研究生教学用书
教育部学位管理与研究生教育司推荐

组合矩阵论

Combinatorial Matrix Theory

（第二版）

柳柏濂 著

科学出版社
www.sciencep.com

研 究 生 教 学 用 书
教育部学位管理与研究生教育司推荐

组合矩阵论

Combinatorial Matrix Theory

(第二版)

柳柏濂 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书介绍近20余年发展起来的一个新分支——组合矩阵论.内容包括矩阵和图的谱、矩阵的组合性质、非负矩阵的幂序列和矩阵方法与矩阵分析等.本书第一版是国内第一本介绍组合矩阵论的著作,填补了我国在这方面理论的空白.现在作为教育部审定的全国研究生教材重新出版,作者对原著作了增删,并补充了各章的习题和解答、必要的附录,更便于读者的教学和参考.

本书适于作为信息科学、经济数学、计算机网络以及并行计算等方向的研究生教材,同时也是该方向科学工作者极好的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

组合矩阵论/柳柏濂 著.—2版.—北京:科学出版社,2005
研究生教学用书
ISBN 7-03-014366-3

Ⅰ.组… Ⅱ.柳… Ⅲ.矩阵-组合数学-研究生-教材 Ⅳ.O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第101653号

责任编辑:杨 波 姚莉丽/责任校对:宋玲玲
责任印制:安春生/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
西源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1996年1月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2005年1月第 二 版 印张:21
2005年1月第三次印刷 字数:392 000
印数:3 601—6 600

定价:28.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

第一版序言

最近我访问加拿大、美国等地归来,收到了柳柏濂教授寄来的新著《组合矩阵论》,连日展阅,觉得题材内容清新优美,喜不释手.

特别可贵的是,这是一本成果丰硕的创造性著作,其中论述了中国中青年学者对组合矩阵论的一系列最新贡献,包括著者本人与李乔、邵嘉裕二位教授联合获得国家教委科技进步一等奖的合作成果.无疑,这些成果在国际上是居于领先地位的.

矩阵之能作为表现并分析组合论及图论问题的工具,这个很自然的思想,起源甚早,但"组合矩阵论"作为一个新的数学分支,开始被世界数学界所注目,实应归功于 H.J. Ryser 于 1973 年所做的演讲和著作.近年还出现了 Brualdi 和 Ryser 的专著.但柳柏濂的这本著作包含有不少新的题材内容,具有很不相同的特色.

从这本新著可以看出,中国学者对发展"组合矩阵论"这一新分支居于特别重要的地位,而且还为今后的组合论研究工作者开辟出一些很有前途的新方向,故本人乐意为这本新著作序,并希望今后还将见到这本书的英译本能早日问世.

徐利治

1994 年 2 月 16 日

于大连理工大学数学科学研究所

第二版前言

感谢教育部和国务院学位委员会学科评议组的专家们，把此书推荐为全国研究生教学用书.

此书出版后，一再重印.1998年被编入程民德院士主编的《现代数学基础丛书》中.2000年，正如徐利治教授在初版序言中所期望的，以本书为蓝本的英文版 *Matrices in Combinatorics and Graph Theory* (Bolian Liu and Hong-jian Lai) 在美国出版.近年来，我有幸参与了国家自然科学基金重点项目"组合矩阵论的研究"，感受到这一理论的蓬勃发展.因此借本书作为全国研究生用书再版之机，我有责任尽己所能再一次润饰，提炼和丰富它.我把全书的材料按当前研究的新进展作了补充，为了更适应教学的需要，把原书的论题作了精简，把第4、5章调整为一章，并增加了"4.9 线性方程组的符号可解性".各章配备了习题和解答，书末增加了关于线性代数和图论基础知识的附录.

