

董光璧 著

易图的数学结构

上海人民出版社

易图的数学结构

董光壁 著

上海人民出版社

封面装帧 孙宝堂

易图的数学结构

董光壁 著

上海人民出版社出版、发行

(上海绍兴路54号)

本书由上海发行所经销 常熟兴隆印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 4.75 字数 88,000

1987年10月第1版 1987年10月第1次印刷

印数 1—5,000

书号 2074·490 定价 0.86 元

如果这种真理不总是不断地重新创造出来，它就会完全被我们遗忘掉。

——阿尔伯特·爱因斯坦

序

《周易》是一部奇异的古典，其中包含《经》、《传》两个部分。《周易》的《经》和《传》不是同一时期的作品，但自汉初以来，《周易》的《经》和《传》已融为一体。在思想史上发生重要作用的，是《经》和《传》的总体。近年发现了汉初的帛书《周易》，其编排次第以及内容与通行本不同。但是，应该承认，在历史上发生广泛影响的，不是帛书本，而是汉儒传授的通行本。

中国古代哲学典籍大多没有形式上的系统。《周易》的八卦、六十四卦，却形成了一个独特的系统，既不可能是六十三，也不可能是六十五。《周易》八卦、六十四卦，都用符号来表示一定的意义，这是所谓“象”。八卦、六十四卦以及三百八十四爻之间有一定的数理关系，这即所谓“数”。《周易》包含“象数之学”。汉代易学家喜讲象数，有时陷于牵强附会，支离烦琐。到宋代，邵雍提出自己的象数学说，自称为“先天之学”。他虽然接受了道教的一些观点，实际上大部分是他自己的创见。清代学者进行历史考据，论证“邵《易》非古”。邵氏之说诚然“非古”，但不失为一种新说，在历史上也有其一定的意义。

《周易》的象数之学与中国古代数学（算学）的关系如何？象数之学中表现了那些数学原理？象数之学是否反映了一些客观规律？这些都是应该深入研究的课题。近年以来，许多学者从事这方面的研究，已经取得一些成就。但是，研究这些课题，必须具备丰富的现代科学知识，又具备一定的历史知识，才能做到持之有故、言之成理。董光壁同志从事自然科学史研究，熟悉现代数学和物理学，近来运用现代科学知识对于《周易》的象数之学进行科学的考察，写成《易图的数学结构》一书，我看了以后，觉得这确实是一个有价值的尝试，对于《周易》古学中的数理奥秘，确实是有所发现。这是近年研究《周易》的科学内容以及《周易》与古代自然科学关系的新成果。我看了书稿之后非常高兴，于是把自己的一些感想写出来，作为弁言。

张岱年

1985年1月序于北京大学

目 录

前言.....	1
第一章 易学中的易图.....	3
第一节 《周易》大意.....	3
第二节 易学的源流.....	7
第三节 易学学派.....	22
第二章 易图对称性.....	27
第一节 易图之排布.....	27
第二节 卦之错综.....	39
第三节 错综对称性.....	44
第三章 易图的数学解.....	50
第一节 二进制解释.....	50
第二节 组合解释.....	57
第三节 代数解释.....	63
第四节 几何解释.....	67
第五节 矩阵解释.....	73
第四章 易对称群.....	82
第一节 群论的基本概念.....	82

第二节	生成群·····	85
第三节	几何对称群·····	87
第四节	阴阳反演对称群·····	90
第五章	阴阳定律·····	96
第一节	《周易》的变化图式·····	96
第二节	阴阳守恒律·····	100
第三节	阴阳平衡律·····	101
第四节	阴阳置换律·····	102
第六章	易同余式·····	104
第一节	《周易》筮法·····	104
第二节	易同余式·····	108
第七章	《周易》的科学意义·····	112
第一节	作为前科学的《周易》·····	113
第二节	从《周易》到“大衍求一术”·····	127
第三节	论真理的再发现·····	132

