

PLANE GEOMETRY

By

SCHULTZE
SEVENOAK & SCHUYLER

ES

平面幾何學

駱承緒譯 駱師曾校訂



香港中流出版社印行

三 S

平面幾何學

緒 譯
承 訂
駱 會 校
蘇 工 業 學 院 圖 書 館

藏 書 章

香港中流出版社印行

三 S 平面幾何學

駱承緒譯 駱師曾校訂

出版兼發行者：

中 流 出 版 社

香港北角渣華道82號二樓

印 刷 者：

嶺 南 印 刷 公 司

香港德輔道西西安里十三號

一九七八年八月版 定價港幣九元

版權所有 · 不准翻印

譯 例

1. 本書依美國人 Schultze, Sevenoak 及 Schuyler 三氏所著之幾何學逐譯，分爲平面與立體二冊，專供中學教科及與原書對照之用。
2. 原書爲幾何教科書之善本，雖已有譯本刊行，但名著不妨多譯以廣其傳，往時吾國對於查理斯密及溫德華士所著之算學各書，常有一書而數譯者，卽其先例。
3. 所用譯名，悉遵教育部頒布之課程標準，具有標準中所未詳者，則擇最通行者而用之。
4. 本書排印，悉依原書之頁數，以便檢查對照。
5. 譯書以信達雅三字爲尙，本書卽以此自期，但疏忽之處，容或難免，倘蒙賜教，毋任感激。

幾何學

聳立在埃及尼羅河畔著名之金字塔，爲五千年前幾何圖形之一種變裝也。具有如此古遠歷史之幾何問題，不特種類不一，變化繁多；且無一定有系統之研究方法，誠爲複雜。學者宜如何着手學習此種問題，頗費思索。茲特臚列各項心得，以爲初學者之參考。

(一) 首先須明瞭題意 學習幾何題目，先須熟讀題目，明瞭命題之意義。題目假設之條件爲何？有何要求？需何證明？凡此種種，均須於明瞭之後，方能着手解答。否則徒費腦力與時間，無補實際。事倍功半，得益淺鮮。且易發生錯誤。

(二) 次及於運用定理 幾何學之基礎，係建築於許多定理與原理之上。學者於學習幾何學之初，即須學習此種定理。不特須了解其原理，熟習其證法；且須記憶此種定理之文字，知道其運用之方法。則於着手解答題目之時，方可得心應手，運用自如。

(三) 繪出準確必需之圖形 許多幾何問題之解答，均須藉圖形以爲幫助。蓋幾何學原爲圖形

學習要點

之學問也。由於繪出正確之圖形，可獲得解答之領悟。於是推理及思考，亦容易取得門徑矣！

(四) 推考思索以自求解答 幾何學理之探討，較為呆板。祇須熟讀記憶，融會貫通，即可應用。但幾何習題之作答，則須細加思索，詳為推考，方能領會體味，而得思想上之進步。尤須注重自動之能力。本冊將習題與解答分冊出版，俾養成讀者獨立解答之能力與自動思考之習慣。所以編印解答之作用，不過在給予暗示，作為讀者參考之資料與無法解答時之借鑑而已。

(五) 培養推論與判斷之能力 斷片之智識，不能發生有效之功用。故必須聯貫之以合應用。本書中竭力作有系統之研究，諸君讀之，常可看出習題解法之原理潛在何處。再進而求解答，乃可養成集中全部智識，以求獲得解答之推論力與判斷力。

上述五端，為個人學習幾何學時所獲得之心得。讀者若能身體力行，或可有助於學習之進步焉！

目 錄

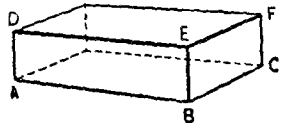
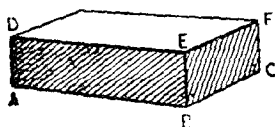
導 言.....	1
定義.....	1
角.....	4
幾何畫之練習.....	11
普通名詞.....	13
公理及公設.....	14
第一編 直線與直線形.....	17
初步定理	17
三角形——部分 I.....	21
作圖題.....	37
平行線	43
三角形——部分 II.....	58
不等線與不等角.....	67
四邊形.....	76
定理的分析.....	93
第二編 圓——作圖題.....	102
初步定理.....	103
作圖.....	134

