

几何设计与计算 的新进展

陈发来 邓建松 徐晨东 主编

Progress of
Geometric Design
and Computing
in 2005

GDC'2005

中国科学技术大学出版社

Progress of Geometric Design and Computing in 2005

几何设计与计算的新进展

GDC'2005

陈发来 邓建松 徐晨东 主编

中国科学技术大学出版社

2005·合肥

图书在版编目(CIP)数据

几何设计与计算的新进展 = Progress of Geometric Design and Computing in 2005 / 陈发来, 邓建松, 徐晨东主编. —合肥: 中国科学技术大学出版社, 2005. 4

ISBN 7-312-01776-2

I. 几… II. ①陈… ②邓… ③徐… III. ①几何—设计 ②计算数学 IV. O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 019753 号

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路 96 号, 230026)

合肥现代印务有限公司

全国新华书店经销

开本: 880×1230/16 印张: 20.75 字数: 687 千

2005 年 4 月第 1 版 2005 年 4 月第 1 次印刷

印数: 1—1000 册

ISBN 7-312-01776-2/O · 304 定价: 120.00 元

前 言

由中国工业与应用数学学会几何设计与计算专业委员会主办、中国科学技术大学承办的第二届全国几何设计与计算学术会议(CSIAM Geometric Design & Computing in 2005)于2005年4月16-21日在安徽省合肥市和黄山市召开。几何设计与计算学术会议的第一届会议于2002年在山东青岛举行,本次会议是青岛会议的继续,以“几何设计和计算理论及其在工业中的应用”为主题,结合工业设计中亟需解决的关键问题和难点问题,新老学者共聚一堂,开展广泛的学术交流和讨论。会议反映了国内几何设计与计算的最新研究和应用成果,促进了学术界与工业界的密切结合。

会议邀请国内外著名专家学者就几何设计与计算的最新动态和热点问题做专题讲演和报告,他们是奥地利林茨大学 Bert Jüttler 教授、新加坡国立大学 Eng Wee Chionh 教授、浙江大学鲍虎军教授、中国科学院数学与系统科学研究院高小山研究员、清华大学胡事民教授、澳门科技大学齐东旭教授、中国科学院软件研究所孙家昶研究员、浙江大学王国瑾教授、大连理工大学王仁宏教授、香港大学王文平教授、复旦大学吴宗敏教授、北京大学查红彬教授、山东大学张彩明教授、中国科学技术大学邓建松副教授等国内外知名学者。

此次会议从全国各高校和研究团体收到投稿文章共132篇,内容主要涉及自由曲线和曲面、网格和点曲面、插值与逼近、计算机辅助设计、图像处理、图形学算法以及图形学的应用等方面。其中既有理论研究,也有应用技术研究,体现了我国在几何设计与计算领域的最新进展。每篇文章由两位专家进行认真评审,经程序委员会确定,有36篇文章被推荐到学术期刊,其中《计算机学报》4篇,《软件学报》5篇,《计算机辅助设计与图形学学报》15篇,《工程图学学报》12篇,在本论文集集中收录了这些文章的两页摘要;另外,有43篇论文全文收到本论文集。

感谢向本次会议投稿的每位作者,没有他们的大力支持,本论文集的出版是不可能的;感谢大会程序委员和参与审稿的各位专家的辛勤劳动;感谢会议组织者为本次会议的成功召开而做的长时间的准备和筹划。

本次会议得到了“973”项目(2004CB318000)、国家杰出青年基金(60225002)、中国数学会以及中国科学技术大学数学系的资助,他们的支持保证了会议的顺利召开。

第二届全国几何设计与计算学术会议(GDC'2005)