前 言

《周易》几乎可以说是中国最早的古典。它是符号体系和概念体系的统一体。自东周以来，历代学者对于它的解释和发挥，形成了源远流长的易学。在易学的研究中，《周易》的符号体系和概念体系都得到了发展。但是，长期以来，人们主要致力于其哲学含义的阐发。自德国数学家、哲学家莱布尼茨发现易图与二进制数表的一致性以后，人们逐渐增长了探索潜藏在《周易》中的科学道理的兴趣。这样，在易学研究中，除了已有的对《周易》作哲学研究的象数派和义理派之外，又出现了对它进行科学研究的数理派。对于《周易》进行数理科学研究的学者几乎都是在分析易图的基础上进行的。在这本小册子里，作者试图从数理科学的角度概述易学中易图研究的发展，并运用现代数学手段尽可能地在前人研究的基础上对易图的对称性和数学解作系统的阐述。主旨在于揭示易图的数学结构，虽然凡反映出数学思想之处都作了肯定，但并没有进行深入讨论。

通过对易图的数学研究可以看出，易学不仅蕴含着哲理，其符号体系中也包含有严格的数学逻辑性。正如莱布尼茨所

说,“易图是留传于宇宙间科学中之最古纪念物”;也如梁启超所说,“易学也可以叫数理的哲学”。

在易学之中所蕴含的真理,需要人们随着时代的前进不断地去发现,否则它将会被忘记。作者带着自己的尝试之作加入易学研究的行列,以结识学友。

作者

1984年8月于北京双榆树

第一章 易学中的易图

本章试图通过对易学发展史的粗略介绍，阐明易学中符号体系(易图)和概念体系的相互关系，叙述具有数学意义的易图的发展，而不是易图的全貌。

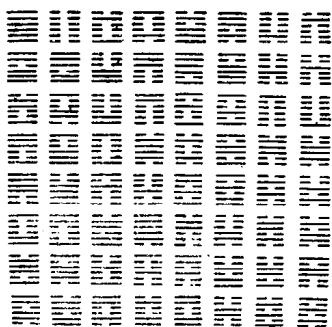
首先介绍《周易》大意，强调它的符号体系。次为易学源流：作为筮书的古《易》，由于在东周时期发展出《易传》而成为哲学著作；汉代易学以象取义，还不能算数学研究；宋代的邵雍创作易图，朱熹传之，为易学的数学研究奠定了基础；明、清学者阐发易图错综对称性，已显数学研究的端倪；莱布尼茨的易图二进制解纯是数学研究，清以后的学者继之，兴起了易学的数理研究。最后，关于易学学派，除象数派和义理派之外，还应当承认有一个数理学派存在并发展着。

第一节 《周易》大意

《周易》是一本阐述变化之理的中国古典。它是由符号集及其对应的概念系统组成的一个整体。流行的《周易》一书包括《经》和《传》两部分。《易经》和《易传》都非一人一时之作，而

是在流传中形成的集体著作。前者产生于商周之际，后者成于东周，后者是对前者的解释和发挥。

《易经》的符号体系是由代表“阴”的“--”和代表“阳”的“—”两种基本符号，按六个一组排列组合成的六十四组符号的集合。每个符号组都称为“卦”，并有一个特定的名称。组成卦的卦画称为“爻”，“--”称阴爻，“—”称阳爻，依其在卦中的位置，自下而上称初爻、二爻、三爻、四爻、五爻、上爻。六十四卦按一定的次序排列形成一个体系，如图 1.1.1 所示。



乾	坤	屯	蒙	需	讼	师	比
小畜	履	泰	否	同人	大有	谦	豫
随	蛊	临	观	噬嗑	贲	剥	复
无妄	大畜	颐	大过	坎	离	咸	恒
遁	大壮	晋	明夷	家人	睽	蹇	解
损	益	夬	姤	萃	升	困	井
革	鼎	震	艮	渐	归妹	丰	旅
巽	兑	涣	节	中孚	小过	既济	未济

