线性代数

LINEAR ALGEBRA

唐　明　王定江
冯　鸣　李川生　编著

3

浙江大學出版社

线性代数

唐　明　　王定江
冯　鸣　　李川生　编著

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数／唐明等编著.—杭州：浙江大学出版社，2004.8

ISBN 7-308-03830-0

Ⅰ.线...　Ⅱ.唐...　Ⅲ.线性代数－高等学校－教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 080553 号

出版发行　浙江大学出版社

(杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027)

(E-mail:zupress@mail. hz. zj. cn)

(网址:http://www.zjupress.com)

责任编辑　余健波

封面设计　俞亚彤

排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心

印　　刷　浙江大学印刷厂

开　　本　787mm×960mm　1/16

印　　张　14.25

字　　数　287 千

版 印 次　2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷

印　　数　0001-4000

书　　号　ISBN 7-308-03830-0/O·306

定　　价　21.80 元

前　　言

为了适应高等教育的快速发展，贯彻因材施教、层次教育的思想，作为新世纪教改试用教材——《线性代数》，经过多年的探索、试点、修订，今天终于正式出版了.

本书是探索性的.综合各种文献并结合我们自己多年的教学体会，在编写和修改时对过去所用传统教材的系统和内容作了适当的调整：把向量的线性关系和秩，与欧氏空间分成两章叙述，既适当分散难点、又尽量保持了欧氏空间概念的相对完整性；把可逆的矩阵变换单独列为一章，以加强对几种变换的比较和掌握；适当补充了一些应用实例以加强工程意识；在最后一章介绍了一般的线性空间和线性变换供选读.为紧跟计算技术的发展，在讲授算法原理的同时在附录一中简单介绍了一个实用的数值计算软件 MATLAB，教材中的算例均可用它实现.

为了能适应不同高校、不同专业对线性代数的不同要求，我们把教材分为基本内容和选学内容(前七章每章的最后一节附录和整个第八章)两个层次，并将习题分为 A(基本类)、B(供复习用)、C(提高类)三类.初学者可略过选学内容、提高类习题而不影响内容的连贯性和完整性.本教材的基本内容所需学时不少于 32 学时，选学内容供学时较多的专业或学有余力、打算考研的学生选用.全部讲授约需 50～60 学时(含习题课).

本书初稿的第一、四、五、六章由唐明编写，二、三、七、八章由李川生编写，附录一由邬学军编写，唐明负责全书的统稿修订.初稿共进行了四轮教学试点，广泛征求并汲取了许多意见，边试边改，同事和学生们的关心支持使我们受益匪浅.在此基础上进行了一次全面修改.修改稿的第一、二章由冯鸣执笔、第三、四章由唐明执笔、第五、六、七章由王定江执笔.本教材的编写、试点和修改得到了浙江工业大学应用数学系诸多同仁，特别是徐湄茎、邬学军、周明华等老师的大力支持和帮助，同时也得到了参与试点的浙江工业大学的四届数千学生的支持和协助.更重要的是，本稿还得到了骆程、姜豪、何伯镛、陈道琦、邸继征等教授的审阅和指导，特在此专致鸣谢！

由于我们水平有限、经验不足，书中的缺点错误肯定还有不少，希望关心爱护本教材的同仁和读者多多提出意见和建议，以帮助我们进一步修改完善.

编　者
2004.6
于浙江工业大学

目　录

第四章　线性方程组

第五章　向量空间

第六章　特征值问题与矩阵变换

第七章　二次型

第八章　线性空间与线性变换*

附 录

绪　论

线性代数，是研究有限维向量空间和线性变换的重要数学分支，它的思想、方法和结论在科学技术、工程技术、管理科学等众多领域都有着广泛的应用．现代科学技术和管理科学，尤其是计算机技术和网络技术的飞速发展，都需要这个基础；而它的集成化思维方式，对训练和提高学生的计算能力、抽象思维、逻辑推理、数学表达等也都非常有益．随着世界进入信息和网络时代，线性代数的方法和思想日渐为人们所重视．