大会程序委员会主席: 陈发来

副主席: 胡事民

王文平

张彩明

目 录

前言	(1)
----------	-----

大会邀请报告摘要

Approximate Parameterization of Algebraic Spline Surfaces	Bert Juettler (3)
The Intersection of Two Bi-cubic Bezier Surfaces	Eng Wee Chionh (4)
基于微分属性操纵的网格曲面编辑	鲍虎军(4)
Automation of Geometric Theorem Proving, Discovering and Diagram Generation	Xiaoshan Gao (5)
网格的几何计算与优化	胡事民(5)
数字几何中的频谱分析	齐东旭(6)
几何逼近、几何计算与几何设计——两年来的研究工作回顾	王国瑾(7)
Some Topics in the Computational Geometry	Renhong Wang(7)
Fitting B-Spline Curves to Point Clouds by Squared Distance Minimization	
..... Wenping Wang, Helmut Pottmann, Yang Liu(8)	
Piecewise Function Generated by the Solutions of Linear Ordinary Differential Equation	Zongmin Wu(9)
一类平行十二面体的几何研究	姚继锋 孙家昶(11)
三维数字化技术及其应用	查红彬(12)
计算机辅助几何设计中的几个问题	张彩明(13)
Spline Spaces over T-meshes — Dimensions, Basis Functions and Applications	Jiansong Deng (14)

推荐到各学报的论文摘要

1. 推荐到《计算机学报》的论文摘要

代数双曲三角函数空间的一组正交基	李亚娟 汪国昭(19)
基于图切分的交互式图像染色算法	贾云涛 胡事民(21)
基于窄带的自适应 Level Set 方法	郑国贤 冯结青 金小刚 彭群生(23)
基于正交完备 U-系统的参数曲线图组表达	
..... 齐东旭 陶尘钧 宋瑞霞 马 辉 孙 伟 蔡占川(25)	

2. 推荐到《软件学报》的论文摘要

Simultaneous Blending by Algebraic Splines	Guohui Zhao, Renhong Wang, Xiuping Liu (27)
NURBS 曲面显式降多阶逼近	成 敏 王国瑾(29)
Bézier 曲线曲面正则性的判别条件	蔺宏伟 王 青 鲍虎军(31)
二次隐式曲面的拼接与应用	厉玉蓉 雷 娜 张树功 冯果忱(33)
单变量均匀静态细分格式的连续性分析和构造	黄章进(35)

3. 推荐到《计算机辅助设计与图形学学报》的论文摘要

区间 Ball 曲线的边界及降阶	檀结庆	江 平	(37)
一种新的点模型特征检测算法	马瑞金	胡国飞 苗兰芳 周廷方	彭群生(39)
基于 Hakopian 插值的快速图像重建算法	孙雪楠	梁学章	刘 播(41)
绕一个角点的 Bézier 三角片 C^1 连续拼接	章仁江	王国瑾	(43)
NURBS 曲面上积分曲率线的 B 样条表示	李宏坤	王国瑾	刘利刚(45)
用参数样条插值挖补方法进行大规模散乱数据曲面造型	关履泰	覃 廉	张 健(47)
六参数三角网格构造 G^1 连续插值曲面的局部拟合方法	张爱武	张彩明	徐 琳(49)
基于多结点带切向控制的曲线造型方法	宋瑞霞	马 辉	王小春(51)
基于反调和平均曲率的曲面保持特征平滑			赵欢喜(53)
基于层次 B-样条的网格模型变形技术	周廷方	冯结青 肖春霞	彭群生(55)
广义 Bézier 曲线	韩旭里	胡奇辉	彭丰富(57)
L_∞ 范数下使用基本曲线和修正曲线的带约束 Bézier 曲线降阶			
.....	梁秀霞	张彩明 徐 琳	张爱武(59)
点云模型上测地线的计算	杜培林	屠长河 王文平	汪嘉业(61)
OR 插值曲线构造及 Bézier 曲线逼近	郑志浩	汪国昭	(63)
基于隐式 T-样条的曲面重构算法	童伟华	冯玉瑜	陈发来(65)