問題之解析.....	141
軌跡.....	144
軌跡定理.....	145
第三編 比例 相似多邊形.....	153
比例線.....	162
相似多邊形.....	169
第四編 多邊形之面積.....	205
第五編 正多邊形 圓之度量.....	230
正多邊形.....	234
附 錄	
用代數解析法之問題解法.....	263
平面形之極大及極小.....	265
對稱.....	273
根據極限上不可通約之情形.....	275
平面幾何應用題.....	281
三角函數.....	301
幾何學歷史概要.....	305
數值計算法.....	308
重要公式表.....	310
線值公式.....	311
平面形之面積.....	311
英漢名詞對照表.....	315

導 言

定 義

1. 凡自然的物體，如木塊鐵條等，皆佔空間之一定部分，此所佔空間之部分，名爲幾何立體或立體。



2. 定義。立體是空間之有限部分，具有三向度，即長，闊及厚。

3. 定義。面是立體之界；如 $ABED$ 或 $BEFC$ (§1 之圖)，具有二向度，即長及闊。

窗戶玻璃與空氣之界即爲面 可見如此之界無厚。

4. 定義。線是面之界；如 AB , AD (§1 之圖)，僅有一向度，即長。

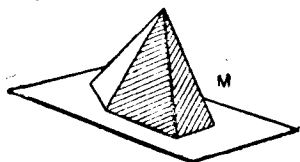
如右邊黑線 AB 非幾何學上之線，因其有闊故也。但其黑白中間之界，始可代表真正幾何學上之線。



5. 定義。點是線之界或端，無向度，而僅有位置。

面可視作不屬於其所圍成之立體而獨立存在。同理，線與點亦可獨立存在於空間。

6. 定義. **幾何圖形**是點,線,面,或立體,或其中任何幾種所組成之圖形,如 M 或 N .



直線形是完全用直線所組成之圖形。

7. 定義. **幾何學**是研究幾何圖形性質之科學。

8. 最簡單之線是**直線**. 約略可用兩點中間之緊張絲線代表之;如 AB . 通常稱線,皆指直線。



直線之觀念既如此簡單而又為基本的,故實難下一完美之定義。

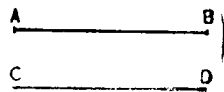
9. 定義. **曲線**是無一部分為直之線;如 §8 之 CD .

10. 定義. **折線**是由不同方向諸直線連接而成之線;如 §8 之 EF .

折線之連接的二部分,不在同一直線上。

11. 通常稱直線,皆用以表示無限直線或其一部分。

定長之直線,稱為**線分**,或**線段**,用兩端有記號之直線表之;如 AB . 此直線之長,亦稱為 A 與 B 中間之距離。



直線之兩端無記號者,表示無限直線;如 CD .

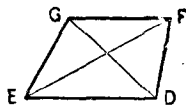
12. 直線 AB 之方向，即為從 A 至 B 的方向；又 BA 之方向，即為從 B 至 A 之方向。