王元院士为本书第二版题写的书名和徐利治先生为原书所作的序言，对我是一个永远的鞭策和鼓励.感谢国家自然科学基金和广东省自然科学基金多年来对作者研究工作的支持.科学出版社从林鹏先生、刘嘉善先生到现在的杨波先生、姚莉丽女士一直关心和扶持本书的修订和出版，周波博士、尤利华博士协助做了文字的校正，借此向他们表示衷心的谢意.

学科的发展，不是一个人、一本书所能概括得了的.如果本书的出版，能够给读者在学习和探索组合矩阵论这门新兴学科中起到一点引示作用，这便是作者最大的心愿了.

柳柏濂

2004.7 于广州

前　言

组合矩阵论是一个近20余年来兴起并发展迅速的一个数学分支.它用矩阵论和线性代数来证明组合性定理及对组合结构进行描述和分类.同时,也把组合论的思想和论证方法用于矩阵的精细分析及揭示阵列的内在组合性质.

组合矩阵论不仅与众多的数学领域(数论、线性代数、图论和概率论等)有密切的联系,而且在信息科学、社会学、经济数学和计算机科学等许多方面都有具体的应用背景.

从美国数学家H.J.Ryser 1973年1月,在题为“组合矩阵论”的讲演中,第一次提出这个数学分支开始,到最近R.A.Brualdi和H.J.Ryser的第一本专著《组合矩阵论》(*combinatorial matrix theory*)问世,其间只不过20余年,在国内外数学杂志上,组合矩阵论的新成果,新问题,新概念,新方法不断涌现,显示了这个数学新分支的强大生命力和应用前景.特别值得指出的是,在这一数学理论的创建和发展中,留下了很多中国学者领先性工作的记录.

在本书中,主要介绍了矩阵和图的谱(第1章),矩阵的组合性质(第2章),非负矩阵的幂序列(第3章),矩阵方法与矩阵分析(第4章)等主要内容.可以说,第1～3章论述了组合矩阵论的精髓,而在随后的章节,则是运用这一工具的若干专题.在本书的叙述中,我们假定读者已具备了线性代数、图论、数论的某些基本知识,对矩阵论中的一些在每一本专著几乎都能找到的定理(如非负矩阵的Perron-Frobenius定理)我们不作详细证明.

本书的写作,一方面希望向读者介绍组合矩阵论这一迅速崛起的数学分支,另一方面,希望吸引更多的学者参加这一理论的研究,因此,本书的选材,大多数是这一理论近年来日趋活跃的课题.在概述课题的研究进展时,我们对中国学者包括作者本人的工作,给予足够的注视,这也是本书与近年出版的第一本专著《组合矩阵论》(Brualdi and Ryser)不同的另一特色.

1988年作者在美国Wisconsin大学R.A.Brualdi教授的指导下开始对组合矩阵论的学习和研究.从此,作者萌发了写作本书的计划.回国后,在写作此书的过程中,得到了我的导师徐利治教授、钟集教授的热情鼓励,得到了我的师长和朋友,李乔教授、李炯生教授、邵嘉裕教授、徐明曜教授、张福基教授、张克民教授、毛经中教授、张谋成教授的帮助.李乔教授和邵嘉裕教授与作者合作的获国

家教委科技进步一等奖的成果充实了本书的内容,他们的成果给本书提供了借鉴. 徐利治教授在百忙中为本书撰写序言,对我无疑是一个扶掖和鞭策.

作者的多年研究,得到国家自然科学基金的资助,本书的出版,得到华南师范大学的支持. 我的研究生程波、周波、许亚武诸同志为本书作了大量的文字校正工作. 没有我的领导、师长、朋友、学生的支持和帮助,这本书是不可能完成的. 在此,向他们表示深切的谢意.

可以肯定,本书的写作跟不上学科发展的速度,成果更新的频密. 鉴于作者水平所限,书中错误之处在所难免,希望能够得到更多专家、读者的批评和指正.