4. 推荐到《工程图学学报》的论文摘要

三角片模型特征线自动提取算法的研究与实现	戴 宁	廖文和	(67)
自适应抽样与基于 MQ-B-样条的径向函数插值		张卫祥	(69)
一类 Hermite 型矢量插值 C^1 细分曲线的几何特征生成	樊 敏	康宝生	(71)
基于自组织特征映射的纹理合成	薛 峰	张佑生 江巨浪	胡 敏(73)
一种基于扫描线的图像变形算法	于学春	李宗民	于广斌(75)
曲面约束下的数字网格模型互补形状匹配方法	樊少荣	周明全	康宝生(77)
Robot Navigation by a Novel Multi-sensor Data Fusion Algorithm			
.....	Xiong Li, Zongchang Xu, Kai Wang		(79)
基于形心与顶点连线表示的多边形变形	王 丹	康宝生	(81)
关于四点 ternary 插值细分法的进一步讨论	郑红婵	叶正麟	(83)
IFS 拓扑不动点原理构造混沌分形图分类研究	付 冲	马希敏 陈 英	朱伟勇(85)
估计像素内物体边界的几何方法	杨兴强	张彩明	郭凤华(87)
基于认知约束的装配图解生成	李 敏	屠长河	孟祥旭(89)

自由曲线与曲面

三角 Bézier 曲面片和张量积 Bézier 曲面片的自然分形	李爱荻	(93)
带形状参数的五次 Bézier 曲线	吴晓勤	(97)
基于遗传算法的张量积 Bézier 曲面的降阶	石 茂	康宝生 叶正麟(101)
管道曲面的平面截线的求交算法	贾金原	刘金义 张金钊(105)
Basis Functions for Convexity Preserving Blending Curves	Xiaoping Zhou, Chaoyang Liu	(111)
奇异混合 Bézier 样条曲线	张贵仓 王让定 李 睿 杨 俊 李曦焱	赵燕梅(115)

二次均匀 GB-样条曲线.....	郭清伟(119)
B 样条曲线曲面的 G^2 局部修改方法.....	刘 静 高占恒 梁学章 刘 播(125)
用约束的 Bézier 控制网构造流线型曲面.....	卢小林(129)
一种细分曲面形状控制方法.....	任秉银 李小冬(135)
细分曲面网格到三角网格的优化转换.....	吴壮志 刘 翀(139)

网格与点曲面

基于顶点曲率范数的网格简化算法.....	刘晓宁 周明全 耿国华(147)
一次性生成约束 Delaunay 三角网的算法研究.....	任振娜 杨 颖(151)
基于离散检索法的多边形中轴线生成算法.....	韩元利 杜 爽(155)
曲率特征点提取及应用的一些进展.....	钟宝江 廖文和(161)
点云曲面边界线的提取.....	潘荣江 孟祥旭(167)
利用点云表示的部分数据计算旋转体的旋转轴.....	张宗霞 潘荣江 杨承磊 屠长河(171)
点采样曲面中主曲率和主法向的估计.....	缪永伟 肖春霞 周明华 彭群生(175)

插值与逼近

用圆盘贝塞尔曲线进行测量数据的插值.....	张 宁(183)
The Recursive Algorithm for a Kind of Bivariate Vector Valued Interpolation.....	Shuo Tang, Xuhui Wang (189)
一种用于二值断层图像的插值方法.....	胡晓飞(193)
单调数据的保形分段线性有理插值.....	王 强 檀结庆(197)
五次参数样条曲线的能量最优光顺算法.....	王远军 沈燕南(203)
任意插值小波及其提升格式的纯符号推导.....	周化雨 杨 坦 关履泰(207)
A Discrete Scheme of Laplace-Beltrami Operator and Its Convergence over Quadrilateral Meshes.....	Dan Liu, Guoliang Xu(213)
法向插值偏移曲面.....	马志刚 汪国平 董士海(219)

计算机辅助设计

Research of the Intelligent Turning Machining Method Based on Geometrical Feature Recognition.....	Guofeng Qin, Qiyang Li (227)
改进的遗传算法在机械产品整体概念创新设计中的应用.....	郝 博 王立新(233)

