还长，他日益显出不耐烦的情绪．

对国王情绪的变化，阿基米德看到眼里，记在心中，他仍然一如既往地认真讲课．他细心而又耐心地向多禄米讲解着各种几何的图形、原理以及计算方法．可是多禄米对眼前出现的一个个三角形、正方形、菱形的图案毫无兴趣，有点昏昏欲睡了．阿基米德来到多禄米的身边，用手推推他．这位国王勉强睁开惺忪的睡眼，没等阿基米德说话，他反而先问："请问，到底有没有比你的方法简捷一些的学习几何学的方法和途径？用你这种方法实在太难学了．"

听了国王的问题，阿基米德思考着，冷静地回答道："陛下，乡下有两种道路，一条是供老百姓走的乡村小道，一条是供皇家贵族走的宽阔的坦途，请问陛下走的是哪一条道路呢？"

"当然是皇家的坦途呀！"多禄米回答得十分干脆，但又感到茫然不解．

阿基米德继续说："不错，您当然是走皇家的坦途，但那是因为您是国王的缘故．可现在，您是一名学生．要知道，在几何学里，无论是国王还是百姓，也无论是老师还是学生，大家只能走同一条路．因为，走向学问是没有什么皇家大道的．"国王多禄米眨巴着眼睛，似懂非懂地思考了一下，总算理解了阿基米德这番话的含意，于是重新打起精神，听阿基米德继续讲课．

这个故事提示了"追求科学知识没有捷径可走，科学知识对任何人都是一视同仁的"．正如伟大的革命导师马克思所说："在科学的道路上，是没有平坦的大路可走的，只有在那崎岖小路上攀登的不畏劳苦的人们，才有希望到达光辉的顶点．"

6.2 算术平均数与几何平均数

预习导航（预习教材、提取教材关键信息）

1. 如果 $a,b\in\mathbf{R}$，那么 a^2+b^2 ______ $2ab$，当且仅当______时取"="．

2. 如果 a,b 是______数，那么 $\frac{a+b}{2}$ ______ $\sqrt{ab}$，当且仅当 a ______ b 时取"="．同时，我们称 $\frac{a+b}{2}$ 为 a,b 的______平均数，称 $\sqrt{ab}$ 为 a,b 的______平均数．该定理又可叙述为：两个正数的算术平均数______它们的几何平均数．

3. 已知 x,y 都是正数．

(1)如果积 xy 是定值 P，那么当 x ______ y 时，和 $x+y$ 有最______值______；

(2)如果和 $x+y$ 是定值 S，那么当 x ______ y 时，积 xy 有最______值______．

关键信息

1. $\geqslant$ $a=b$

2. 正 $\geqslant$ $=$

算术

几何 不小于

3. $=$ 小

$2\sqrt{P}$

$=$ 大 $\frac{1}{4}S^2$

通解设计（名师点拨解疑、重点、难点轻松过关）

重点、难点解析

1. 预备定理：如果 $a,b\in\mathbf{R}$，那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时取“=”号）

对此定理，可从以下几个方面理解：

(1)定理中 a、b 的取值可以是任意实数；

(2)此定理的证明实际上是利用“求差”的方法；

(3)要特别注意等号成立的条件，此处最容易出错．如果题目条件中 a 与 b 不能取到相等的值，则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 中的等号就不能成立．

(4)不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 也可变形为 $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$ 或 $a^2+b^2+2ab\geqslant 4ab\Rightarrow(\frac{a+b}{2})^2\geqslant ab$.

解题中不仅要记住原来的形式，还要逐步熟练掌握后几种形式，这也是学习数学概念应下的功夫．这是因为所有的数学公式都只表示了若干个量之间的本质联系，而不能固定于某个特殊的形式．

(5)在此定理的应用中，要认识到 a 和 b 代表的是实数，它既可以是具体的数，也可能是比较复杂的代数式，因此应用范围非常广泛，今后很多不等式的证明，就是根据条件，通过变形，化归为本定理的形式，再用此定理得出结论．

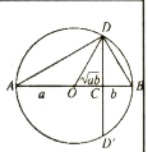
2. 算术平均数与几何平均数定理

如果 a、b 都是正数，那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取“=”号）.

此定理可有多种表达形式：

整式形式	根式形式	分式形式	倒数形式
$a^2+b^2\geqslant 2ab$ $ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2$ $a,b\in\mathbf{R}$	$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ $(a,b\in\mathbf{R}^+)$	$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$ （实数 a,b 同号）	$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$ $(a\in\mathbf{R}^+)$ $a+\frac{1}{a}\leqslant -2$ $(a\in\mathbf{R}^-)$