最后,我还应该说一句不是多余的话:感谢我的妻子莫慧女士多年来对我的事业的无私奉献和支持,她不谙数学,但是,她知道,她的丈夫正在数学这块田地上默默地耕耘.

柳柏濂

1994.3. 于广州

各章阅读流程图

第 1 章　矩阵和图的谱

↓

第 2 章　矩阵的组合性质

↓

第 3 章　非负矩阵的幂序列

↓ 应用专题(选学)

第 4 章　矩阵方法与矩阵分析

目　　录

第 1 章　矩阵和图的谱

组合矩阵论的核心是矩阵的组合性质.而刻画这种以矩阵的零位模式所表现出来的组合性质的最好工具则是有向图.于是,矩阵和图成为数和形相互联系、完美结合的典范,在这种结合中,具有强烈代数性的特征值体现了它的组合性.

1.1　矩 阵 和 图

在考察矩阵的谱所表现出来的组合性质之前,我们先研究图与矩阵的联系.在这里,我们不复述线性代数和图论的一些基本概念.有需要的读者,可参阅书末的附录.

一个有向图 $D=(V,X)$,V 为标号顶点集,X 为弧集(在这里,允许有环和重弧).对 $v_i,v_j\in V$,弧 $x=(v_iv_j)$表示由 v_i 指向 v_j 的一条弧,x 称为 v_i 的出弧或 v_j 的入弧. v_i 的出(入)弧的条数,称为 v_i 的出(入)度,记为 $d^+(v_i)(d^-(v_i))$. $m\{v_i,v_j\}$表示顶点 v_i 到 v_j 的弧的条数($m\{v_i,v_j\}\geqslant 0$).特别地 $m\{v_i,v_i\}$表示点 v_i 上环(loop)的个数.设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,D 的邻接矩阵(adjacency matrix)$A(D)=(a_{ij})_{n\times n}$,其中 $a_{ij}=m\{v_i,v_j\}$.若 D 是无向图,则有弧(v_iv_j)当且仅当有弧(v_jv_i).显见,图 D 和它的邻接矩阵是一一对应的,当 D 是无向图时,$A(D)$是对称矩阵.

如无特别声明,我们考虑的有向图 $D(V,X)$是 $m\{v_i,v_j\}\leqslant 1$ 的图,$\forall v_i$,$v_j\in V$.而图 G 表示图论中研究的简单图.

于是,有向图 $D(V,X)$,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$就和一个 n 阶邻接矩阵——(0,1)矩阵 $A(D)=(a_{ij})$建立起一一对应关系.这里,

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & (v_iv_j)\in X,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

易见,我们给出一个(0,1)方阵 A,也对应于一个有向图 $D(A)$,$D(A)$叫 A 的伴随有向图(associated diagraph).于是,我们建立起矩阵 A 和有向图之间的一个一一对应.

下面给出了一个(0,1)矩阵和它的伴随有向图(见图 1.1.1).

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

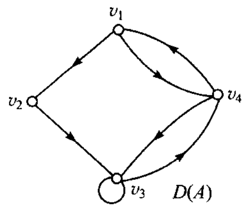

图 1.1.1

在非负矩阵论的研究中,矩阵表现出来的组合性质,仅与矩阵元素分布的零壹模式有关,而与元素数值的大小无关.因此,当我们研究非负矩阵的组合性质时,我们可以把一个非负矩阵转化为一个(0,1)矩阵来研究.从代数结构的观点来看,这种(0,1)矩阵就是布尔(Boole)矩阵,它们按通常方式定义矩阵运算时,矩阵中的元素 0,1 的加法"+"和乘法"·"按下表所示的布尔方式进行:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

显然,n 阶布尔方阵一共有 2^{n^2} 个.如果记这个集合为 B_n,则$\{B_n,\cdot\}$就构成一个半群.

由此,我们可以通过(0,1)矩阵,从而通过有向图去研究非负矩阵的组合性质.下面的特征,可以相应地作出等价的刻画.