计算机图像处理

基于颜色-空间特征的彩色图像检索方法.....	孙君顶 周利华(239)
基于相关信号强度比的小波图像融合算法.....	李光鑫 王 珂 张立保(243)
基于旋转不变量的图像拼接算法.....	李志伟 苏志勋 刘秀平(249)
基于统一的变分模型的有噪图像放大算法.....	付树军 阮秋琦 王文洽(253)
基于各向异性扩散方程和数学形态学的图像修整与去噪.....	付树军 阮秋琦 王文洽(257)

基于曲面拟合的图像检索方法.....	范自柱(261)
--------------------	----------

图形学算法

一种判定一般多边形相交的快速算法.....	周之平 张飒兵 吴介一(269)
一种基于样图的纹理合成算法.....	钱文华 徐 丹 袁国武(275)
实时动态云的生成算法.....	秦 勃 吕 涛(281)

图形学应用

低成本多投影仪大屏幕显示系统若干关键问题的研究.....	李继豪 李 斌 李爱莉(289)
几种刚体运动之间的转换及其算法.....	曹 沅(295)
一种基于边缘检测的掌纹识别算法.....	袁国武 徐 丹 魏晓勇(299)
多目视觉测量中有效测量域的计算模型.....	杜 娜 方 漪(305)
基于结构光的三维曲面建模及其纹理自动绘制.....	陶 俊(311)
材料力学模型在变形中的应用.....	王志国 周来水 王小平 周儒荣(315)
作者索引	(319)

大会邀请报告摘要

Approximate Parameterization of Algebraic Spline Surfaces

Bert Juettler

Institute of Applied Geometry
Johannes Kepler University, Linz, Austria
www.ag.jku.at

In geometric modelling and computer aided design, various different representations for curves and surfaces exist, such as implicitly defined curves and surfaces, parametric representations by (piecewise) rational functions, procedurally defined surfaces, or triangular meshes. The duality of implicit and parametric representations makes each of them especially well suited for certain applications.

Parametric descriptions are suitable for fast generation of point meshes, fast visualization and interactive modeling. On the other hand, the use of implicitly defined surfaces provides simple criteria to decide whether points are located on, inside or outside a surface. These surfaces support simple techniques to define blend surfaces between objects, and they can easily be intersected with lines. Moreover the class of algebraic surfaces is closed under geometric operations such as intersection and offsetting (although this is a more theoretical advantage, since the resulting degrees are rather high).

Most computational applications yield optimal performance for one particular representation. Regardless, there exist some areas where it is crucial that both descriptions are available. An example is surface-surface intersection. Ideally, one of the surfaces should be given in implicit form, and the other in parametric form. In the case of the detection of self-intersections, both representations of the same surface should be available.

The talk discusses the conversion between implicit and parametric form. In particular, we address the problem of converting an algebraic surface (or, more generally, an implicitly defined surface) to a (rational) parametric representation, which we shortly refer to as parameterization.

The talk is based on joint work with Elmar Wurm.

The Intersection of Two Bi-Cubic Bezier Surfaces

Eng Wee Chionh

School of Computing, National University of Singapore

Sederberg and Nishita use Hermite interpolation to approximate the intersection of two bi-cubic Bezier surfaces that meet transversely at the two end-points. In doing so, a heuristic to determine the length of the tangents at the two end-points is needed. Empirically, there are other heuristics that seem to give better results. We will explore possible heuristics and show how the approximate length of the intersection curve can also be obtained.

基于微分属性操纵的网格曲面编辑

鲍虎军

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 杭州 310027)

网格曲面编辑一直是几何计算和计算机图形学领域的一个重要研究方向, 其目的是为用户提供直观、高效的曲面编辑工具, 实现复杂几何模型的构造。经过多年的努力, 许多研究者相继提出了许多巧妙的方法来实现这一目标。微分属性操纵法则是其中的代表方法, 该方法将传统基于顶点直接操纵的曲面编辑和形变问题转化为曲面局部几何微分属性的操纵, 修改的微分属性则通过优化技术重建生成编辑后的曲面。基于这一方法, 用户可以采用很少的编辑操作, 实现曲面的高效编辑, 且在曲面变形过程中能够很好地保持曲面几何细节。本报告首先对微分属性操纵法的数学基础、实现难点和应用背景作一详细的介绍; 并在此基础上, 提出一种新的网格曲面的表示方法和编辑框架; 最后, 给出如何在新的框架下, 实现复杂的曲面几何编辑。

