偏微分方程

PIANWEIFENFANGCHENG

教程

JIAOCHENG

朱长江 邓引斌 编著

科学出版社
www.sciencep.com

偏微分方程教程

朱长江　邓引斌　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书根据作者们多次对数学专业的大学本科生及研究生讲授偏微分方程课程的讲稿编写而成. 全书共分八章，包括一阶偏微分方程的求解，特征理论及方程的分类，双曲型、抛物型及椭圆型方程的求解方法及基本理论，Fourier 变换，Cauchy-Kovalevskaya 定理和 Lewy 的反例. 各章内容相对独立，自成体系，教学时可根据实际教学时数，任选几章独立安排教学.

本书可作为高等院校数学系本科生“偏微分方程”、“数学物理方程”课程的教材或参考书，也可作为理工科本科生和研究生“数学物理方程”、“数学物理方法”课程的参考书或教材.

图书在版编目（CIP）数据

偏微分方程教程/朱长江，邓引斌编著. －北京：科学出版社，2005

ISBN 7-03-015153-4

Ⅰ. 偏… Ⅱ. ①朱… ②邓… Ⅲ. 偏微分方程－高等学校－教材 Ⅳ. O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 018618 号

责任编辑：杨瑰玉

责任印制：高 嵘／封面设计：曹 刚

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉大学出版社印刷总厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2005 年 6 月第一次印刷 印张：13 3/4

印数：1～3 000 字数：262 000

定价：19.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

序　言

偏微分方程是以建立数学模型、进行理论分析和解释客观现象并进而解决实际问题为内容的一门数学分支学科.作为大学理工类专业的基础课程,无论对于数学专业还是非数学专业都十分重要.因此,写好关于偏微分方程课程的教材,一定要针对这门课程的特点,理论联系实际,写出从特殊到一般的结合,并努力反映学科研究的最新成果,以适应日益变化的实际需要.

本书的两位作者一直从事非线性偏微分方程的研究,并长期为华中师范大学数学专业的本科生及研究生、物理专业的本科生开设偏微分方程、数学物理方程等课程.他们多次应邀访问美国、瑞士、香港等国家和地区的大学,开展合作研究并为这些大学数学专业本科生讲授偏微分方程课程.他们所在的偏微分方程研究小组近年来还积极参与和组织了许多期各级各类的学术研讨班.作者这些教学、科研和学术交流的经历使他们积累了丰富的经验,为本书的编写提供了大量的素材.经过多年的积极酝酿和勤奋笔耕,这本期盼已久的教材终于脱稿并正式出版,实在是可喜可贺.

经过两位作者的精心选择、科学提炼和认真编排,本书向读者完整地展示了运用偏微分方程解决物理、力学及工程技术中实际问题的全过程和一般规律,并重点介绍了偏微分方程的几种常用求解方法,即特征线法(第二、四章)、分离变量法(第四、五、六章)和Green函数法(第六章),在理论上讲得透彻完整,在应用上讲得深入细致,做到了严密性与直观性的统一、科学性与可读性的统一,具有自己鲜明的特色.教材各章节内容由浅入深,相对独立,自成体系.第二章系统地介绍了用特征线法求解一阶偏微分方程的方法,它作为偏微分方程学习的基础,填补了目前某些同类教材的空白.第三章给出了二阶方程及一阶方程组的分类,这为分门别类地学好偏微分方程这门课程奠定了基础.第七章讲述了Fourier变换的基本理论,并通过典型例题阐明了Fourier变换在解常系数线性偏微分方程中的应用.第八章介绍了Cauchy-Kovalevskaya定理及Lewy的反例.由于作者对定理的证明作了科学的提炼,使得这样一部分学生较难理解和掌握的理论知识变得十分简洁直观,通俗易懂.

根据偏微分方程的特点,学习这门课程必须坚持理论联系实际,重点不仅在于知识的掌握,更应着眼于能力的培养与提高.希望广大同学将本书提供的一些典型问题均作为案例来对待,通过"解剖麻雀",揭示偏微分方程的一些带有普遍意义的思维方法、求解过程和推理结论,而不要仅仅满足于学习一些数学知识,更不要满足于对个别实例的机械模仿.只有这样,才能开阔思路,培养分析问题和解决问题的能力,真正达到学习这门课程的目的.