A 的每一行(列)元素和为 r	$\longleftrightarrow$	$D(A)$每一点的出(入)度是 r
A 是置换矩阵(即每行每列恰有一个 1)	$\longleftrightarrow$	$D(A)$由若干个不交圈组成,每点恰落在一个圈上
$A=(a_{ij})_{n\times n}\leqslant B=(b_{ij})_{n\times n}$(即 $a_{ij}\leqslant b_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$)	$\longleftrightarrow$	$D(A)$是 $D(B)$的支撑子图
A 的主子矩阵	$\longleftrightarrow$	相应行对应顶点的导出子图
存在一个置换阵 P 使 $P^{-1}AP=B$(称 A 与 B 置换相似)	$\longleftrightarrow$	$D(A)$的顶点重新标号可得 $D(B)$
A 是迹为零的对称阵	$\longleftrightarrow$	$D(A)$是简单图
A 置换相似于$\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$($A_1,A_2$ 是方阵)	$\longleftrightarrow$	$D(A)$不连通(既非强连通,也非弱连通)

A 置换相似于$\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}$，$B$ 是 $s\times t$ 矩阵	$\longleftrightarrow$	$D(A)$是二部图(简单图)，B 称为$D(A)$的约化邻接阵(reduced adjacency matrix)，$D(A)$称为 B 的约化相伴二部图.
$A=(a_{ij})$，A^l 的(i,j)元 $a_{ij}^{(l)}>0$	$\longleftrightarrow$	$D(A)$中有从 v_i 到 v_j 的长为 l 的途径(walk).

上述的最后一个性质是容易证明的. 事实上，若 $D(A)$中有途径 $v_i=v_{i_0}v_{i_1},\cdots,v_{i_{l-1}}v_{i_l}=v_j$，当且仅当 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{l-1}j}=a_{ij}^{(l)}>0$.

显然，如果 A 不按上述规定的布尔运算，而按普通的加法运算，$a_{ij}^{(l)}$就等于连接 v_i 到 v_j 的长度为 l 的途径的数目. 而对于简单图，$a_{ii}^{(2)}$就是 v_i 点的度. $a_{ii}^{(3)}$是以 v_i 为顶点的三角形数目的两倍.

我们看看图的运算的矩阵刻画.

图的积运算(product)与和运算(sum)定义如下①：

设 $G_1=(V_1,X_1)$，$G_2=(V_2,X_2)$是两个简单图，$G_1\times G_2=(V,X)$，$G_1+G_2=(V,Y)$，其中 $V=V_1\times V_2$(笛卡儿积). 对(u_1,u_2)，$(v_1,v_2)\in V$，(u_1,u_2)和(v_1,v_2)在 $G_1\times G_2$ 中相邻当且仅当$(u_1,v_1)\in X_1$，$(u_2,v_2)\in X_2$. 而(u_1,u_2)和(v_1,v_2)在 G_1+G_2 中相邻当且仅当 $u_1=v_1$，$(u_2,v_2)\in X_2$，或者$(u_1,v_1)\in X_1$，$u_2=v_2$.

例如，图 1.1.2 所示.

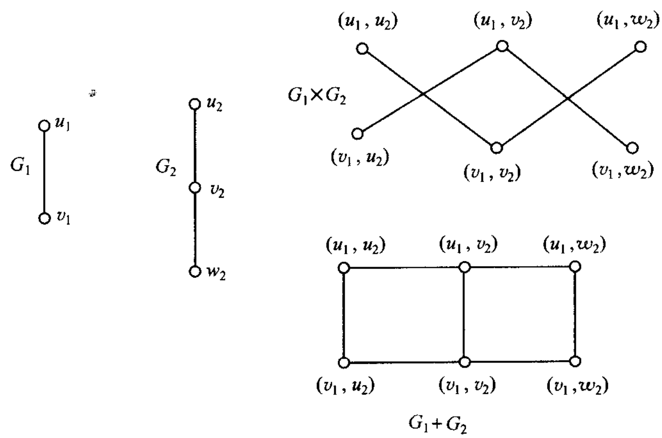

图 1.1.2

① 本书的图运算符号与有些图论著作中的符号含义不同.