根据工科大学本科教学大纲的要求，在《线性代数》课程中我们将要学习向量、行列式、矩阵这三个“块状”的数学工具，学习它们的基本运算和主要性质，并用它们对多元问题进行整体的表达和处理．同时我们还要学习“集成化”的思想，领悟线性关系、秩、线性空间、线性变换这类比较抽象的概念．并运用这些新工具和新思想来处理多元线性方程组和多元二次型这两大问题，使我们的计算能力、思维方式和数学感悟都得到较大的提升．

对一般的工科专业，遗憾的是，《线性代数》课程只有短短的 32 学时，我们只来得及走马看花，为今后学习打一些必要的基础，要想实实在在地登上这个新台阶，还有赖于以后的进一步学习和应用．所以本教材在尽可能简要介绍基本内容的基础上，为读者的深化和拓展留下了一定的余地．

下面把本教材的主要内容作一个框架式的介绍：

当我们面对互相交织的 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 时，为了不至于“顾此失彼”，便希望能对它们作“整体”处理，于是人们从物理和几何的实例中提炼出了“向量”$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的概念，即把 n 个变量集成为一个整体．利用向量的概念和向量的线性运算，一般的 $m\times n$ 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{0.1}$$

可以表达为

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1+\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2+\cdots+\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

可见多元线性方程组实际上反映了向量之间的线性表示关系．当方程组的方程个数 m 等于变量个数 n 时，称之为“方形的”，此时有一个用起来较为简便的“块状工具”——行列式．本书第一章将介绍其定义、性质和算法．借助这个工具，将“方形”方程组的系数“集结”成行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{0.3}$$

当 $D\neq 0$ 时，就可以通过再计算另几个行列式来得出方程组的解．这就是一种初步的“整体处理”的方式．

若 $D=0$，或甚至 $m\neq n$（此时没有行列式），上述方法失效，但上述思维为我们开启了另一道门，引出了另一个更为灵活而强大的“块状工具”——矩阵：

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{0.4}$$

本书第二章着重介绍了矩阵的基本代数运算和初等变换，并初步介绍了怎样用矩阵来解一般的 $m\times n$ 线性方程组．一些理论问题将会在这里浮现出来：方程组(0.2)还可以进一步表达为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_n=\boldsymbol{\beta}_m, \tag{0.5}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的 n 个列，恰是方程组(0.2)的 n 个变量前的向量，那么，这些向量间的关系与矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的性质有何联系？方程组的解与这些性质又有何关系？从中可以引出些什么一般性结论？——算法在这里呼唤相应的理论支撑，否则算法就会没有灵魂，所以在这里需要引进理论性的思考．

审视向量和矩阵的线性运算，再比较实数、复数、多项式、函数等等的线性运算，可以提炼出一种很一般的关系——线性关系．本书第三章从讨论向量的线性关系入手，引出了向量组的极大无关组、向量组的秩、矩阵的秩等相当深刻的概念，

第四章就用上述的概念和有关算法，对线性方程组的分类、求解以及解集的结构，作出了完整的理论性说明，解方程组的算法也就有了坚实的理论内涵．

第五章继续进行思想提升：第一节由向量的线性关系提升到向量空间，阐述了怎样通过把握空间的结构，用有限的方式把握一个无限的对象；第二节定义了一种新的向量运算——向量的内积，进而引入一系列度量概念：长度、范数、距离、夹角、垂直（正交）等，形成了初步的欧氏空间．第五章最后，在正交规范基的基础上引出了正交阵和正交变换，把我们的讨论又拉回到矩阵．