图 1.1.1 《周易》六十四卦序

《易经》的经文由“彖辞”和“象辞”组成。彖辞阐述每卦整体的意义，亦称“卦辞”。象辞说明各爻的意义，亦称“爻辞”。

《易经》六十四卦依序排列。每卦先列卦形(符号)，次列卦名，再次列卦辞。每爻先列爻题，次列爻辞。爻题都是两个字，其中一个字代表爻在卦中的位置，另一个字代表爻的阴阳属性，阴爻用“六”，阳爻用“九”。

《易经》六十四卦的卦辞和爻辞共四千九百余字。先秦时

代统称卦辞和爻辞为“繇”，现在亦称“筮辞”。

《易传》包括十篇：《彖传》上、下两篇，《象传》上、下两篇，《系辞》上、下两篇，《文言》、《说卦》、《序卦》和《杂卦》各一篇，旧称《十翼》。《彖传》是解释卦辞的；《象传》是解释爻辞的；《系辞》是《易经》通论，说明它的演成和内容以及占筮方法；《文言》专门解释“乾”、“坤”二卦的意义；《说卦》说明八卦是六十四卦之源以及八卦的意义；《序卦》说明六十四卦的顺序；《杂卦》说明六十四卦两两对立之理。

《周易》六十四卦的卦形是由八卦相重而得。所谓八卦，就是由阴“--”和阳“—”两种符号，按三个一组排列组合而成的八组符号的集合。八个符号组分别象征天、地、火、水、风、雷、山、泽八种自然事物，相应赋予乾、坤、离、坎、巽、震、艮、兑八个卦名。图 1.1.2 列出八卦的符号和名称以及它们相应的象征。

乾	坤	震	巽	坎	离	艮	兑
☰	☷	☳	☴	☵	☲	☶	☱
天	地	雷	风	水	火	山	泽

图 1.1.2 八卦表

六十四卦为八卦相重而成，故每卦包括上下两部分，其上为外，古称“悔”，其下为内，古称“贞”。按《易经》占筮法所得之卦叫“本卦”古亦称“贞”，所变之卦叫“之卦”古亦称“悔”。图 1.1.3 为按上下卦八种象征排布的六十四卦表。

地地	山地	水地	风地	雷地	火地	泽地	天地
地山	山山	水山	风山	雷山	火山	泽山	天山
地水	山水	水水	风水	雷水	火水	泽水	天水
地风	山风	水风	风风	雷风	火风	泽风	天风
地雷	山雷	水雷	风雷	雷雷	火雷	泽雷	天雷
地火	山火	水火	风火	雷火	火火	泽火	天火
地泽	山泽	水泽	风泽	雷泽	火泽	泽泽	天泽
地天	山天	水天	风天	雷天	火天	泽天	天天

图 1.1.3 重卦表

《周易》的基本思想，是用“阴”和“阳”这对最基本的范畴说明宇宙间的一切变化和发展都根源于两种对立的力量在对抗中的消长。阴阳这对范畴是对一切对立的事物和现象的高度概括。例如，自然界的天和地、山和泽、水和火、风和雷，人的气质的刚和柔，情绪的喜怒、哀乐，人事的吉凶、祸福，事物

的表里、虚实等等。这些对立的事物和现象的相反相成、相互转化构成宇宙间一切变化和发展。在逻辑体系上是由阴阳两种符号的排列组合表示事物和现象的可能状态的分类。八卦表示事物和现象的八种可能的基本类型。八卦相重而形成六十四种可能的状态。卦的顺序的先后承接表达事物的因果关系，卦的对称性表达事物之间的共性。卦爻从初到上反映一个事物的发展过程。这样，《周易》就给出了一个朴素的、具有一定逻辑功能的关于事物变化发展的思想体系。

第二节 易学的源流

《易经》的符号和文字渊源久远。《系辞下》说：“古者庖犧氏之王天下也。仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情。”庖犧即伏羲氏，传说中的远古时代的历史人物，他是大约在公元前五万年相当于北京原人时代中华祖先某个原始人部落的首领。

在考古文物中似有卦画的遗痕。例如，在大约距今万年的陶片上有些刻画貌似卦画；在大约距今五千年的陶片上已有明显的八卦乾卦和坤卦那样的刻痕。这些是否可以视为八卦起源的证物还有待研究，因为它们只是貌似八卦的个别卦形，至今也并未发现完整的八卦符号体系。