为了把上述运算用矩阵“语言”表达出来，我们引入矩阵的 Kronecker 积的概念.

矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{p\times q}$ 的 Kronecker 积 $A\otimes B$ 是一个 $mp\times nq$ 矩阵，它是把 A 的每个元素 a_{ij} 代之以块 $a_{ij}B$ 而得到. 即 $A\otimes B$ 的元素由 A 的每个元素和 B 的每个元素的所有 $mnpq$ 个乘积组成. Kronecker 积有时又叫张量积(tensor product)，它满足结合律，且有

$$(A_1\otimes\cdots\otimes A_n)\cdot(B_1\otimes\cdots\otimes B_n)\cdots(M_1\otimes\cdots\otimes M_n)$$
$$=(A_1B_1\cdots M_1)\otimes\cdots\otimes(A_nB_n\cdots M_n)\quad(\text{若右边的运算能进行}),$$
$$\operatorname{tr}(A\otimes B)=\operatorname{tr}A\cdot\operatorname{tr}B\qquad(A\text{ 和 }B\text{ 均是方阵}).$$

记 G 的邻接矩阵为 $A(G)$，则图 G_1 和 G_2 的积 $G_1\times G_2$ 的邻接矩阵可表示为 $A(G_1)\otimes A(G_2)$，而 G_1 和 G_2 的和 G_1+G_2 的邻接矩阵可表示为 $A(G_1)\otimes I_2+I_1\otimes A(G_2)$，这里 I_1 和 I_2 分别表示与 $A(G_1)$ 和 $A(G_2)$ 同阶的单位方阵.

有时，为了书写方便，往往把矩阵的运算代替图的运算记号，如 $G_1\times G_2$ 写成 $G_1\otimes G_2$.

在图论中，我们已经熟知了图的连通性. 事实上，对于一个图 G 的顶点来说，连通性是一个等价关系，即顶点之间的连通关系具有反身性、对称性和传递性. 由这种等价关系导出的等价类，就是组成 G 的各个连通片，或称为连通支(connected component). 即按连通的等价关系，把顶点集 $V(G)$ 划分为

$$V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_t,$$

连通片即导出子图 $G(V_1),G(V_2),\cdots,G(V_t)$，我们将会看到，研究 G 的很多问题，往往研究它们的连通片已经足够了.

G 的连通性，也能通过矩阵的语言给予描述. 我们可以把 G 的邻接阵 A 作置换相似变换(即对 A 的行和列作同样的置换)使得 A 成为某些方阵的直和：

$$A_1\dotplus A_2\dotplus\cdots\dotplus A_t,$$

这里，A_i 是连通片 $G(V_i)$ 的邻接矩阵，$i=1,2,\cdots,t$.

现在，我们叙述描述图的另一个重要矩阵——关联矩阵(incidence matrix).

先讨论可以带环及重边的无向图 G 的关联矩阵.

设 $G=(V,X)$，$V=\{v_1,\cdots,v_n\}$，$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$，关联矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times q}$，$i=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,q$，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{ 是 }x_j\text{ 的端点},\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

图 G 的每一边可看作顶点集的子集. 于是 B 的每一列包含至少一个 1 和

至多两个 1,B 中包含恰好一个 1 的列对应于一个环,若有两列完全一样,则 G 出现重边.

对于允许有重边及环的无向图 G,在本节开头我们已经把它的邻接矩阵 $A(G)=(a_{ij})$中的 a_{ij}定义为点 v_i 与 v_j 之间的重边数. 特别地,a_{ii}是在顶点 v_i 上的环数,又记

$$C=\begin{bmatrix}\rho_1 & & & 0\\ & \rho_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \rho_n\end{bmatrix}=\mathrm{diag}(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n),$$

这里 ρ_i 是点 v_i 的度数. 于是容易证明如下定理(作为习题).