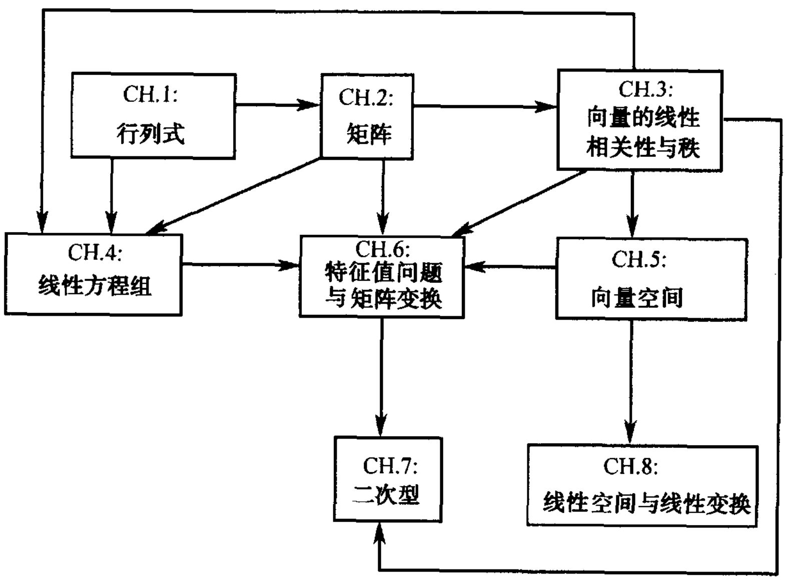
第六章再对矩阵作延伸，在特征值和特征向量的基础上比较了四种矩阵变换（初等变换、相似变换、合同变换、正交变换）在定义上、性质上、功能上的区别和联系，把前几章对矩阵的讨论提升了一步.

第七章接着把上面的工具应用到一类多元二次齐次问题——二次型（标准化和正定性）上. 正如中学对一元代数的讨论结束于二次函数一样，本课程对多元代数的讨论，也在处理二次型后告一段落.

如果你对上面的思维提升感觉到还不够、或希望更好地与以后的学习相衔接，那第八章以及其余各章最后一节附录中的延伸内容，就是为你准备的（也可供《线性代数》课程学时较多的专业选用）.

本绪论只是给初学者一个导游图，也是对希望学好这门课的同学们的一个思想预热，意在使同学们了解：你将要面对的，不只是几种新的数学对象和新的算法，更重要的是一个思维提升的过程. 实现这个提升是不那么容易的，在这里必须摈弃取巧、功利和浮躁的心态. 踏踏实实、潜心思考和善抓要点，将是攀登这一台阶的"三叉戟".

本书各章的逻辑关系图



第一章 行 列 式

行列式,是线性代数中基本的运算工具之一,它在数学及其他学科中都有广泛的应用.本章从排列的逆序概念入手,引进 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法,最后介绍行列式的一个典型应用——求解线性方程组的 Cramer 法则及其重要推论.

§1.1 行列式的概念

一、全排列与逆序

定义 1.1 由 n 个不同元素排成一行,称为这 n 个元素的一个全排列(或简称 n 级排列).

n 个不同元素的所有不同的排列共有 $P_n = n!$ 种.我们主要讨论 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 所构成的排列.

首先规定一个标准排列次序:称 $12\cdots n$ 为标准序(即规定左小右大为**顺序**).由 $1,2,\cdots,n$ 所构成的任一排列中,若某两个元素的排列次序与顺序不同,就称为一个逆序.例如:1,2,3 排成的 3 级排列,共可有 $P_3=3!=6$ 种:123,132,213,231,312,321.其中 123 就是标准排列,而在 132 中,3 在 2 的左边,与标准序不同,故 3,2 之间有 1 个逆序.

一般地,n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个任意排列记作 $p_1p_2\cdots p_n$,若第 i 个位置上的元素 p_i 的左边有 t_i 个元素比 p_i 大,就说元素 p_i 的逆序是 t_i.一个排列中所有逆序的和,称为这个**排列的逆序数**,记作 $t(p_1p_2\cdots p_n)$或简记为 t,因此排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数就是

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i. \tag{1.1}$$

例 1.1 求排列 641523 的逆序数.

解 6 级排列的标准序为 123456,下面逐一分析各数的逆序数.

首位 6 的逆序数为 0;4 的逆序数为 1;1 的逆序数为 2;5 的逆序数为 1;2 的逆序数为 3;3 的逆序数为 3.所以由公式(1.1),排列 641523 的逆序数 $t=0+1+2+1+3+3=10$.

