面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

几何学引论

第二版

郑崇友

王汇淳　侯忠义　王智秋

3

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是高等教育出版社2000年出版的《几何学引论》教材的第二版。第二版在保持第一版基本框架不变的前提下，对原书进行了修订，其中包括对某些段落作了适当的改写与增删，以使本书作为教材更趋于充实与完整。本书内容包括几何基础、解析几何、微分几何、射影几何与拓扑空间五个部分以及两个附录：预备知识——集合与映射、几何发展简史。

本书可作为高等师范院校数学专业教材，也可供其他专业人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

几何学引论/郑崇友等. —2版. —北京：高等教育出版社，2005.8

ISBN 7-04-017289-5

Ⅰ.几… Ⅱ.郑… Ⅲ.几何学-师范大学-教材 Ⅳ.O18

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第076816号

策划编辑 李蕊 **责任编辑** 郭思旭 **封面设计** 张楠 **责任绘图** 吴文信
版式设计 胡志萍 **责任校对** 王超 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司		
		版　　次	2000年3月第1版
开　　本	787×960　1/16		2005年8月第2版
印　　张	28.75	印　　次	2005年8月第1次印刷
字　　数	530 000	定　　价	32.80元

物料号 17289-00

第一版前言

在《中国教育改革和发展纲要》精神的指引下，为培养适应21世纪需要的高素质人才，从1994年开始，在首都师范大学教务处与数学系的支持下，我们对高等师范学校数学教育专业几何类课程的教学内容和课程体系的改革进行了探讨，认识到现行高等师范院校数学教育专业几何学的课程设置，教学内容和教学方法与综合性大学数学专业几何课程的差异很小，高等师范教育的特点不突出，没有反映出近数十年来几何学的迅速发展，以及几何学对数学的各个分支学科的渗透与促进作用，因此几何学课程需要进行改革，并有必要编写一部与高等师范学校数学教育专业相适应的几何学教材。

在几何类课程的改革与建设中，我们以高等师范学校数学教育专业毕业生应当具备的几何学的知识、能力和综合素质等基本要求为依据，选择和组织几何学的教育内容，并以所选择内容为材料构建几何课程体系，将现行设置的5门（必修，选修）几何课程——几何基础，解析几何，微分几何，高等几何（即射影几何）与点集拓扑学综合为一门几何课程，并保持几何学各个分支的自身特点与相对独立性。在教材编写中注意以现代几何观点审视传统几何学，注重少而精，删除陈旧与重复的内容，更新与拓宽几何知识面，以及体现出高等师范教育的特点。

这部教材《几何学引论》的内容除了预备知识（集合与映射，它为本课程提供必要的集合论知识）外，共有五部分，即1几何基础，2解析几何，3微分几何，4射影几何，5拓扑空间。此外，还有一篇几何发展简史作为附录。我们认为它们是21世纪高等师范数学教育专业毕业生应该具备的几何学基础。以下分别阐明本教材各个部分教学内容的基本点。

几何学作为数学的一个分支，它是以形象思维为主，而代数学则以逻辑思维为主，这两种思维方式在处理数学问题时都起到了重要作用，所以培养与发展这两种思维方式是非常必要的。

本书的第1部分为几何基础。本部分主要介绍几何公理法的基本思想和基本问题，在教学内容选择上注重几何公理法的观点，思想和方法的教育，对于欧氏几何公理系统，罗氏几何公理系统的演绎，只选择其中主要部分，证明一些典型的命题。显然，对于客观世界的理解可以采用不同的几何模型，因此了解非欧几何的基本知识不仅必要，而且可以从更高的观点与水平上认识欧氏几何。

本书的第2部分为解析几何。解析几何是几何学的一个分支，是通过坐标

法运用初等的代数工具研究几何问题的一门学科，它把数学的两个基本对象——形与数有机地联系起来，对高等数学的发展起了巨大的推动作用。本部分主要介绍解析几何的基本方法和基本知识，内容包括向量代数，空间的平面与直线，常见曲面以及二次曲线方程的化简与二次曲线的分类等。