定理 1.1.1　设 G 是一个 n 阶多重无环无向图,则

$$BB^{\mathrm{T}}=C+A.$$

设 n 阶图 G 的顶点集$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,边集$\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}$,我们给 G 中的每条边添上且仅添上一个方向(箭头),并定义一个$(0,1,-1)$关联矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times q}$如下:

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & x_j\ \text{是}\ v_i\ \text{的出弧},\\ -1, & x_j\ \text{是}\ v_i\ \text{的入弧},\\ 0, & v_i\ \text{不是}\ x_j\ \text{的端点}.\end{cases}$$

B 称为 G 的定向关联矩阵(oriented incidence). B 的每一列恰有两个非零元,一个是 1,另一个是 -1.

沿用定理 1.1.1 的符号,G 的定向关联矩阵满足

$$BB^{\mathrm{T}}=C-A. \tag{1.1.1}$$

在(1.1.1)式中的矩阵 BB^{T} 称为 Laplace 矩阵,或容许矩阵(admittance matrix),(1.1.1)式表明,Laplace 矩阵与 G 的边的定向标号无关.

定向关联矩阵的秩与 G 的连通片的个数关系如下.

定理 1.1.2　设 G 是 n 阶图,t 是 G 中连通片的个数,则 G 的定向关联矩阵 B 的秩是 $n-t$. 事实上,在 B 中删去 t 行,这些行的每一个分别对应于每一连通片的一个顶点,就得到一个秩为 $n-t$ 的子矩阵.

证　记 G 的连通片为

$$G(V_1),G(V_2),\cdots,G(V_t).$$

我们可以标注 G 的顶点和边,使得定向关联矩阵 B 是下列形式的直和

$$B_1\dotplus B_2\dotplus\cdots\dotplus B_t, \tag{1.1.2}$$

这里 B_i 是 $G(V_i)$ 的定向关联阵，$i=1;2,\cdots,t$. 设 $G(V_i)$ 包含 n_i 个顶点. 我们将证明：B_i 的秩等于 n_i-1. 于是，由(1.1.2)式，结论便得证.

设 α_j 是 B_i 的行，它对应于 $G(V_i)$ 的顶点 v_j. 因 B_i 的每一列恰有一个 1 和一个 -1，于是，B_i 的各行之和是一个零向量. 因此 B_i 的秩至多是 n_i-1. 假设有线性关系 $\sum k_j\alpha_j=0$，这里求和取遍 B_i 的某 n_i-1 行且 k_j 不全为零. 不妨设行 α_r 有 $k_r\neq 0$. 这一行有非零元素，此非零元素所在的列对应于与顶点 v_r 关联的边. 对每一个这样的列，恰有一个其它的行 α_l，它在这列亦是非零元. 因此，要上述线性关系成立，必须 $k_r=k_l$. 于是，若 $k_r\neq 0$，则 $k_l=k_r$ 对所有与 v_r 相邻的顶点 v_l 成立. 因 $G(V_i)$ 是连通的，故所有系数 k_j 均相等，便得 $\sum\alpha_j=0$. 因此，$G(V_i)$ 的秩是 n_i-1，并且删去 B_i 的任一行导出一个秩为 n_i-1 的矩阵. 证毕.

设 A 是一个元素是整数的矩阵，若 A 的每一个子方阵的行列式都是 0,1 或 -1，则矩阵 A 称为全单模的(totally unimodular). 易见，一个全单模矩阵是一个 $(0,1,-1)$ 矩阵.

下列定理以组合的特征，给出了矩阵 A 是单模矩阵的充分条件.