Automation of Geometric Theorem Proving, Discovering and Diagram Generation

Xiaoshan Gao

Institute of Systems Science, KLMM, AMSS, Academia Sinica, Beijing 100080

Email: xgao@mmrc.iss.ac.cn

It is often said that "a picture is more than one thousand words". But in reality, it is still much more cumbersome or even difficult to generate pictures with computer software than to process words, especially when the pictures involve exact geometric relations. It is even more difficult to prove geometry theorems, which is considered as one of the hardest mental labor. In this presentation, we will introduce some effective methods for automated geometric theorem proving, discovering, and geometric diagram generation developed by us, including the area method, the deductive database method, and the c-tree decomposition method. Applications of the these methods to intelligent CAD/CAI, computer vision, robotics, and linkage design will also be discussed.

网格的几何计算与优化

胡事民

(清华大学计算机科学与技术系, 北京 100084)

Email: shimin@tsinghua.edu.cn

摘 要: 20 世纪 90 年代以来, 三维建模的研究, 已经从面向工业造型、基于边界表示和 NURBS 表示的参数化设计, 转到面向数字娱乐 (digital entertainment) 和影视业的基于细分曲面、网格曲面表示的测量造型上。本文分别回顾曲面造型与实体造型的历史, 讨论以工业设计为目的的几何造型中存在的难点问题, 并分析几何造型与处理、特别是数字几何处理的发展趋势和热点问题。最后介绍清华大学在网格参数化及其应用、特征敏感的网格处理算法、基于 Riemann 曲面的网格到样条自动转换、以及几何优化与网格注册方面的工作。

关键词: 曲面造型, 实体造型, 网格, Riemann 曲面, 几何优化, 注册

数字几何中的频谱分析*

齐东旭

(澳门科技大学, 中山大学)

Email: dxqi@must.edu.mo

1 关于图形与图像

大体上说, 关于图形的研究属于计算几何学范围, 关于图像的研究属于信号处理领域。计算几何研究的图形常指曲线曲面, 如今扩展成数字几何, 大量是三维问题。图像处理主要针对视觉信息的数字化问题, 二维问题居多。图形与图像各有特性, 研究方法不同。图形与图像都是“图画”, 这是共性, 研究方法也有相同的地方。两者密切相关, 例如从数字图像生成三维造型, 便是两者结合的重要研究问题。

2 关于几何信息处理

信息一词很笼统, 常指有用的“东西”。不知道是否有用的“东西”, 该不该研究呢? 不但应该研究, 而且特别重要。假若“东西”经过符号化, 成为“数据”, 那么, 数据检测与判别, 及从中提取有用的信息, 就是大事。研究图形与图像, 也是处理数据。前者给定所谓型值点或控制点, 想办法做出相应的曲线(面)表达, 往往追求给出数学公式; 后者则强调从数据中抽取某些特征。关于图的信息处理与数据挖掘(data mining)这个热门话题有内在联系。如果把信号处理中——诸如 Fourier 变换这样的——强有力的数学工具引进计算几何, 那么对几何信息的分析与综合或许大有益处。Fourier 变换 100 年历史告诉人们, 从空域(时域)到频域的转换具有重要意义。小波的出现, 被认为是 Fourier 变换的革命性的发展。

3 关于正交变换“家族”

已经建立了各种各样的完备正交系, 除了 Fourier (三角函数) 系之外, 还有 Legendre、Chebyshev 等正交多项式系、Walsh、Haar 等二值或三值函数……形成正交变换的大“家族”, 这个家族的成员各有特点、各有用途, 但也有不尽人意之处。将正交函数理论用于计算几何, 鲍虎军、王国谨等做了非常新颖的工作, 除此之外, 研究者尚不多见。我们从另外角度考虑另外的问题: 什么样的正交完备系有助于几何信息的表达? 进而, 基于这类表达开展几何数据挖掘, 期待能挖掘出点儿什么。