本书的第3部分为微分几何。微分几何是以数学分析为主要工具研究空间形式的一门学科，它是几何学的一个分支。本部分主要介绍微分几何中的最基础部分，在处理方法上采用 Frenet 标架与双参数活动标架这种有力的工具，讨论欧氏空间中曲线和曲面的局部性质，内容包括曲线的微分几何，曲面的微分几何和曲面的内蕴几何等。

本书的第4部分为射影几何。射影几何是几何学的一个分支，它研究几何图形的射影性质，即经过射影变换不变的性质。本部分主要介绍射影几何的基本理论与基本方法。首先在拓广欧氏平面的基础上引出射影平面的概念，这样定义射影平面不仅保持了几何的直观性，而且看到了几何发展的连续性；继而从拓广欧氏平面上点的齐次坐标出发引进射影平面上点的射影坐标，并在此基础上给出交比概念与阐述对偶原理，讨论一维基本形之间的射影变换与其特殊的变换形式——透视变换与对合变换，射影平面上的直射变换以及二次曲线的射影性质；最后介绍 Klein 关于从变换群观点看几何学，明确射影几何与仿射几何、欧氏几何的内在联系和根本差别，使读者对几何学有了一个比较全局性的认识。

本书的第5部分为拓扑空间。拓扑学是几何学的一个分支，它研究几何图形在连续变形(拓扑变换)下保持不变的性质。现在拓扑学的概念、理论和方法已经广泛地渗透到现代数学、自然科学以及社会科学的许多领域，并且有了日益重要的应用，因此拓宽几何学知识面，介绍拓扑学的基本知识，不仅是为了学习现代数学提供必要的基础知识，而且能从较高观点去观察、分析中学数学内容，加深对这些内容的认识和理解。特别是目前拓扑学的通俗内容已出现在中学的课外读物之中，某些拓扑概念将来可能进入中学课程中，所以未来的中学教师应当具有这方面的基本知识。研究拓扑空间的自身结构与其间连续映射的学科，称为一般拓扑学，又称为点集拓扑学，是拓扑学的基础。本部分——拓扑空间，主要介绍一般拓扑学的基本内容(其中标有 * 号的内容，可以简要介绍其结论)。

本书《几何学引论》初稿曾在我校数学系学生中作为试用教材进行过教学实践，根据试用情况来看，其教学总课时数为216课时(每课时以50分钟计算，每学期以授课18周计算)，其中

几何基础为 $1\times18=18$ 课时，

解析几何为 $3\times18=54$ 课时，

微分几何为 $3\times18=54$ 课时，

射影几何为 $3\times18=54$ 课时，

拓扑空间为 $2\times18=36$ 课时。

除预备知识外，本书的五个部分(即几何基础，解析几何，微分几何，射影几何和拓扑空间)虽然综合为一个有一定内在联系的整体，但各个部分之间具有相对独立性，因此作为教材可以不依据本书编排顺序进行讲授，不讲授本书的某一部分内容，也不影响其余部分的学习。根据本书编排顺序进行讲授，编者认为这是比较理想的一种选择。例如，一年级上学期讲授几何基础，解析几何；二年级下学期讲授微分几何；三年级上学期讲授射影几何；三年级下学期讲授拓扑空间。

本书的编写工作得到了教育部师范司、北京市教委高教处、首都师范大学校领导、教务处与数学系的支持和鼓励，首都师范大学数学系几何教研室梅向明、刘增贤、林向岩和黄敬之等教授在高等几何、微分几何等课程进行的教学改革工作，为本书的编写工作提供了有益的经验，教研室的其他几位同志认真地校阅了本书的原稿，并积极地参与本书的教学实践活动，中国科学院数学研究所虞言林教授为本书的出版作了认真细致的审阅，提出了许多宝贵的意见，修改了原稿中的疏漏与失当，高等教育出版社对于本书的编写与出版始终给予热情的支持，郭思旭编审为本书作了认真细致的审校，提出了不少很好的意见。对于以上各个部门和各位同志，编者在此致以诚挚的谢意。