关于卦画的起源有两种观点：一种是文字说，另一种是数码说。《易纬·乾凿度》说：“三，古天字。☰，古地字。☲，古火

字。三，古水字。三，古风字。三，古雷字。三，古山字。三，古泽字。”这样说来，上述仰韶文化陶片上的卦形刻画就是古文字。近人又提出数码说。^①在甲骨文和铭文中，常常出现三个数字一组和六个数字一组又不与它辞连接的古文字，据此有人认为它是易卦的叙述。三个数字一组的是单卦，六个数字一组的是重卦。例如，安阳四盘磨出土的卜骨有“七五七六六曰魁”，“七八七六七六曰隗”。如果按奇数为阳爻，偶数为阴爻，就可译为“☰曰魁”，“☷曰隗”。魁和隗是卦名，连起来是魁隗，是连山氏的别称。于是有人猜它可能是《连山》易的篇首。

按数码说，卦是从数字表示过渡为爻码表示的。从考古发掘汉墓所获《易经》竹简和帛书，似乎为这种观点提供了证据。长沙马王堆汉墓帛书《周易》的卦序、卦爻辞与流行本多不相同，而且阴爻的符号为“⚋”。^②安徽阜阳双古堆西汉汝阴侯（夏侯灶）墓《周易》竹简三百多片，虽然已破碎残缺太甚，不易属读，但保存完整的三个卦形的阴爻符号都是“⚋”，与今本《周易》和马王堆帛书都不同。^③因为第一期殷虚甲骨文中“六”写作“⚋”，所以说“⚋”由六而来，继而演化为“⚋”，最后写成“--”。

持数码说的没有提及古陶片上的“三”和“三”的刻画。考

① 张政烺：《试释周初青铜器铭文中的易卦》，载《考古学报》1980年第4期；《帛书〈六十四卦〉跋》，载《文物》1984年第3期。

② “马王堆帛书《六十四卦》书影”，载《文物》1984年第3期。

③ 《阜阳双古堆西汉汝阴侯墓发掘简报》，载《文物》1978年第8期。

考虑到这个事实，两说就发生了矛盾。

据先秦典籍记载，筮书不只一种，《连山》、《归藏》和《周易》都是由八卦和六十四卦组成的类似的筮书。《周礼·大卜》记载：“大卜掌‘三易’之法，一曰《连山》，二曰《归藏》，三曰《周易》。其经卦皆八，其别皆六十有四。”《连山》失传，《归藏》被考伪，后人推测，或说《连山》为神农《易》，《归藏》为黄帝《易》，或说《连山》为夏《易》，《归藏》为商《易》。三说不一，它们究竟是同存的异本还是各有所传承，学界尚未考定。学术界多认为《周易》产生于商周之际。司马迁在《史记·周本纪》中说：“文王……其囚羑里，盖益《易》之八卦为六十四卦。”作为传说，《周易》古经的传承谱系如下：

伏羲→神农→黄帝→夏→商→周文王

在东周时代易学第一次有较大的发展，并产生了质的变化。传易学者托名孔子创作《易传》，对古《易经》进行了解释和发挥，把《易经》的卜筮性质转变为哲学。《论语·述而》说：“子曰：‘加我数年，五十以学《易》，可以无大过矣。’”可见孔子读过《易》。司马迁在《史记·孔子世家》中说：“孔子晚而喜《易》，序《彖》、《系》、《象》、《说卦》、《文言》。”班固在《汉书·艺文志》中说：“孔氏为之《彖》、《象》、《系辞》、《文言》、《序卦》之属十篇。”汉儒遂谓《十翼》皆孔子所作。实非如此。《易传》着意发挥了《周易》古经关于变化的思想，给出命题：“生生之谓易”，“一阴一阳谓之道”，“刚柔相推而生变化”。这些命题把“阴阳”、“道”和《易》联系起来。《易传》的作者们显然是吸取