例 1.2 求排列 $n(n-1)\cdots 1$ 的逆序数.

解　n 级排列的标准序为 $12\cdots n$.

首位 n 的逆序数为 0；$n-1$ 的逆序数为 1；$n-2$ 的逆序数为 2；…；2 的逆序数为 $n-2$；1 的逆序数为 $n-1$. 所以由公式(1.1)，排列 $n(n-1)\cdots1$ 的逆序数为

$$t=t[n(n-1)\cdots1]=0+1+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

称 t 为奇数的排列为**奇排列**，而 t 为偶数的排列为**偶排列**. 如例 1.1 中的排列就是一个偶排列；排列 561423 也是一个偶排列，而排列 461523 就是一个奇排列；容易想到，$n!$ 个不同的 n 级排列中，奇排列和偶排列各占一半.

定义 1.2　将一个排列中的任意两个元素的位置交换，而其余元素不动，得到一个新的排列，这称为对换. 若对换的是相邻的两个元素，则称为相邻对换.

排列 461523 可由排列 641523 进行一次相邻对换得到，也可由排列 561423 进行一次不相邻对换得到，这里排列 641523 和排列 561423 都是偶排列，而排列 461523 是一个奇排列，可见进行一次对换(无论相邻与否)将改变排列的奇偶性. 一般地我们有：

定理 1.1　一个排列经过一次元素对换，排列的奇偶性改变一次.

证　先证相邻对换的情形. 设排列

$$\cdots ij\cdots \tag{1.2}$$

经过一次相邻对换后变成排列

$$\cdots ji\cdots \tag{1.3}$$

这里“…”表示排列中其余那些不动的元素. 容易看出，i，j 和其他的元素之间的逆序没有改变，改变的只是 i 和 j 二者的次序：若 $i<j$，则在排列(1.2)中 ij 不构成逆序，但在排列(1.3)中 ji 成一个逆序，故(1.3)的逆序数比(1.2)的逆序数增加 1；若 $i>j$，则在排列(1.2)中 成一个逆序，但在排列(1.3)中则没有逆序，故排列(1.3)的逆序数比排列(1.2)的逆序数减小 1. 总之，排列(1.3)与排列(1.2)的奇偶性不同.

再证一般对换的情形. 设排列

$$\cdots ib_1b_2\cdots b_kj\cdots \tag{1.4}$$

将 i 与 j 对换，变成排列

$$\cdots jb_1b_2\cdots b_ki\cdots \tag{1.5}$$

这一过程可视为(1.4)先经 k 次相邻对换(i 向后换)，变成排列

$$\cdots b_1b_2\cdots b_kij\cdots \tag{1.6}$$

又经 $k+1$ 次相邻对换(j 向前换)，就变成排列了(1.5)，于是可知排列(1.4)可经 $2k+1$ 次相邻对换变成排列(1.5)，因此排列(1.4)与排列(1.5)的奇偶性改变了 $2k+1$ 次，故必相异. ◆

推论　奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证　由定理 1.1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是逆序数

为零的偶排列，故推论成立.◆

二、n 阶行列式的定义

定义 1.3　由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行、n 列，构成的运算式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{1.7}$$

称为 n 阶行列式，简记为 $\det(a_{ij})$，其中 a_{ij} 为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素，$q_1q_2\cdots q_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数.

从定义 1.3 可知，n 阶行列式的运算式 $\sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 中，一般项 $(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 由 n 个位于不同行不同列的元素相乘而得，符号由排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数的奇偶性决定.

特别规定，一阶行列式 $|a|=a$. 注意这里的行列式记号不要与绝对值记号混淆.