这部《几何学引论》是在原国家教委师范司“高等师范教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”立项项目、北京市教委“北京市普通高等学校教育教学改革试点项目”资助项目的支持下完成的。

郑崇友

1999.12

第二版前言

本书是《几何学引论》教材(高等教育出版社,2000年出版)的第二版。

《几何学引论》自2000年3月出版以来,已印刷多次,根据本书第一版使用的情况和读者的反馈意见,我们对全书进行了一次必要的修订,并将第一版的上下两册合为一册。第二版在保持第一版基本框架不变的前提下,对第一版内容进行了修订,其中包括对某些段落作了适当的改写和增删,以使本书作为教材更趋于充实与完整。

本书再版得到了首都师范大学领导、教务处与数学系的关心和支持,在这次修订工作中,北京师范大学数学系王敬庚教授、首都师范大学赵学志教授和曹桂菊讲师都提出了许多宝贵的修改意见,刘宝康博士参与了本书第3部分微分几何的修订工作,高等教育出版社对本书第二版始终给予关心和支持,郭思旭编审、李蕊同志为本书(第二版)进行了认真细致的审校,提出很好的建议。借本书再版的机会,编者向所有关心、支持和批评本书的同行、友人和读者致以诚挚的谢意。

限于编者的水平,本书虽经修订,但错误与缺点仍在所难免,欢迎同行专家和读者继续批评指正。

《几何学引论》(第二版)得到了北京市教育委员会“北京市高等教育精品教材建设项目”的资助。

郑崇友

2005.5.15

目　录

第1部分　几何基础

一般地说，几何学作为数学的一个分支，它是以形象思维为主，而代数学则以逻辑思维为主．这两种思维方式在处理数学问题中都起着重要作用．所以，培养这两种思维方式是非常必要的．

几何基础是研究几何学的理论基础以及相关问题的一门学科．本部分为几何基础，主要介绍几何公理法及其相关的基本问题，并以公理法阐述欧几里得几何和罗巴切夫斯基几何．显然，对于客观世界的理解，可以采用不同的几何模型．因此，了解非欧几何（如罗巴切夫斯基几何）不但是必要的，而且可以从更高的观点与水平上认识欧几里得几何．

第1章　几何公理法

本章介绍几何基础历史概要，几何公理法与其三个基本问题．

§1.1　几何基础发展简史

几何，英文为Geometry，是由希腊文演变而来．其原意为土地测量．“依据很多的实证，几何是埃及人创造的，并且产生于土地测量．由于尼罗河泛滥，经常冲毁界线，这样测量变成了必要的工作．无可置疑的，这类科学和其它科学一样，都发生于人类的需要”（引自[5]）．明代徐光启翻译《几何原本》时，将Geometry一词译为几何学，是从其音译而来．

公元前7世纪以前的所谓几何学，都只限于一些具体问题的解答，并且是十分粗糙和单凭经验的．后来当积累起来的几何知识相当丰富时，把这一领域的材料系统地整理，并阐明它们的相互关系，就成为非常必要的了．由于几何学本来的对象是图形，于是研究它必然要借助于空间的直观性．但是直观性也有不可靠（不符合客观）的时候，因而在明确地规定了定义和公理的基础上，排除直观性，建立合乎逻辑的几何学体系的思想，在古希腊时代已经开始，欧几里得（Euclid，约公元前330—275年）就是在这种思想的基础上，编著完成了他的《几何

原本》.

欧几里得的《几何原本》共分十三卷，其中第五、七、八、九、十卷讨论比例和算术理论，其余各卷纯粹讨论几何学.

第一卷讨论三角形全等、三角形边角关系、垂线、平行线、平行四边形、三角形、多边形、等积、勾股定理等，共48个命题.

第二卷讨论线段的计算，包括黄金分割等，共14个命题.