此定理的两种解释：

数列解释	几何解释
如果把 $\frac{a+b}{2}$ 看作是正数 a,b 的等差中项；$\sqrt{ab}$ 看作是正数 a,b 的等比中项，则该定理可叙述为：两个正数的等差中项不小于它们的等比中项	以 $a+b$ 长的线段为直径作圆，在直径 AB 上取点 C，使 $AC=a$,$CB=b$. 过点 C 作垂直于直径 AB 的弦 DD'，则 $CD=\sqrt{ab}$. 因为圆的半径为 $\frac{a+b}{2}$，所以 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$. 其中当且仅当点 C 与圆心重合，即 $a=b$ 时，等号成立．则该定理又可叙述为：半径不小于半弦 

学法指导

[例1]下列不等式：①$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$；②$|x+\frac{1}{x}|\geqslant 2$；③$0<a<1<b$，则 $\log_a b+\log_b a\leqslant -2$；④$0<a<1<b$，则 $\log_a b+\log_b a\geqslant 2$. 其中正确的是 …(　　)

A. ②④　　B. ①②　　C. ②③　　D. ①②④

【解析】①当 $x>0$ 时，$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$；

当 $x<0$ 时，$x+\frac{1}{x}\leqslant -2$，知①错；

②因为 x 与 $\frac{1}{x}$ 同号，

所以 $|x+\frac{1}{x}|=|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant 2$；

③$0<a<1<b$ 时，$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}<0$，

所以 $\log_a b+\log_b a\leqslant -2$；

④由③知④错．故选 C.

[例2]设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，求证：$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$.

【分析】双联不等式的证明需证明两个不等关系，可以从左至右依次证明．此不等式从左至右的次数依次降低，而且字母之间的关系是由和变化到积，因此很容易想到利用重要不等式．对于有三项或三项以上的式子，可考虑两两组合成局部组合的方式运用重要不等式，再结合不等式的性质求证．

【证明】∵$a^4+b^4\geqslant 2a^2b^2$，$b^4+c^4\geqslant 2b^2c^2$，$c^4+a^4\geqslant 2c^2a^2$，

∴$2(a^4+b^4+c^4)\geqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$，

即 $a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

又 $a^2b^2+b^2c^2\geqslant 2ab^2c$，

$b^2c^2+c^2a^2\geqslant 2abc^2$，$c^2a^2+a^2b^2\geqslant 2a^2bc$，

∴$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$.

∴$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$.

[例3]若 $a>0$，$b>0$，试比较 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，$\frac{a+b}{2}$，$\sqrt{ab}$，$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ 的大小．

【分析】用特殊值完全可以解出答案．若作一般性推理，则由 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$，可考虑 $\sqrt{ab}$ 与 $\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$，$(\frac{a+b}{2})^2$ 与 $\frac{a^2+b^2}{2}$ 的大小，于是四个数的大小趋于明朗．

【解】∵$a>0$，$b>0$，∴$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，

即 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$，

当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$，

即 $a=b$ 时等号成立．

又 $(\frac{a+b}{2})^2=\frac{a^2+b^2+2ab}{4}\leqslant\frac{a^2+b^2+a^2+b^2}{4}=\frac{a^2+b^2}{2}$，

∴$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，

当且仅当 $a=b$ 时等号成立．

对此定理,可从以下几个方面理解:

(1)$a^2+b^2\geqslant 2ab$ 和$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$成立的条件不同:前者只要求 a、b 都是实数,而后者要求 a、b 都是正数.如 $(-4)^2+(-9)^2\geqslant 2\times(-4)\times(-9)$ 成立,而 $\frac{(-4)+(-9)}{2}\geqslant\sqrt{(-4)\times(-9)}$不成立.

(2)这两个不等式都是带有等号的不等式,对其中"当且仅当……时取=号"这句话可从两个方面理解:

当 $a=b$ 时取等号,其含义就是 $a=b\Rightarrow\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$;

仅当 $a=b$ 时取等号,其含义就是$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}\Rightarrow a=b$.

综合起来,其含义就是:$a=b$ 是$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$的充要条件.

(3)当用不等式 $a^2+b^2\geqslant 2\sqrt{ab}$,$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$证明不等式时,因为它们本身也是根据不等式的意义、性质或用"作差法"证出的,因此,凡是用它们可以获证的不等式,一般也可以直接根据不等式的意义、性质或用比较法证明.

(4)以上两个不等式可作如下推广:

如果 a,b,c 是正数,那么

$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$;$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$.

(当且仅当 $a=b=c$ 时取"=")

(此为阅读材料,可不作要求)

而$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$,

于是$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

【评注】题中的$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$,$\frac{a+b}{2}$,$\sqrt{ab}$,$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$分别叫做正数 a、b 的平方平均数,算术平均数,几何平均数,调和平均数,于是:平方平均数≥算术平均数≥几何平均数≥调和平均数.

[例4]求证:$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

【分析】解决此题的关键是我们要记住一些常用的基本不等式:$a^2\geqslant 0(a\in\mathbf{R})$;$|a|\geqslant 0(a\in\mathbf{R})$;$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca(a,b,c\in\mathbf{R})$;$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}(a,b,c\in\mathbf{R}^+)$等.

【证明】由平均值不等式得$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}$,

即$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

同理:$\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$,

$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$.