例 1.3　用定义 1.3 计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解　在 $\sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}a_{4q_4}$ 中，要使 $a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}a_{4q_4}\neq 0$，应取 $a_{3q_3}=a_{32}$，从而 $a_{1q_1}=a_{14}$，$a_{4q_4}=a_{43}$，$a_{2q_2}=a_{21}$，所以只有 $a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}a_{4q_4}=a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ 是非零的，4123 的逆数序为 3，故

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3}a_{4q_4}=(-1)^3\times 1\times 1\times 1\times 1=-1.$$

在行列式 D 中，将 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所组成的对角线称为 D 的**主对角线**，这些元素称为**主对角元**. 而 $a_{1n},a_{2(n-1)},\cdots,a_{n1}$ 所组成的对角线则称为 D 的**副对角线**.

称主对角线以上(下)的元素全为零的行列式称为下(上)**三角形行列式**.

用例 1.3 的思想可以推得：下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii};$$

上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

除了主(副)对角线元素外其他元素都为零的行列式称为**主(副)对角行列式**. 如

$$\text{主对角行列式}\quad D_1=\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n; \tag{1.8}$$

$$\text{副对角行列式}\quad D_2=\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & ⋰ & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n. \tag{1.9}$$

(1.8)式是显然的,下证(1.9)式:在行列式定义式$\sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$中,非零的只有一项

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}=a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}=a_1a_2\cdots a_n,$$

而其逆序数 $t=t(q_1q_2\cdots q_n)=t[n(n-1)\cdots 1]=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$,所以 $D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$.◆

定理 1.2 **n 阶行列式也可定义为**

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}, \tag{1.10}$$

其中 t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

证 由行列式定义,$D=\sum(-1)^N a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$,$N$ 为 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数. 记

$$D^T=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},\ t\ \text{为}\ p_1p_2\cdots p_n\text{的逆序数}.$$

取 D 中任一项$(-1)^N a_{1q_1}\cdots a_{iq_i}\cdots a_{jq_j}\cdots a_{nq_n}$,其行标 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为标准排列,逆序数为 $t_1=0$,记列标的逆序数为 $t_2=t(q_1\cdots q_i\cdots q_j\cdots q_n)$. 对换 a_{iq_i}与 a_{jq_j}得 $a_{1q_1}\cdots a_{jq_j}\cdots a_{iq_i}\cdots a_{nq_n}$,记对换后的行标排列的逆序数为 $r_1=t(1\cdots j\cdots i\cdots n)$,列标排列的逆序数为 $r_2=t(q_1\cdots q_j\cdots q_i\cdots q_n)$,则 r_1 为奇数,r_2 与 t_2 的奇偶性也不同,由于该项中两元素的次序对换,使行标排列与列标排列同时作了一次对换,则对换后的行标、列标排列的逆序数之和的奇偶性,与原来行标、列标排列的逆序数之和的奇偶性必相同:$(-1)^N=(-1)^{t_1+t_2}=(-1)^{r_1+r_2}$,故该项的值(连符号)不变:

$$(-1)^N a_{1q_1}\cdots a_{iq_i}\cdots a_{jq_j}\cdots a_{nq_n}=(-1)^{r_1+r_2}a_{1q_1}\cdots a_{jq_j}\cdots a_{iq_i}\cdots a_{nq_n}.$$

依此类推,经若干次元素对换,将该项的列标排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 变成标准排列 $12\cdots n$,同时

行标排列也就从自然排列 $12\cdots n$ 变成了 $p_1p_2\cdots p_n$，此时逆序数分别变为 $R_1 = t(p_1p_2\cdots p_n)$，$R_2 = t(12\cdots n)=0$，由于每次对换都不改变两个逆序数之和的奇偶性，故最后该项的符号仍不变：

$$(-1)^N = (-1)^{R_1+R_2} = (-1)^t.$$

即
$$(-1)^N a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} = (-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

因此对 D 中任一项 $(-1)^N a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，$D_T$ 中有且仅有一项 $(-1)^t a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等. 同理，对 D^T 中的任一项，D 中也有且仅有一项与之对应并相等，即 D 与 D^T 中的项可以一一对应并相等，故 $D=D^T$. ◆

进而，我们可得到更一般的行列式定义：

推论 n **阶行列式一般可定义为**

$$D = \sum(-1)^{t_1+t_2}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n} \tag{1.11}$$

其中 $p_1\cdots p_n$，$q_1\cdots q_n$ **分别为行标排列和列标排列，它们的逆序数分别为** $t_1 = t(p_1\cdots p_n)$，$t_2 = t(q_1\cdots q_n)$.