第三卷讨论圆周角、圆心角、圆的切线、割线、圆幂定理等，共37个命题.

第四卷讨论圆的内接、外切多边形和正五边形、正六边形、正十五边形的作图等，共16个命题.

第六卷讨论相似多边形理论，共33个命题.

第十一至第十三卷讨论立体几何理论.

《几何原本》的第一卷是全书逻辑推理的基础.在第一卷中给出的全书最初出现的23个定义，5条公设和5条公理分列如下：

定义

(1) **点**没有部分.

(2) **线**有长度而没有宽度.

(3) 线的界限是点.

(4) **直线**是这样的线，它对于它的所有各点都有同样的位置.

(5) **面**只有长度和宽度.

(6) 面的界限是线.

(7) **平面**是这样的面，它对于在它上面的所有直线都有同样的位置.

(8) 平面上的**角**是在一个平面上的两条相交直线的相互倾斜度.

(9) 当形成一角的两线是一直线的时候，这个角叫做**平角**.

(10)—(22) (略)(是关于直角、锐角、钝角、圆、三角形、四边形等的定义).

(23) **平行直线**是在同一个平面上，并且尽管向两侧延长也决不相交的直线.

《几何原本》中列出的下述要求承认而不予证明的命题，称为公设.

公设

(1) 从每个点到每个别的点必定可以引直线.

(2) 每条直线都可以无限延长.

(3) 以任意点为中心可以用任意半径作圆周.

(4) 所有的直角都相等.

(5) 若一条直线与另外两条直线相交，当有一侧的两个同侧内角之和小于两直角时，则这两条直线就在这一侧相交(通常称为**第五公设**).

公理

(1) 等于同量的量相等.

(2) 等量加等量,总量相等.

(3) 等量减等量,余量相等.

(4) 彼此重合的图形是全等的.

(5) 整体大于部分.

在《几何原本》中,公设和公理没有本质上区别,以下统称为公理.

《几何原本》以上述的公理系统作为基础,通过逻辑推理,论证几何定理,构建几何体系.证明的方法有分析法、综合法和归谬法.

欧几里得的《几何原本》是历史上第一部几何学著作,虽然从科学和教育意义上说,它在历史上都得到高度评价,但是从现代教学观点来看,它的几何逻辑结构在严谨性方面还存在着许多缺陷.

从欧几里得以后的许多数学家,在长达两千年以上的时间内,都注意到并且试图消除《几何原本》中在逻辑上存在的缺陷,其中一些是对《几何原本》中的几个定义加以更改,例如对"直线"、"平面"给出更多的描述.但是这些都不能成为一种定义.实际上,这些定义在后面的论证中是无用的.《几何原本》中最主要的缺陷是对于形成欧几里得几何学本身的基础来说,它的公理系统是不完备的.例如,在《几何原本》的诸公理中没有给出的概念,而在证明中或广泛采用或凭图形的直观来作证明.现举例说明如下:

例 1　《几何原本》第一卷第 1 个命题:"在一条已知有限直线上作等边三角形".

作法:设已知有限直线(即线段)AB,作以点 A 为中心,AB 为半径的圆,作以点 B 为中心,BA 为半径的圆.设两圆相交于 C 点,联结 A,C 两点与B,C 两点,则得等边三角形 ABC.

这里,以直观为凭据,假定这样的两圆必定相交,但这没有逻辑根据.事实上,交点 C 的存在必须以圆的连续性为前提,而在《几何原本》的公理中没有一处讲到连续性.

例 2　《几何原本》第一卷第 4 个命题:"若一个三角形的两边和其夹角相应地等于另一个三角形的两边和其夹角,则这两个三角形相等".

证法:把一个三角形重合到另一个三角形上去(与现在中学课本的证法相同).

显然,要做到两个三角形能重合,必须求助于运动.因此,应当假定运动过程中图形的长度和角度不变,但是《几何原本》中没有给出相应的公理.

例 3　在《几何原本》中使用了"在…之间"的概念,如"在直线上两点之间的任意一点"等,但在《几何原本》中没有将这概念列入公理.