13. 延長直線 AB ，意謂使其經過 B 而延長；延長 BA ，意謂使其經過 A 而延長。

14. 定義。連結一面中任何二點之直線，皆在此面上者，則此面稱為平面。

15. 定義。平面圖形是一幾何具全部各圖形，點皆在同一平面上者；如 $EDFG$ 。



16. 定義。平面幾何學專研究平面圖形。

17. 定義。立體幾何學是研究不在同一平面上之圖形。球面幾何學是一種表面幾何學。

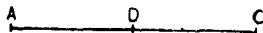
【註】表面幾何學研究在同一曲面上的圖形。

18. 一圖形置於他圖形上而各點能互相密合時，此二圖形稱為重合。

19. 定義。能使其重合之二圖形稱為全等形。因此，全等線常稱等線。同理，全等角常稱等角。（參看 205 頁之註）

20. 疊合證法是將兩個圖形重合而證明其為全等之方法。

21. 平分一線，意謂分此線為相等二部分。



例如設 $AD = DC$ ，則 AC 即被平分。我們假定每一線段 (AC) 僅有一平分點，則此平分點是一點；如 D 。

習題 1. 一動點所經過之路如何？

習題 2. 在普通情形，移動一線，發生何種幾何圖形？移動一面則如何？

習題 3. 一直線移動，能否不成爲一面？

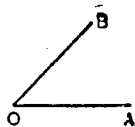
習題 4. 石匠如何用直尺以決定面之是否爲平面？

習題 5. 室中牆壁代表何種面？

習題 6. 煤氣管外面代表何種面？

角

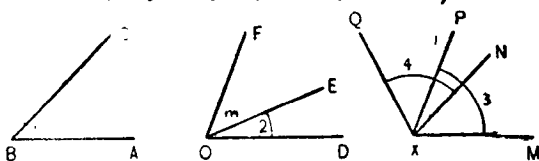
22. 設一直線 OA 環繞其中一點 O 而旋轉至 OB 之位置，此旋轉所生之量，稱爲角 AOB 。可見此旋轉之量即角之大小，與旋轉時線之長短並無關係。



線 OA 及 OB 稱爲角 AOB 之邊，點 O 稱爲角之頂點。

我們可下一定義，角是由一公共點發出二射線或二半直線所成之圖形。

23. 記法。設用三字母表一角，則頂點一字母應置在其他兩字母之中間；如角 ABC ，角 EOF 。在



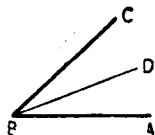
頂點處之單獨字母，常表在此頂點之最大角（設在此點有不同之數角）。如角 DOF 可讀作“角 O ”，角 ABC 可讀作“角 B ”。

有時亦可用一數字，或一小寫字母記在角內以表示一角；如角 1，角 2，角 m 。

角 FOD 是角 2 與角 m 之和。角 2 是角 FOD 與角 m 之差。

有時在點以外畫一曲線，意在使所指之角愈覺明顯；如角 2，及角 3。如畫弧須接近於指角之數字。如角 MXP 可讀作“角 3”，又角 NXQ 可讀作角“4”。

24. 平分一角，意謂分此角為相等之二部分。我們假定每一角僅有一平分線。



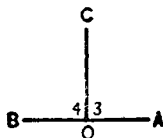
例如，設角 $ABD =$ 角 DBC ，則 BD 即平分角 ABC 。而 BD 名為角 ABC 之平分線。

25. 定義。平角是角之一邊在同一直線上而依反對方向伸展者；如 ABC 。



26. 定義。直角是等於平角一半之角。

例如，設 OC 二等分平角 AOB ，則角 3 與角 4 皆為直角。



直角



銳角



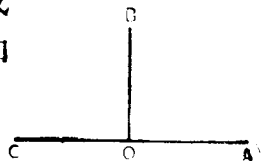
鈍角

27. 定義。銳角是小於直角之角；如角 5。

28. 定義。鈍角是大於直角而小於平角之角；如角 MNO 。

29. 定義. 銳角及鈍角皆稱為**斜角**.

30. 定義. 設二直線相交成直角, 則此二直線稱為**互相垂直**; 如 AC 與 BO .

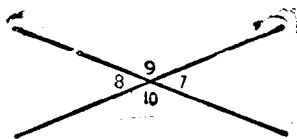
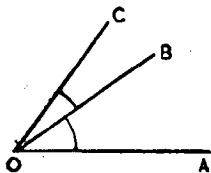


其交點(O)稱為**垂足**.

從一點至一直線之**距離**, 即為從此點至此直線所作垂線之長; 如 BO .

31. 量角之大小, 即求其包含某單位之若干倍. 尋常所用之單位是度, 即一直角九十分之一. 一度等分為六十份, 每份名為分; 一分又等分為六十份, 每份名為秒. 度, 分, 秒常用記號表示, 如 $6^{\circ}50'12''$, 讀作六度五十分十二秒. 其他單位為直角與平角.

32. 定義. **鄰角**是有一公共頂點, 及其間有一公共邊之二角; 如角 AOB 與角 BOC .