当行标或列标呈标准排列时，有 $t_1=0$ 或 $t_2=0$，便得到前面的定义 1.3 和定理 1.2.

三、二阶行列式，三阶行列式

在行列式定义 1.3 中，当 $n=2$ 时为二阶行列式，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{t_1}a_{11}a_{22} + (-1)^{t_2}a_{12}a_{21}$$

其中 t_1 是 $a_{11}a_{22}$ 列标排列 12 的逆序数，$t_1 = 0$；t_2 是 $a_{12}a_{21}$ 列标排列 21 的逆序数，$t_2 = 1$. 故二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

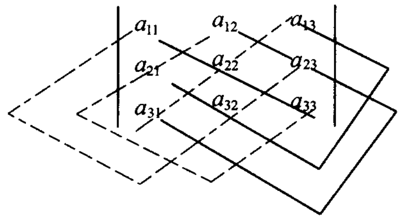
即二阶行列式的值等于主对角元乘积减副对角元乘积. 例如

$$\begin{vmatrix} 25 & -8 \\ 125 & 4 \end{vmatrix} = 25\times 4 - (-8)\times 125 = 100 + 1000 = 1100.$$

当 $n=3$ 时为三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，根据行列式定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1q_1}a_{2q_2}a_{3q_3} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

式中六项可按下面所示的“对角线法则”得到



例如，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0-3\times0\times(-1)-2\times4\times6$
$-1\times5\times0=-58.$

§1.2 行列式的性质

一、行列式的基本性质

把行列式 D 的行、列互换所得到的行列式称为 D 的**转置行列式**，记作 D^{T}，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则
$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证　将 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式记作

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则由行列式定义 1.3 及 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 知

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

（其中 t 为 $p_1p_2\cdots p_n$ 逆序数）

于是由定理 1.2 得：$D=\sum(-1)^{t}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}=D^{\mathrm{T}}$.◆

由性质 1 可知，行列式中行与列具有对等的地位，对行成立的性质，对列也成立，反之亦然. 以下我们仅讨论行的性质，然后引申到列即可.

性质 2　行列式两行(列)互换，行列式的值变号.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

又记

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 D_1 由行列式 D 互换第 i 行与第 j 行得到. 由定义知

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{t}b_{1q_1}\cdots b_{iq_i}\cdots b_{jq_j}\cdots b_{nq_n}=\sum(-1)^{t}a_{1q_1}\cdots a_{jq_i}\cdots a_{iq_j}\cdots a_{nq_n} \\ &= \sum(-1)^{t}a_{1q_1}\cdots a_{iq_j}\cdots a_{jq_i}\cdots a_{nq_n} \end{aligned}$$

$$D=\sum(-1)^{t_1}a_{1q_1}\cdots a_{iq_j}\cdots a_{jq_i}\cdots a_{nq_n}$$

其中 $t=t(q_1\cdots q_i\cdots q_j\cdots q_n)$，$t_1=t(q_1\cdots q_j\cdots q_i\cdots q_n)$. 由定理 1.1 知，$t_1$ 与 t 的奇偶性正好相反，即 $(-1)^{t}=-(-1)^{t_1}$，所以 $D_1=-D$.◆

以 r_i 表示第 i 行，c_i 表示第 i 列，则 $r_i\leftrightarrow r_j$ 表示交换 i,j 两行，$c_i\leftrightarrow c_j$ 表示交换 i,j 两列.

由性质 2 即可得到下面的推论.

推论　若行列式 D 中有两行(列)元素对应相等，则 D 的值为零.

证　把 D 相同的两行(列)互换，所得行列式记作 D_1，则由性质 2 得 $D_1=-D$，而 D 实际上没有变，故应有 $D_1=D$，所以 $D=0$.◆

性质 3　用数 k 乘以行列式 D，等于将该数 k 乘到 D 的某一行(列)中所有的元素上.