欧几里得《几何原本》中的公理系统作为几何学逻辑推理的基础是不完备的,这是由于历史的局限性.修改、补充《几何原本》中的定义、公理,使其成为逻

辑上完美无缺的科学,一直是其后两千多年期间数学家研究的重要课题.特别是第五公设的试证,引起了人们的关注.其中原因是,在《几何原本》中前四条公设所讲的是直线和圆的基本性质,含义简明,而第五公设叙述比较复杂,更像一条定理,并且在《几何原本》中应用很迟,到了第29个命题的证明中才第一次使用它.这样,就引起了人们对第五公设的怀疑,并试图从欧几里得的其它公理和公设把它推导出来.在试证第五公设工作的漫长岁月里,虽然各式各样的试证都未取得成功,但是却推导出了与第五公设等价的一系列命题,并且最终导致了非欧几里得几何学的发现和现代几何公理法的建立.

在此举出几个试证第五公设的例子,陈述如下:

公元5世纪希腊数学家普罗克鲁斯(Proclus,410—485)对第五公设的试证工作:

设共面两条直线 l_1 与 l_2 被第三条直线 l_3 所截,在直线 l_3 的一侧构成同侧内角 α,β,并且 $\alpha+\beta<2d$(d 表示直角),求证 l_1 与 l_2 两条直线必相交.

证明:如图1.1.1所示,通过 l_2 与 l_3 两条直线的交点 B 作直线 l,使得 l 与 l_3 两条直线组成角 α',并且 $\alpha'=\alpha$,根据平行线的判定定理(《几何原本》中命题28),有 $l\parallel l_1$.因为 $\alpha'+\beta=\alpha+\beta<2d$,从而直线 l 与直线 l_2 不相同.因为 $\beta<2d-\alpha'$,于是直线 l_2 通过 $\angle ABD$ 的内部.若设 l_2 与 l 两条直线组成角 γ,则 $\gamma=2d-(\alpha+\beta)>0$.在直线 l_2 上取一点 C,并使 C 点沿直线 l_2 与 B 点无限地远离.若记 C 点到直线 l 的距离为 $h=CD$,则在 C 点移动的过程中,必有一个时刻,使得 h 等于两条(平行)直线 l 与 l_1 之间的距离,这时 C 点将落在直线 l_1 上,即 C 是两条直线 l_1 与 l_2 的交点.

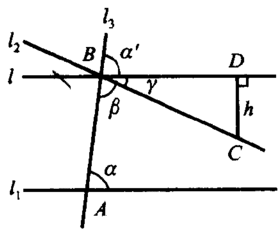

图1.1.1

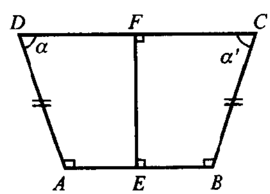

图1.1.2

这就证明了两条直线 l_1,l_2 必相交,并且交点在被第三条直线 l_3 所截的同侧内角之和小于二直角的一侧(证毕).

普罗克鲁斯在这个证明中作了两个假设,即

(1) 当 C 点沿直线 l_2 无限远离 B 点时,距离 $h=CD$,将无限增大.

(2) 两条平行线之间的距离是有限的，并且处处相等.

事实上，(1)是对的，它可利用《几何原本》中公设 1～4 和公理 1～5 推导出；(2)则不然，它是一个与第五公设等价的命题. 普罗克鲁斯的"证明"显然没有达到删除欧氏第五公设的目的. 但得到了一个副产品，即采用"两条平行线之间的距离是有限的"作为公理，它可替代第五公设.

意大利数学家萨开里(G. Saccheri，1667—1733)对第五公设的试证工作：

萨开里考虑底边 AB 上两底角都是直角，并且两条侧边 AD 和 BC 相等的四边形 $ABCD$(图 1.1.2). 他首先证明 AB 和 CD 的中点连线 EF 与上、下底边垂直，并且两个顶角 $\angle C=\angle D$，这时有三种可能：

(1) $\angle C$ 和 $\angle D$ 都是钝角　(钝角假设)；

(2) $\angle C$ 和 $\angle D$ 都是直角　(直角假设)；

(3) $\angle C$ 和 $\angle D$ 都是锐角　(锐角假设).