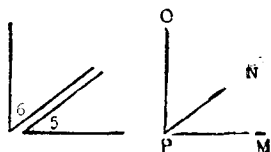


33. 定義. 設一角之二邊, 是他角二邊過公共頂點之延長線, 則此二角名為**對頂角**; 如角 7 與角 8, 或角 9 與角 10.

34. 定義. 欲將二角相加, 可置之使成鄰角. 其非公共二邊所成之角, 稱為此二角之**和**.

35. 定義. 設二角之和等於一直角，則此二角互為餘角。

各角稱為他角之餘角，如角 5 與角 6，或角 MPN 與角 NPO 皆互為餘角。



36. 設二角之和等於一平角(或二直角)，則二角互為補角。



各角稱為他角之補角。如角 1 與角 2，或角 3 與角 4，皆互為補角。

習題 1. 一直角有若干度？一平角有若干度？半直角有若干度？

習題 2. 三點鐘時，鐘面上兩針成何種角？六點鐘時則如何？兩點鐘時則如何？五點鐘時又如何？

習題 3. 一點鐘時，鐘面上兩針成何種角？兩點三十分時則如何？五點三十分時又如何？

習題 4. 車輪旋轉 $\frac{1}{2}$ 周時，其輻旋轉若干度之角？旋轉 $\frac{1}{4}$ 周時則如何？旋轉 2 周時則如何？

習題 5. 設將月餅分作 5 等分，其在中心每角之大小如何？分作六等分則如何？

習題 6. 使作二直線一向北，一向東北，則成何角？若一向南一向東南則如何？又若一向西北一向西南則如何？

習題 7. 鐘面上長針行 10 分鐘時，旋轉成何角？行 15 分鐘時則如何？行 30 分鐘時則如何？行 45 分鐘時則如何？行一點鐘時則如何？

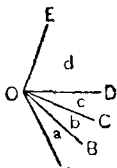
習題 8. 在習題 9 之圖中，試用三字母讀出： $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$, $\angle(a+b)$, $\angle(b+c+d)$.

習題 9. 在與此類似之圖形中, 求指定各角之數值:

- (a) 設 $\angle a = 30^\circ$, $\angle b = 40^\circ$, 求 $\angle AOC$.
 (b) 設 $\angle b = 35^\circ$, $\angle c = 10^\circ$, 求 $\angle BOD$.
 (c) 設 $\angle b = 40^\circ$, $\angle c = 10^\circ$, $\angle d = 50^\circ$, 求

$\angle BOE$.

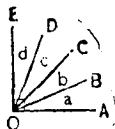
- (d) 設 $\angle AOC = 60^\circ$, $\angle b = 40^\circ$, 求 $\angle a$.
 (e) 設 $\angle AOD = 90^\circ$, $\angle a = 35^\circ$, $\angle c = 10^\circ$, 求 $\angle b$. (習題 9)
 (f) 設 $\angle AOE = 110^\circ$, $\angle a = 20^\circ$, $\angle d = 30^\circ$, 求 $\angle BOD$.
 (g) 設 $\angle AOC = 60^\circ$, $\angle a = \angle b$, 求 $\angle a$.
 (h) 設 $\angle AOD = 75^\circ$, $\angle a = \angle b = \angle c$, 求 $\angle c$.



習題 10. 在前圖中, 何角是 $\angle BOC$ 之鄰角? 何角是 $\angle COD$ 之鄰角? 何角是 $\angle BOD$ 之鄰角?

習題 11. 在與所示相類似之圖形中, 設 $\angle O = 90^\circ$:

- (a) 何角是 $\angle a$ 之餘角?
 (b) 何角是 $\angle AOC$ 之餘角?
 (c) 何角是 $\angle BOE$ 之餘角?
 (d) 設 $\angle d = 20^\circ$, 求 $\angle AOD$.
 (e) 設 $\angle b = 20^\circ$, $\angle COE = 55^\circ$, 求 $\angle a$.
 (f) 設 $\angle AOC = 55^\circ$, $\angle d = 15^\circ$, 求 $\angle c$.
 (g) 設 $\angle a = \angle b = \angle c = \angle d$, 求 $\angle a$.