三式相加得$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2(a+b+c)=\sqrt{2}(a+b+c)$.

整合全案(重组、综合、拓展教材所学知识)

1. 利用均值不等式比较实数大小或证明不等式

(1)注意均值不等式的前提条件.

如:若 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $ab\neq 0$,求$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$的取值范围.

解:当 $ab>0$ 时,$\frac{b}{a}>0$,$\frac{a}{b}>0$,

所以$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$.

当且仅当 $a=b$ 时取等号.

当 $ab<0$ 时,$\frac{b}{a}<0$,$\frac{a}{b}<0$.

所以$(-\frac{b}{a})+(-\frac{a}{b})\geqslant 2\sqrt{(-\frac{b}{a})\cdot(-\frac{a}{b})}=2$.

当且仅当 $a=-b$ 时,取等号.

此时$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\leqslant -2$.

故所求范围为$(-\infty,2]\cup[2,+\infty)$.

(2)灵活变换基本不等式的形式并注重其变形形式的运用.

重要不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 的形式可以是 $a^2\geqslant 2ab-b^2$,也可以是 $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$,还可以是 $a+\frac{b^2}{a}\geqslant 2b(a>0)$,$\frac{b^2}{a}\geqslant 2b-a$ 等.解题时不仅要利用原来的形式,而且要

[例5]已知 $0<a<1$,$0<b<1$,则 $a+b$,a^2+b^2,$2\sqrt{ab}$,$2ab$ 中最大的一个是……………………………………………………( )

A. a^2+b^2 B. $a+b$ C. $2ab$ D. $2\sqrt{ab}$

【分析】本题先利用重要不等式比较出 a^2+b^2 与 $2ab$,$a+b$ 与$2\sqrt{ab}$的大小,再利用作差法比较 a^2+b^2 与 $a+b$ 的大小.

【解析】∵$0<a<1$,$0<b<1$,

∴$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,$a^2+b^2\geqslant 2ab$.

∴四个数中最大的应从 $a+b$,a^2+b^2 中选择.

又∵$a-1<0$,$b-1<0$.

∴$a^2+b^2-(a+b)=a(a-1)+b(b-1)<0$.

∴$a^2+b^2<a+b$,

∴$a+b$ 最大,选 B.

[例6]已知 $n\in\mathbf{N}$,$n>2$,求证:

$\log_n(n+1)\cdot\log_n(n-1)<1$.

【分析】本题的证明要注意重要不等式的变形应用以及合理地选择变形形式.

【证明】当 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n>2$ 时,$\log_n(n+1)>0$,$\log_n(n-1)>0$.

$\log_n(n+1)\cdot\log_n(n-1)\leqslant[\frac{\log_n(n+1)+\log_n(n-1)}{2}]^2=[\frac{\log_n(n^2-1)}{2}]^2<(\frac{\log_n n^2}{2})^2=1$.

所以 $\log_n(n+1)\cdot\log_n(n-1)<1$.

掌握它的几种变形形式以及公式的逆用等．

如：已知 $a,b,c\in(0,+\infty)$，求证：

$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$.

证明：$\because a,b\in(0,+\infty)$，

$\therefore \frac{a^2}{b}+b\geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot b}=2a$.

同理，$\frac{b^2}{c}+c\geqslant 2b$，$\frac{c^2}{a}+a\geqslant 2c$.

三式相加，得

$(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})+(a+b+c)\geqslant 2(a+b+c)$.

所以 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$.

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号．

(3)合理分组，反复应用均值不等式．

(4)通过添去项、拆项等方法配凑成应用算术平均数与几何平均数定理的形式．

2. 利用两个重要不等式求函数的最值

(1)由两个重要不等式可得下面结论：

已知 $x,y\in\mathbf{R}^+$，$x+y=S$，$xy=P$，则：①如果 P 是定值，那么当且仅当 $x=y$ 时，S 取得最小值 $2\sqrt{P}$；

②如果 S 是定值，那么当且仅当 $x=y$ 时，P 取最大值 $\frac{1}{4}S^2$.

利用基本不等式求最值时，强调三要素：①正数；②定值；③等号成立的条件．

(2)特殊条件的灵活运用

在给定条件下，利用基本不等式求最值时，关键是条件的灵活运用，如条件 $x+y=1$，可进行整体代换，或用 $y=1-x$ 代换，或考虑用三角代换．如可设 $x=\cos^2\alpha$，$y=\sin^2\alpha$等．关于给定条件的灵活运用，同学们在今后的学习过程中要认真体会，逐步掌握．

(3)利用重要不等式求函数最值时，定值条件的构造技巧．

用均值不等式求函数的最值是高中数学的重点，也是高考的一个热点，三个必要条件更是相关考题瞄准的焦点．在具体问题中，“正数”条件往往从已知条件中获得，“相等”条件也较容易确定，而要获得“定值”条件却常常被设计为一个难点，它需要一定的灵活性和变形技巧．因此，“定值”条件决定着均值不等式应用的可行性，这是解题成败的关键．

构造“定值”条件的常用技巧变换有：

①添去项变换.