4 完备正交系的一个另类——U-系统

正交系是“基”的概念。就此而言, 计算几何学里出现的调配函数, 如 Bernstein 多项式、基本样条函数、NURBS 等等, 都是基函数, 但很少引进正交基。已有关于正交样条函数的研究, 似乎囿于连续性的固有传统, 少有生动的应用示例。作为往事重提, 这里要谈及冯玉瑜与本报告人早年合作建立的“U-系统”(1980)。所谓“k 次 U-系统”, 是 $L^2[0,1]$ 的一类完备正交函数系, 其成员为分段 k 次多项式。对很广的一类信号, U-系统有良好的平方逼近与一致逼近特性。由于它包括了各个阶次的间断函数, 使得具有有限间断点的几何信息能用 U-级数的有限项精确表达, 这是与其它完备正交系的区别所在。

5 参数形式的几何图组 U-谱的计算与检测图例

针对以参数形式给出的几何图组, 给出该图组 U-谱的计算方法。展示较多检测图例, 说明利用 U-系统作 CAGD 中几何信息谱分析的可行性和应用前景。提供相关的主要参考文献。

* 本工作得到“973”项目(No.2004CB318000)及国家自然科学基金重点项目(No.60133020)的资助。

几何逼近、几何计算与几何设计 ——两年来的研究工作回顾

王国瑾

(浙江大学数学系, 浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 杭州 310027)

摘 要: 本文回顾并总结了自第一届全国几何设计与计算学术会议以来的两年中, 作者本人或作者与其学生合作, 在几何逼近、几何计算和几何设计领域所作的新的探索性研究。内容包括: 参数曲线的降阶逼近, 等距逼近, 区域逼近与有理曲线曲面的多项式逼近; 参数曲线曲面的离散终判算法, 三角网格曲面的离散曲率算法, 三角网格/参数曲面的短程线与曲率线算法, 广义 Ball 曲线曲面的转换与求值算法, 网格曲面或平面曲线的重建算法, 基于场细分的隐式曲线曲面绘制算法; 以及平面上形状可控或保形的插值曲线设计, 有理高次圆锥曲线设计, 迭代拟合型值点的 NURBS 曲线设计, 表面上的插值曲线设计, 可展 Bézier 曲面设计, 参数化设计技术等等。把新方法以往结果加以比较, 从研究背景、创新思路、理论成果与应用前景诸方面加以阐述和介绍, 为同行提供一些可资借鉴的研究方法与工具, 旨在抛砖引玉, 激发会议上的切磋与交流。

关键词: 降阶逼近, 等距逼近, 区域逼近, 有理曲线多项式逼近; 网格曲面, 参数曲面, 广义 Ball 曲面, 隐式曲面, 可展曲面; 离散终判, 离散曲率, 短程线, 曲率线; 曲面转换, 曲面求值, 曲面重建, 曲面绘制; 保形插值, 迭代拟合; 有理圆锥曲线, 表面上的插值曲线, 参数化

Some Topics in the Computational Geometry

Renhong Wang

Institute of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024

Email: renhong@dlut.edu.cn

Computational geometry is concerned with computer aided design, computer aided manufacture, computer aided engineering, image processing, shape from X, computer graphics, scientific visualization, shape reconstruction, and all the other fields related to geometric objects. The computational geometry is also an important borderline subject related to Computational mathematics, Differential geometry, Algebraic geometry, Approximation theory, and so on. It is well known that the multivariate splines are very useful for solving problems in the computational geometry. As we know that a basic theorem on the multivariate spline has been found by using the algebraic geometry. According to the theorem, the multivariate spline, in principle, is equivalent to an algebraic subject. In this talk, we are going to introduce some topics in the computational geometry. Especially we will emphasize some topics which are related to the algebraic geometry. For instance, we will introduce some topics such as the piecewise algebraic curve, and general piecewise algebraic variety and so on. Some open problems will also be introduced.