其中，钝角假设易被否定，而直角假设可推导出第五公设成立，于是只要否定锐角假设即可. 萨开里企图由锐角假设成立而引出矛盾. 他推导了三十多步都没有引出矛盾，再深入展开推论，则建立了复杂的几何体系，其中有一部分结论与直觉不符，却找不到在逻辑上自相矛盾的地方. 例如，他证明了，如果锐角的假设成立，那么对于平面上两条不相交的直线或者只有一条公垂线，这两条直线在它公垂线两侧互相无界地分离；或者没有公共的垂线，这两条直线在一个方向无限接近，而在另一方向则无界的分离. 这些结论从逻辑上挑不出任何毛病，但他却认为这些结论太不合情理，于是由此断定锐角假设是不真实的. 这样，他认为自己证明了第五公设. 实际上，萨开里得到的一系列异于直觉的推论正是属于非欧几里得几何的，可惜他自己并未觉察这一点而把它否定了.

德国数学家兰伯特(J. H. Lambert，1728—1777)也有类似的对第五公设的试证工作. 他于 1766 年在其著作《平行线理论》中考虑有三个内角都是直角的四边形 $ABCD$(图 1.1.3). 他对第四个内角的三种可能性(直角，锐角，钝角)分别作了分析：直角假设等价于第五公设；钝角假设不可能，它与公设 1～4，公理 1～5相矛盾；对于从锐角假设推导出的结论，他猜想可能应用于虚半径球面的图形上. 兰伯特的几何观点是比较先进的，他认为任何一组假设，如果不导致矛盾，那么一定提供一种可能的几何. 兰伯特比他同时代的人走了更正确的途径，他预感到第五公设问题的真正答案.

数学的特殊成果，一般不会只是个人的工作. 这种数学积累的发展，特别适用于创立非欧几里得几何的情形. 前面已经介绍非欧几里得几何的几位先行者，至于非欧几里得几何的发现者，当属以下三位数学家：

德国的高斯(C. F. Gauss，1777—1855)，

匈牙利的波尔约(J. Bolyai，1802—1860)，

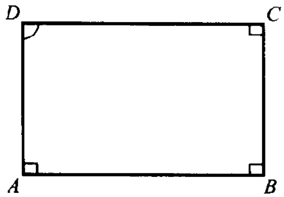

图 1.1.3

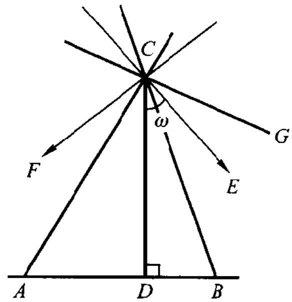

图 1.1.4

俄国的罗巴切夫斯基(Н. И. Лобачевский, 1792—1856).

高斯在19世纪初也曾试图证明第五公设.他在1817年的通信中即谈起"所要证明的部分是不能证明的……"1824年,他在一封信上说"三角形的三内角之和小于180°这假定引到特殊的,与我们的几何完全相异的几何".但是由于种种原因,高斯生前未发表过关于非欧几里得几何的任何研究成果.

波尔约在1823年已得到关于新的平行线理论的结果,1832年以附录的形式在他父亲的一本书后发表了他的研究结果《绝对空间的科学》,其中论述的"绝对几何"就是非欧几里得几何.由于他的工作得不到同时代数学家的理解,特别是得不到高斯的理解,从此他放弃了数学研究.