如：已知 $x>-1$，求 $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$ 的最小值．

解：$\because x>-1$，$\therefore x+1>0$.

$\therefore f(x)=x+\frac{1}{x+1}=$

$(x+1)+\frac{1}{x+1}-1\geqslant 2-1=1$.

当且仅当 $\frac{1}{x+1}=x+1$，

即 $x=0$ 时，等号成立．

【评注】此证明选择了 $ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2$，若选择 $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$ 就无法进行了．同时本证明中运用了放缩原理．

[例7]若 a,b,c,d 都是正数，求证：$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}$.

【证法一】直接应用均值不等式．

$\because a,b,c,d$ 是正数，

$$\therefore \frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}}{4}=\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}.$$

当且仅当 $a=b=c=d$ 时取“=”.

【证法二】也可以先拆项分组、再应用均值不等式．

$\because a,b,c,d$ 是正数，

$$\therefore \frac{a+b+c+d}{4}=\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}.$$

当且仅当 $a=b=c=d$ 时取“=”.

[例8]已知 $a>0,b>0$，且 $a+b=1$，求 $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}$ 的最大值．

【分析】解决问题的关键在于如何脱去根号，并与条件 $a+b=1$ 联系起来，可利用重要不等式 $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant(\frac{a+b}{2})^2$ 解决．

【解】由重要不等式 $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant(\frac{a+b}{2})^2$ 知

$\frac{(2a+1)+(2b+1)}{2}\geqslant(\frac{\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}}{2})^2$.

所以 $\frac{\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}}{2}\leqslant\sqrt{a+b+1}$.

由 $a+b=1$，得 $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\leqslant 2\sqrt{2}$.

当且仅当 $2a+1=2b+1$，即 $a=b$ 时取“=”.

又 $a+b=1$，所以 $a=b=\frac{1}{2}$.

此时 $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}$ 有最大值 $2\sqrt{2}$.

[例9]已知 $x>0,y>0$，且 $x+y=1$，求 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值．

【解法一】$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=(\frac{1}{x}+\frac{2}{y})\cdot(x+y)=$

$3+\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{2x}{y}}=3+2\sqrt{2}$.

当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{2x}{y}$，即 $y=\sqrt{2}x$ 时等式成立．

亦即 $x=\sqrt{2}-1$，$y=2-\sqrt{2}$.

此时，$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

【解法二】令 $x=\cos^2\theta$，$y=\sin^2\theta$.

则 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{2}{\sin^2\theta}=\sec^2\theta+2\csc^2\theta$

$=(1+\tan^2\theta)+2(1+\cot^2\theta)$

$=3+\tan^2\theta+2\cot^2\theta\geqslant 3+2\sqrt{\tan^2\theta\cdot 2\cot^2\theta}=3+2\sqrt{2}$.

当且仅当 $\tan^2\theta=2\cot^2\theta$ 时，取“=”.（下同解法一）

②拆项变换．

如：$x>0$ 时，求 $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ 的最小值．

解：$f(x)=2x+\frac{1}{x^2}=$

$x+x+\frac{1}{x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{x\cdot x\cdot\frac{1}{x^2}}=3.$

当且仅当 $x=\frac{1}{x^2}$，即 $x=1$ 时，$f(x)$ 有最小值 3.

③统一变量．

④平方后利用均值不等式．

如：已知 θ 为锐角，求函数 $y=\cos^2\theta\sin\theta$ 的最大值．

解：$\because\theta$ 为锐角，$\therefore\sin\theta,\cos^2\theta$ 为正数．

$\therefore y^2=\cos^4\theta\cdot\sin^2\theta=4\cdot\frac{\cos^2\theta}{2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{2}\cdot\sin^2\theta\leqslant$

$4\left(\frac{\frac{\cos^2\theta}{2}+\frac{\cos^2\theta}{2}+\sin^2\theta}{3}\right)^3=\frac{4}{27}.$

$\therefore y\leqslant\frac{2\sqrt3}{9}$，即 $y_{\max}=\frac{2\sqrt3}{9}.$

3. 谨防利用均值不等式的误区

(1)利用不等式解决函数的最值问题时，一定要注意公式中的三个条件：正数、定值、等号成立．特别当式子中等号不成立时，显然重要不等式不能应用，而改用函数的单调性求最值．如函数 $y=x+\frac{3}{x},x\in(0,1]$，从形式上看可以用均值不等式，但等号不成立，因此要利用函数的单调性解决．

(2)多次利用均值不等式时，必须满足每个不等式都能同时取到"="，否则取不到最值．

如：已知 $x,y\in\mathbf{R}^+$，且 $2x+5y=20$，求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值．

错解：$\because x,y\in\mathbf{R}^+$，$\therefore 2x+5y\geqslant 2\sqrt{10xy}>0$，

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{xy}}>0.$

$\therefore(2x+5y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\geqslant 4\sqrt{10}.$