Fitting B-Spline Curves to Point Clouds by Squared Distance Minimization

Wenping Wang

University of Hong Kong

Helmut Pottmann

Vienna University of Technology

Yang Liu

University of Hong Kong

Computing a curve to approximate data points is a problem encountered frequently in many applications in computer graphics, computer vision, CAD/CAM, and image processing.

We present a novel and efficient method, called squared distance minimization (SDM), for computing a planar B-spline curve, closed or open, to approximate a target shape defined by a point cloud, i.e., a set of unorganized, possibly noisy data points.

We show that SDM outperforms significantly other optimization methods used currently in common practice of curve fitting.

In SDM a B-spline curve starts from some properly specified initial shape and converges towards the target shape through iterative quadratic minimization of the fitting error.

Our contribution is the introduction of a new fitting error term, called the squared distance (SD) error term, defined by a quadratic approximant of squared distances from data points to a fitting curve.

The SD error term measures faithfully the geometric distance between a fitting curve and a target shape, thus leading to faster and more stable convergence than the point distance (PD) error term, which is commonly used in computer graphics and CAGD, and the tangent distance (TD) error term, which is adopted in the computer vision community.

To provide a theoretical explanation of the superior performance of SDM, we formulate the B-spline curve fitting problem as a nonlinear least squares problem and conclude that SDM is a quasi-Newton method, which employs a carefully chosen positive definite approximant to the true Hessian of the objective function. Furthermore, we show that the method based on the TD error term is a Gauss-Newton iteration which is unstable for target shapes with corners, whereas optimization based on the PD error term is the alternating method that is known to have linear convergence.

Large Piecewise Function Generated by the Solutions of Linear Ordinary Differential Equation^{*}

Zongmin Wu

Shanghai Key Lab. of Contemporary Applied Mathematics

School of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433

E-mail: zmwu@fudan.edu.cn

Abstract: We try to establish a parallel theory as the piecewise polynomial function for the piecewise function generated by solutions of linear ordinary differential equation. Such function spaces contain the algebra of the piecewise polynomial, trigonometric polynomial and the hyperbolic polynomial, therefore containing the curves, which are drawn by the rule, the compass and some other instruments.

The purpose of the approach is to try to find a suitable function space, which can be easily used for curve representation, reproduction, approximation and pattern recognition, pattern classification.

Key words: B-spline, piecewise function, Computer aided geometric design, approximation theory.

1 Introduction

The paper deals with the problem of the function space for curve representation, reproduction, approximation and pattern recognition, pattern classification. The most common function class, which the people prefer using both in the theory and application is the polynomials. We can use interpolation or the least square approximation to simulate a prescribed curve (parametric or non parametric type). However we know that the polynomial interpolation possesses Lunge's phenomena and require to solve a large scale linear system of equation on the other hand the least square approximation (as well as the Bernstein's approximation) possesses only very lower convergence order. Therefore the function space of polynomial is not very efficient for the curve simulation.

The spline, which is constructed by piecewise polynomial (more generally the piecewise rational polynomial-the NURBS), is now the most favorite basis of the function space both for Mathematicians and Engineers, which is also included by most of standard computer software for curve design.

The simplest case of the spline is the piecewise linear function, which is already used to construct the quadrature formula for the numerical integration, the approach is used in the theory of finite elements for numerical solution of partial differential equation too.

For the spline theory, the B-spline, the basic (best) spline basis is very important. There are a lot of advantages of using B-splines: such as the approximation capacity, the local control property (compactly supported), the shape preserving property, easy to evaluation (recursive evaluation scheme), multi resolution property (refinable, subdivision algorithm, wavelets) etc. The spline possesses a disadvantage that it does not include the arc of circle, which is the most common curve in engineering (drawn by rule and compass). One can use rational spline to represent conic function, but it is difficult to develop an algorithm to keep the conic reproducing property, because the parameters of the rational polynomial are non linear.

^{*} Supported by NSF-CHINA Project No. 10125102.