罗巴切夫斯基和高斯、波尔约一样,也是希望能证明第五公设.他试图由否定"同一条直线的垂线和斜线必相交"(此与第五公设等价)这个命题引出矛盾,但是推论一个接一个,形成了一个新的几何体系,逻辑上无任何矛盾.1826年2月23日,罗巴切夫斯基在喀山大学数理系作了《几何学原理的扼要阐述,暨平行线定理的一个严格证明》的报告,宣读了他关于非欧几里得几何的研究工作,这天被认为是非欧几里得几何的诞生日.其后他于1829年在"喀山通讯"上发表了题为《论几何学基础》的论文,阐述了关于他对新几何学的研究.在他的论文中,指明了第五公设不能从其余诸公理推导出.罗巴切夫斯基引进了与第五公设等价命题的相矛盾命题:"通过直线 AB 外一点 C,在 A,B,C 三点所决定的平面上可作无穷多条直线,它们都与直线 AB 不相交",以它代替第五公设,并保留欧几里得的其它公理,定义通过 C 点,与 AB 直线不相交的诸直线的极限直线 CE 和 CF 为通过 C 点与直线 AB 平行的直线.设 CD 是 C 点到直线 AB 的垂线,则角 $\omega=\angle DCE=\angle DCF$ 称为对应于 C 点到直线 AB 的距离 CD 的平行角,如图1.1.4所示.从罗巴切夫斯基关于平行直线的假设,可得出一系列与欧几里得几

何不同的结论，如平行角 $\omega<\frac{\pi}{2}$；平行角 ω 是线段 CD 长度的单调递减函数，当 $CD\to 0$ 时，$\omega\to\frac{\pi}{2}$；三角形内角和小于两直角；相似三角形不存在；两条不相交直线之间的距离不是常量等．在这种新的几何中，非但尺规不能三等分已知角，而且线段的三等分也是不可能的．

罗巴切夫斯基建立的非欧几里得几何在当时并没有得到人们的承认．在他去世后，意大利数学家贝尔特拉米(E. Beltrami)于1868年发表论文《关于非欧几里得几何的解释》，其中给出了罗巴切夫斯基几何的第一个模型——具有负常曲率的伪球面，使得罗巴切夫斯基几何有了现实意义．可以说，这是人们对待罗巴切夫斯基几何看法的转折点，往后还有克莱因(F. Klein)和庞加莱(H. Poincaré)关于罗巴切夫斯基几何的解释．从此罗巴切夫斯基几何才被人们确认为也是现实空间的反映．罗巴切夫斯基成功地建立了一种非欧几里得几何，解决了第五公设问题，即它是不可能用除它以外的欧几里得的其余诸公理加以证明的．罗巴切夫斯基几何的建立显示了选取不同的公理系统作为逻辑推理的基础，则可以获得不同的几何学．所以欧几里得几何不再是几何学的同义语，欧几里得几何只是几何学中的一种．

1899年，德国数学家希尔伯特(D. Hilbert，1862—1943)在他的著作《几何基础》中最终弥补了欧几里得公理系统的不足之处，提供了欧几里得几何的一个完善的公理系统，解决了用公理法研究几何学的基础问题．

§1.2　几何公理法与其基本问题

任何一种几何学的研究对象大致可以分为两类，其一是元素(称为**基本对象**)，其二是元素之间的关系(称为**基本关系**)，这些构成几何学的原始概念．在几何学中，每个概念都应该给予定义，任何一个概念的定义不可避免地要用到其它的概念，而且这些概念都应该是已经定义过的．换言之，必须用已经定义过的概念来定义新的概念，而最初出现的概念(即原始概念)是不能给出定义的，这些最初出现的概念称为**基本概念**．几何学中的每个命题都应当根据逻辑推理方法给予证明，每个证明必须以已经证明过的命题为根据，而最初出现的命题(即原始命题)是不能给出证明的，这些命题称为**公理**．总之，几何学的若干基本概念(基本对象和基本关系)和若干公理的集合，称为一个**公理系统**，它构成一种几何学的基础．全部几何元素(基本对象)的集合就是这种几何学的**空间**．在这个公理系统的基础上，每个概念都必须给出定义，每条命题都必须给出证明，这就是几何公理法的基本思想．