又 $2x+5y=20.$

$\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{\sqrt{10}}{5}.$

因此 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}.$

错解分析：在求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值时，两次利用了均值不等式，必须满足两个不等式要能同时取到"="，否则取不到最小值．而 $\begin{cases}2x=5y,\\ \frac{1}{x}=\frac{1}{y},\end{cases}$ 无解．即两个不等式不能同时取"="，故 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 取不到最小值．

事实上，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $\frac{7+2\sqrt{10}}{20}$，正确做法可参考例 9 的解法．

(3)不能仅仅关注均值不等式的形式的构造，还应注意统一的整体变换．

【评注】本题还有其他解法，请同学们探讨．

[例10]已知 a,b 均为正实数，且 $a^2+\frac{b^2}{2}=1$，求 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值．

【分析】考虑式子 $a\sqrt{1+b^2}=\sqrt{a^2(1+b^2)}$，又 $2a^2+b^2=2$，以上两式中一个为积的形式，另一个为和的形式且和为定值，故通过变形后使用重要不等式求解．

【解】$\because a^2(1+b^2)=\frac{1}{2}\cdot(2a^2)(1+b^2)$，

$\therefore a\sqrt{1+b^2}=\frac{1}{\sqrt2}\cdot\sqrt{(2a^2)(1+b^2)}.$

由重要不等式可得

$\sqrt{(2a^2)(1+b^2)}\leqslant\frac{2a^2+(1+b^2)}{2}=\frac{2a^2+b^2+1}{2}=\frac{3}{2}.$

$\therefore a\sqrt{1+b^2}\leqslant\frac{3}{2\sqrt2}=\frac{3\sqrt2}{4}.$

当且仅当 $\begin{cases}2a^2=1+b^2,\\ a^2+\frac{b^2}{2}=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=\frac{\sqrt3}{2}\\ b=\frac{\sqrt2}{2}\end{cases}$ 时，$a\sqrt{1+b^2}$ 取得最大值 $\frac{3\sqrt2}{4}.$

[例11]已知 $a>b>0$，求 $a+\frac{4}{(2a-b)b}$ 的最小值．

【分析】由于 $a+\frac{4}{(2a-b)b}$ 中有两个变量，因此不能应用求函数的最小值的方法，可考虑用不等式求最值的方法．而 $a+\frac{4}{(2a-b)b}$ 是两个数的和的形式且它们的积不为定值，因此应设法把它变成乘积为定值的三个数和的形式．

【解】$a+\frac{4}{(2a-b)\cdot b}=\frac{1}{2}\left[(2a-b)+b+\frac{8}{(2a-b)\cdot b}\right]\geqslant$

$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{(2a-b)\cdot b\cdot\frac{8}{(2a-b)\cdot b}}=3.$

当且仅当 $2a-b=b=\frac{8}{(2a-b)\cdot b}$，即 $a=b=2$ 时等号成立．

$\therefore$ 当 $a=b=2$ 时，$a+\frac{4}{(2a-b)\cdot b}$ 有最小值 3.

[例12]已知 $x\in(0,\pi)$，求 $f(x)=\sin x+\frac{3}{\sin x}$ 的最小值．

【分析】若直接利用均值不等式，等号不能成立，可考虑利用函数的单调性求出 $f(x)$ 的最小值．

【解】$\because x\in(0,\pi)$，$\therefore\sin x\in(0,1]$．设 $t=\sin x$，则 $t\in(0,1]$.

$\because$ 函数 $y=t+\frac{3}{t}$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，$\therefore$ 当 $t=1$ 时，$y_{\min}=1+3=4.$

当且仅当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，y 取得最小值 4.

[例13]若直角三角形周长为定值 $l(l>0)$，求三角形面积的最大值．

【分析】设出直角三角形的两条直角边 a、b，则面积 $S=\frac{1}{2}ab$. 在求面积 S 的最大值时．一方面注意利用均值不等式，另一方面注意可把 ab 作为一个整体进行处理．

【解】设直角三角形的两条直角边分别为 a、b，则

$a+b+\sqrt{a^2+b^2}=l.$

$\because a+b\geqslant 2\sqrt{ab},a^2+b^2\geqslant 2ab$，$\therefore a+b+\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}$，

故 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{l}{2+\sqrt2}$，$\therefore S=\frac{1}{2}ab\leqslant\frac{1}{2}(\frac{l}{2+\sqrt2})^2=\frac{3-2\sqrt2}{4}l^2.$

即三角形面积的最大值为 $\frac{3-2\sqrt2}{4}l^2.$

如：若正数 a,b 满足 $ab=a+b+3$，则 ab 的取值范围是________.