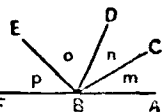
(習題 11)

習題 12. 30° 之餘角是若干度? 35° 之餘角如何? 直角之餘角如何? n° 之餘角如何? $\frac{1}{n}$ 直角之餘角如何? $(10+x)^\circ$ 之餘角如何?

習題 13. 一角是其餘角之 2 倍, 求此角是若干度?

習題 14. 在與附圖, 類似之圖中設 FBA 是一直線:

- (a) 何角是 $\angle p$ 之補角?
 (b) 何角是 $\angle DBF$ 之補角?
 (c) 何角是 $\angle ABE$ 之補角?
 (d) 設 $\angle p = 40^\circ$, 求 $\angle ABE$.
 (e) 設 $\angle m = 30^\circ$, $\angle p = 35^\circ$, 求 $\angle CBE$.
 (f) 設 $\angle DBF = 100^\circ$, $\angle m = \angle n$, 求 $\angle m$. (習題 14)
 (g) 設 $\angle p = 30^\circ$, $\angle m = \angle n = \angle o$, 求 $\angle o$.
 (h) 設 $\angle FBC = 140^\circ$, $\angle ABD = 80^\circ$, 求 $\angle n$.
 (i) 設 $\angle ABD = 90^\circ$, $\angle n = 35^\circ$, $\angle CBE = 85^\circ$, 求 $\angle p$.



習題 15. 20° 之補角是若干度? 140° 之補角如何? $\frac{3}{4}$ 平角之補角如何? n° 之補角如何? $(50-3x)^\circ$ 之補角如何?

習題 16. 一角是其補角之 3 倍, 求此角是若干度?

習題 17. 何種角比其補角小? 何種角與其補角相等? 何種角比其補角大?

習題 18. 試用代數記號記出:

(a) n° 之餘角, (b) x° 之餘角 3 倍.

(c) $(2x)^\circ$ 之補角, (d) n° 之補角 6 倍.

習題 19. 在與附圖類似之圖中, 求指定各角之數值:

(a) 設 $\angle a = 80^\circ$, $\angle b = 50^\circ$, $\angle c = 60^\circ$,

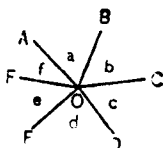
$\angle d = 90^\circ$, $\angle e = 50^\circ$, 求 $\angle f$.

(b) 設 $\angle a = \angle b = \angle c = \angle d = \angle e = \angle f$,
求 $\angle f$.

* (c) 設 $\angle AOC = 130^\circ$, $\angle b = 50^\circ$,

$\angle BOD = 110^\circ$, $\angle DOF = 140^\circ$, 求 $\angle f$.

(d) 設 $\angle d = 90^\circ$, $\angle c = \angle b = \angle a = \angle f = \angle e$, 求 $\angle a$.



(習題 19)

習題 20. 設二直線 AB 與 CD 相交於 O , 成 $\angle AOC = 60^\circ$, 求其餘各角.

習題 21. 設 $\angle AOC = m$ 度, 則 $\angle DOB$ 是若干度? 又 $\angle BOC$ 如何?

習題 22. 設 $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$, 求 $\angle AOD$: A (習題 20, 21)

(a) 設 $\angle BOC = 60^\circ$.

(b) 設 $\angle BOC = m^\circ$.

習題 23. 角 BOC 與角 AOD 有如何關係?

習題 24. 設 AO 垂直於 CO , 又 BO 垂直於 DO , 求 $\angle AOD$: (習題 22, 23)

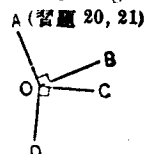
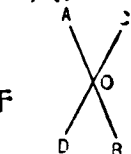
(a) 設 $\angle COB = 40^\circ$.

(b) 設 $\angle COB = m^\circ$.

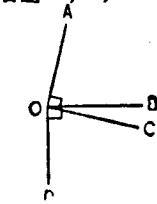
習題 25. $\angle AOD$ 與 $\angle BOC$ 有如何關係?

* 習題 26. 設 $\angle AOC = \angle BOD = 90^\circ$,

$\angle AOD = 3\angle BOC$, 求 $\angle BOC$.



(習題 22, 23)



(習題 24—26)