定理 1.1.3(Hoffman, Kruskal[1])　设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，它的行被分划为集 R_1 和 R_2，设下列的四个性质成立：

(1) A 的每个元素是 0,1 或 -1；

(2) A 的每一列包括至多两个非零元；

(3) 若 A 的一列中两个非零元有相同的符号，则一个的行在 R_1 中，另一个的行在 R_2 中；

(4) 若 A 的一列中的两个非零元有相反的符号，则这两个元的行同在 R_1 中或在 R_2 中.

则矩阵 A 是全单模的.

证　A 的任一子矩阵也满足此定理的条件，故只须证满足定理条件的任一个方阵 A 的行列式 $\det(A)=0,1$ 或 -1.

对 n 作归纳法，证明我们的结论.

当 $n=1$，由条件(1)，结论显然成立.

设 A 的每列有两个非零元，则属于 R_1 的行和等于属于 R_2 的行和，且 $\det(A)=0$. 此结论对于 $R_1=\varnothing$ 或 $R_2=\varnothing$ 的情形亦适用.

又，若 A 的某一列均是 0，则 $\det(A)=0$. 若 A 的某一列恰有一个非零元，用这列展开 $\det(A)$，由归纳假设，也得 $\det(A)=0,1$ 或 -1. 证毕.

于是 Poincaré 在 1901 年证明的下列结论便成为定理 1.1.3 的推论.

推论 1.1.4(Poincaré[2]) 一个图 G 的定向关联矩阵 B 是全单模的.

推论 1.1.5 设 G 是一个多重(无向)图,B 是 G 的关联矩阵,则 G 是二部图当且仅当 B 是全单模的.

若一个$(0,1,-1)$方阵 A 的每一行,每一列的和都是偶整数,则 A 称为 Euler 矩阵(Eulerian matrix).

1965 年,Camion 给出了一个矩阵是全单模的充要条件.这里,我们叙述此定理而不给出它的证明,有兴趣的读者可参阅文献[3].

定理 1.1.6(Camion[3]) 一个 $m\times n$ 的$(0,1,-1)$矩阵 A 是全单模的当且仅当 A 的每一个 Euler 子矩阵的元之和是 4 的倍数.

我们把$(0,1)$矩阵 A 的特征多项式也称作它的伴随有向图 $D(A)$ 的特征多项式,记作

$$\chi_D(\lambda)=\det(\lambda I-A(D))=\sum_{i=0}^{n}C_i\lambda^{n-i}.$$

若 D 是 n 阶图,设上述多项式的互异根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$,它们的重数分别是 $m_1,m_2,\cdots,m_s$, $\sum\limits_{i=1}^{s}m_i=n$. 自然,$A$ 的谱也称为 $D(A)$ 的谱,记为

$$\mathrm{spec}D(A)=\mathrm{spec}A(D)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s\\ m_1 & m_2 & \cdots & m_s\end{bmatrix}.$$

易知,对简单图 G,$A(G)$是对称且迹为 0 的矩阵.故在 $\mathrm{spec}G$ 中,所有 λ_i 都是实数.

记 $t(G,H)$为 G 中同构于图 H 的导出子图的数目.下列定理,刻画出 G 的特征多项式的各系数 C_i 与 $t(G,H)$之间的关系.有时,我们把 $\det A(H)$记为 $\det H$.

定理 1.1.7 设 $\chi_{G(\lambda)}=\sum\limits_{i=0}^{n}C_i\lambda^{n-i}$, 则

$$C_0=1,$$
$$C_i=(-1)^i\sum_{H}\det Ht(G,H),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$\sum\limits_{H}$ 是对所有 i 阶不同构子图 H 求和.

证 由 $\chi_G(\lambda)$的构造,易知 $C_0=1$. 又按行列式理论由 $\chi_G(\lambda)=\det(\lambda I-A(G))$,

$$C_i=(-1)^i\sum_{A_i}\det A_i,\quad i=1,2,\cdots,n,$$