解析：由已知 $ab=a+b+3\geqslant 2\sqrt{ab}+3$，得

$ab-2\sqrt{ab}-3\geqslant 0$，

即 $(\sqrt{ab}-3)(\sqrt{ab}+1)\geqslant 0$，

由于 $\sqrt{ab}>0$，所以 $\sqrt{ab}-3\geqslant 0$，

所以 $ab\geqslant 9$，当 $a=b=3$ 时取"="．

故 ab 的取值范围是 $[9,+\infty)$．

4. 运用重要不等式解决实际问题

(1)应用题是近几年高考的热点问题，应用题求解，关键在于建立数学模型．而最值问题的数学模型，通过建立目标函数，利用重要不等式求解，这在近几年高考中是常见的．这类问题的解决，对考生的阅读能力、理解能力、分析解决问题的能力及计算能力都有较高要求．

(2)解应用题应注意两个问题：一是建模问题，即通过建立一定的数学模型把应用问题转化为单纯的数学问题；二是建模后的求解问题，即运用相关数学知识将其解决．

(3)要善于发现题中数学模型的重要不等式隐含的信息，进而利用重要不等式求解．

5. 重要不等式与函数性质有机结合的综合应用问题

近几年的高考试题"证明不等式和解不等式"交错命题，"以函数为背景"的不等式考题是命题的热点．这些试题的特点是"将函数思想、不等式理论有机结合起来"，考查综合运用知识的能力．

如：(2001 年，安徽春季)若实数 a、b 满足 $a+b=2$，则 3^a+3^b 的最小值是……………………………（　　）

A. 18　　B. 6　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt[4]{3}$

解析：∵a,b 为实数，且 $a+b=2$，

∴$3^a+3^b\geqslant 2\sqrt{3^a\cdot 3^b}=2\sqrt{3^{a+b}}=2\times 3=6$．

故应选 B．

此时，三角形为等腰直角三角形．

[例14]在某交通拥挤及事故易发地段，为了确保交通安全，交通部门规定，在此地段内的车距 d 正比于车速 v(km/h)的平方与车身长的积，且最小车距不得少于半个车身长．假定车身长均为 s(m)，且当车速为 50 km/h 时，车距恰为车身 s．问交通繁忙时，应规定怎样的车速，才能使此地段的车流量 Q 最大？

【分析】解应用题的基本步骤是：

认真阅读理解实际问题→选择或建立数学模型→完成数学模型的解决→完成实际问题的解决．

车流量的计算方法是：单位时间上通过的车辆数，也就是取定路段上所含有的车辆数．

【解】依题意，$d=k_1\cdot v^2\cdot s$，

又 $v=50$ km/h，$d=s$ m，∴$k_1=\frac{1}{2\,500}$，$d=\frac{v^2s}{2\,500}$．

∵$d\geqslant\frac{1}{2}s$，∴$v\geqslant 25\sqrt{2}$．

设 l 表示取定路段的长，$l=vt$(t 是相应的时间)，

则车流量 $=\frac{vt}{d+s}=\frac{t}{\frac{v\cdot s}{2\,500}+\frac{s}{v}}$．

∵$\frac{vs}{2\,500}+\frac{s}{v}\geqslant\frac{s}{25}$，当且仅当 $v=50$ km/h 时，等号成立．

∴当 $v=50$ km/h 时，Q 最大．

【答】车速为 50 km/h 时，车流量最大．

[例15]已知 $f(x)=\lg x(x\in\mathbf{R}^+)$，若 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^+$，判断 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 与 $f(\frac{x_1+x_2}{2})$ 的大小并加以证明．

【分析】本题主要考查重要不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 的变形、函数的单调性、对数运算、函数关系符号"f"的运用．

【解】$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\leqslant f(\frac{x_1+x_2}{2})$．

下面给出证明．

【证明】∵$f(x_1)+f(x_2)=\lg x_1+\lg x_2=\lg(x_1x_2)$，

$f(\frac{x_1+x_2}{2})=\lg\frac{x_1+x_2}{2}$，而 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^+$，$x_1x_2\leqslant(\frac{x_1+x_2}{2})^2$，

∴$\lg(x_1x_2)\leqslant\lg(\frac{x_1+x_2}{2})^2$，∴$\frac{1}{2}\lg(x_1x_2)\leqslant\lg\frac{x_1+x_2}{2}$．

即 $\frac{1}{2}(\lg x_1+\lg x_2)\leqslant\lg\frac{x_1+x_2}{2}$．因此，$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\leqslant f(\frac{x_1+x_2}{2})$．

同步达标(学练结合，快速提高)

A 组(基础巩固)

一、选择题

1. 下列命题正确的是 ……………………………………（　　）

A. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$，当且仅当 $a,b\in(0,+\infty)$ 时成立

B. $\tan\theta+\cot\theta\geqslant 2$，当且仅当 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时成立

C. $\log_a b+\log_b a\geqslant 2$，当且仅当 $a,b\in(1,+\infty)$ 时成立

D. $|a+\frac{1}{a}|\geqslant 2$，当且仅当 $a\neq 0$ 时成立

2. 设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq b$，$a+b=2$，则 ……………………………（　　）

A. $1<ab<\frac{a^2+b^2}{2}$　　B. $ab<1<\frac{a^2+b^2}{2}$

C. $ab<\frac{a^2+b^2}{2}<1$　　D. $\frac{a^2+b^2}{2}<ab<1$

3. 已知 $a>b>0$，则下列不等式成立的是 ……………………（　　）

A. $a>b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$　　B. $a>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>b$

C. $a>\frac{a+b}{2}>b>\sqrt{ab}$　　D. $a>\sqrt{ab}>\frac{a+b}{2}>b$

4. 已知 $x+2y=1$，则 2^x+4^y 的最小值是 ……………………（　　）

A. 8　　B. 6　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $3\sqrt{2}$

5. 已知 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$，设 $x,y\in\mathbf{R}^+$，$a=f(\frac{x+y}{2})$，$b=f(\sqrt{xy})$，

$c=f(\frac{2xy}{x+y})$，则 a,b,c 的大小关系是 ………………（ ）

A. $a\leqslant c\leqslant b$ B. $a\leqslant b\leqslant c$ C. $c\leqslant b\leqslant a$ D. $b\leqslant c\leqslant a$

6. 函数 $f(x)=x+\frac{1}{x-2}(x>2)$，$g(x)=(\frac{1}{2})^{x^2-2}(x\neq0)$，则 $f(x)$、$g(x)$ 的大小关系是 ………………（ ）

A. $f(x)>g(x)$ B. $f(x)\geqslant g(x)$

C. $f(x)<g(x)$ D. $f(x)\leqslant g(x)$

二、填空题

7. 若 $a,b\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b=1$，则 ab 的最大值是______.

8. 若 $x\in\mathbf{R}^+$，则 $2-x-\frac{4}{x}$ 的最大值为______，$x+\frac{1}{2x^2}$ 的最小值为______.

9. 函数 $y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值为______.

10. 若 $\log_2a+\log_2b=6$，则 $a+b\geqslant$______.

三、解答题

11. 已知 $\lg x+\lg y=1$，求 $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}$ 的最小值.

12. 当 $x>1$ 时，求 $y=\frac{2x^2-2x+1}{x-1}$ 的最小值.

13. 已知 $\tan\alpha=3\tan\beta$，其中 α、β 为锐角，求 $u=\alpha-\beta$ 的最大值.

B组（能力提高）

一、选择题

1. 若 a,b 是正数，则下列不等式不成立的是 …………（ ）

A. $a+b+\frac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant2\sqrt{2}$ B. $\frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}}\geqslant2$

C. $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$ D. $a+\frac{1}{a+4}\geqslant2$

2. 设 a,b,c,d,m,n 均为正实数，$p=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$，那么 ………………（ ）

A. $p\leqslant q$

B. $p\geqslant q$

C. $p<q$

D. p、q 之间的大小关系随 m,n,a,b,c,d 取值而定

3. 设 α、β 是方程 $x^2+px+8=0$ 的相异实根，则有 ……（ ）

A. $|\alpha|>2,|\beta|>2$ B. $|\alpha+\beta|>4\sqrt{2}$

C. $|\alpha-\beta|>4\sqrt{2}$ D. $|\alpha|>3,|\beta|>3$

4. 已知 $x,y\in(0,1)$，且 $x<y$，若 $xy=\frac{1}{9}$，$M=\log_{\frac{1}{3}}x\cdot\log_{\frac{1}{3}}y$，则 ………………（ ）

A. $M\leqslant1$ B. $M<1$

C. $M\geqslant1$ D. $M>1$

5. 设 x 是实数，且满足等式 $\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}=\cos\theta$，则实数 θ 等于（以下各式中 $k\in\mathbf{Z}$）………………（ ）

A. $2k\pi$ B. $k\pi$ C. $(2k+1)\pi$ D. $k\pi+\frac{\pi}{2}$

6. 下列四个命题中，不正确的是 ………………（ ）

A. 若 $0<a<\frac{1}{2}$，则 $\cos(1+a)<\cos(1-a)$

B. 若 $0<a<1$，则 $\frac{1}{1-a}>1+a>\sqrt{2a}$

C. 若实数 x,y 满足 $y=x^2$，则 $\log_2(2^x+2^y)$ 的最小值为 $\frac{7}{8}$

D. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $a^2+b^2+ab+1>a+b$

二、填空题

7. 若实数 x、y 满足 $x^2+y^2=1$，则 $(1-xy)(1+xy)$ 的取值范围是________.

8. 已知 $a>1>b>0$，以下给出四个不等式：

①$b^{\frac{a+1}{2}}>b^{\sqrt{a}}$；②$a^{\frac{b+1}{2}}>a^{\sqrt{b}}$；③$\frac{a+1}{2}\lg b<\sqrt{a}\lg b$；④$\frac{b+1}{2}\lg a>\sqrt{b}\lg a$.

其中恒成立的是________.（把你认为正确的不等式的序号都填上）

9. 已知 $a>0,b>0$，且 $a+b=1$，则 $(\frac{1}{a^2}-1)(\frac{1}{b^2}-1)$ 的最小值是________.

10. 一批救灾物资随 26 辆汽车从某市以 v km/h 的速度直达灾区，已知两地公路线长 400 km，为了安全起见，两辆汽车的间距不得小于 $(\frac{v}{20})^2$ km，那么这批物资全部运到灾区至少需要________小时.

三、解答题

11. 已知 $a+b=1$，$a,b\in\mathbf{R}^+$，求证：$a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$.

12. 设 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，不等式 $\sin2\theta-(2\sqrt{2}+\sqrt{2}a)\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+2a+3<\frac{2\sqrt{2}}{\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

13. 甲、乙两地相距 s km，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不得超过每小时 c km，已知汽车每小时的运输成本（以元为单位）由可变部分和固定部分组成，可变部分与速度 v(km/h) 的平方成正比，比例系数为 b，固定部分为 a 元.

(1)将全部运输成本 y(元)表示为速度 v(km/h) 的函数，并指出该函数的定义域；

(2)为使全程运输成本最少，汽车应以多大速度行驶？

考题链接

1. (2004 年，广西)某村计划建造一个室内面积为 800 m^2 的矩形蔬菜温室。在温室内，沿左、右两侧与后侧内墙各保留 1 m 宽的通道，沿前侧内墙保留 3 m 宽的空地. 当矩形温室的边长各为多少时，蔬菜的种植面积最大？最大种植面积是多少？

2. (2004 年，上海)某单位用木料制作如图 6－2－1所示的框架，框架的下部是边长分别为 x、y(单位：m)的矩形。上部是等腰直角三角形。要求框架围成的总面积 8 m^2. 问 x、y 分别是多少(精确到 0.001 m)时用料最省？

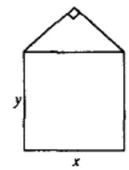


图 6－2－1

名师解密

1. 本小题主要考查把实际问题抽象为数学问题，应用不等式等基础知识和方法解决问题的能力.

【解】设矩形温室的左侧边长为 a m，后侧边长为 b m，则 $ab=800$.

蔬菜的种植面积　$S=(a-4)(b-2)=ab-4b-2a+8=808-2(a+2b)$.

所以 $S\leqslant 808-4\sqrt{2ab}=648(m^2)$.

当 $a=2b$，即 $a=40(m)$，$b=20(m)$时，

$S_{最大值}=648(m^2)$.

答：当矩形温室的左侧边长为 40 m，后侧边长为 20 m 时，蔬菜的种植面积最大，最大种植面积为 648 m^2.

2.【解】由题意得 $xy+\frac{1}{4}x^2=8$,

$\therefore y=\dfrac{8-\frac{x^2}{4}}{x}=\dfrac{8}{x}-\dfrac{x}{4}(0<x<4\sqrt{2})$.

于是，框架用料长度为 $l=2x+2y+2(\frac{\sqrt{2}}{2}x)=(\frac{3}{2}+\sqrt{2})x+\frac{16}{x}\geqslant 4\sqrt{6+4\sqrt{2}}$.

当$(\frac{3}{2}+\sqrt{2})x=\frac{16}{x}$，即 $x=8-4\sqrt{2}$时等号成立.

此时，$x\approx 2.343$，$y=2\sqrt{2}\approx 2.828$.

故当 x 为 2.343 m，y 为 2.828 m 时，用料最省.

拓展阅读

柯西和柯西不等式

一、柯西

柯西 Augustin—Louis Cauchy (1789－1857)，法国数学家．1789 年 8 月 21 日生于巴黎，1857 年 5 月 23 日卒于巴黎附近的索镇. 1805 年人巴黎综合工科学校，1807 年就读于道路桥梁工程学校，1816 年取得教授职位，并被任命为法国科学院院士. 他还是英国皇家学会的会员和几乎所有外国科学院的院士.

1830 年，波旁王朝被推翻，柯西拒绝宣誓效忠新的国王，因此失去了所有的职位. 他自动出走，先后到瑞士、意大利等地，1838 年回到巴黎，继任巴黎综合工科学校教授，并恢复了在科学院的活动. 1848 年任巴黎大学教授.

柯西在数学中的主要贡献是：微积分学、复变函数和微分方程奠基性的工作. 其他在代数方面，发展了行列式理论，创造了复数的"模"及复数"共轭"等数学术语．柯西对力学、物理学和天文学也有研究，特别是固体力学方面，奠定了弹性理论的基础.

柯西思路敏捷，解决数学物理问题的速度极快，有时几乎每星期向巴黎科学院提交一份新的研究成果．他所发现和创立的定理和公式，往往是一些最简单、最基本的事实．因而，他的数学成就影响广泛，意义深远．

二、柯西不等式

设 $a_i,b_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$，则$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$，等号当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时成立(约定 $a_i=0$ 时，$b_i=0$).