中国科学院院士　丁夏畦

2004年10月于北京

前　言

偏微分方程作为大学的一门基础课，无论是对数学专业还是非数学专业的理工科学生都十分重要．它的任务是建立数学模型，寻找求解方法，进行理论分析，从而达到解释物理现象的目的．本书是在“偏微分方程讲义”的基础上修改而成，“讲义”的大部分内容曾在数学专业的本科生选修课及研究生基础课上讲授过多次．经过多年的教学实践，并跟据一些专家的建议，在参阅了大量有关偏微分方程及数学物理方程教材的基础上，我们对“讲义”的内容进行了一定的取舍，并对部分章节的先后顺序进行了重新安排．

本书共分八章．第一章介绍偏微分方程的基本概念和各种经典方程及定解问题的物理及力学来源；第二章介绍一阶偏微分方程的求解方法；第三章介绍特征理论及方程的分类；第四、五、六章分别讨论双曲型、抛物型和椭圆型方程定解问题的求解方法、理论分析、适定性讨论，并利用所获得的解对物理现象及力学规律加以解释；第七章介绍Fourier 变换及其应用；第八章介绍Cauchy-Kovalevskaya 定理和Lewy 的反例．为了便于读者理解并牢固地掌握这些内容，我们在每一章中都安排了一定数量的习题．本书各章内容相对独立，自成体系，教学时可根据实际情况，任选几章独立安排教学．

本书在编写过程中得到了华中师范大学教务处、数学与统计学学院及国家自然科学基金委员会的大力支持，特此深表谢意．

由于我们的水平有限，缺点和错误在所难免，诚恳地希望读者批评指正．

编　者

2004 年 10 月

目　　录

第一章　方程的导出及定解问题的提法

自从微积分产生以后，人们就设法把物理学、力学和工程技术问题中的一些规律归结成偏微分方程进行研究，习惯上称之为数学物理方程. 这类方程的内容基本上都是一些典型的偏微分方程. 因此我们说，偏微分方程是一门历史悠久的学科，在它的发展过程中，具有紧密联系实际的特点. 生产和科学技术的不断发展，不仅丰富和更新了偏微分方程的研究内容，而且随着问题的解决，也产生了许多新的数学方法，从而发展了偏微分方程的理论，同时，也促进了偏微分方程与数学的许多分支及自然科学各部门之间的联系. 本章将从几个简单的物理模型出发，推导出本课程将要讨论的三种典型方程及其相应的典型定解问题.

§1　基本概念

1.1　什么是偏微分方程

所谓**偏微分方程**，是指关于多元函数 $u(x,y,\cdots)$ 及其偏导数的关系式

$$F(x,y,\cdots,u,u_x,u_y,\cdots,u_{xx},u_{xy},u_{yy},\cdots)=0, \tag{1.1}$$

其中 F 是自变量 $x,y,\cdots$，未知函数 u 及 u 的有限多个偏导数的已知函数. 例如关系式

$$a(x,y)u_x+b(x,y)u_y=f(x,y), \tag{1.2}$$

$$(u_x^2+u_y^2+1)u^2=1, \tag{1.3}$$

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0, \tag{1.4}$$

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0, \tag{1.5}$$

$$u_{tt}-u_{xx}+u^3=0, \tag{1.6}$$

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1.7}$$

等都是偏微分方程.

1.2　偏微分方程的解

如果给定一个函数 $u=\varphi(x,y,\cdots)$，将它及它对自变量的各阶偏导数代人方程(1.1)，能使(1.1)成为恒等式，则称函数 φ 是偏微分方程(1.1)的解. 我们知道，一个线性常微分方程如果有解，就必有无穷多个解，其表现形式是依赖于一个或几个任意常数的通解，于是自然会想到偏微分方程的通解也会含有任意元素.

例1 求偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{1.8}$$

的通解.

解 关于 y 积分方程(1.8),可得其通解为 $u=\varphi(x)$,其中 φ 是 x 的任意连续可微函数.

但是,在偏微分方程中,除了一些特别简单的例子以外,求通解是很困难的.而且即使求得了通解,要想利用所给的伴随条件将其表达式中的任意元素确定出来,也是一件不容易的事情,甚至是不可能的.

1.3 偏微分方程的阶

在偏微分方程的研究中,"阶"是一个非常基本的概念.所谓偏微分方程的阶,就是方程中实际所含未知函数的偏导数中的最高阶数,如上例中的方程(1.2)、(1.3)是一阶偏微分方程,(1.4)、(1.5)和(1.6)是二阶偏微分方程,(1.7)是三阶偏微分方程.

1.4 线性偏微分方程

如果方程关于未知函数及其各阶偏导数都是线性的,则称它为**线性偏微分方程**.例如方程(1.2)和(1.4)都是线性偏微分方程.在线性偏微分方程中,不含有 u 及它的偏导数的项称为**自由项**;当自由项为零时,称方程为**齐次方程**,如方程(1.4);否则就称为**非齐次方程**,如方程(1.2).

一般的线性齐次偏微分方程可写为

$$\mathscr{L}u=0, \tag{1.9}$$

线性非齐次偏微分方程可写为

$$\mathscr{L}u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n), \tag{1.10}$$

其中 $\mathscr{L}$ 是 u 的某一偏微分线性算子,例如

$$\mathscr{L}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right),$$

$$\mathscr{L}=\frac{\partial}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right),$$

$$\mathscr{L}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

等等.所谓**线性算子**,是指对任意的函数 u,v 及常数 c,总有

$$\mathscr{L}(u+v)=\mathscr{L}u+\mathscr{L}v,\quad \mathscr{L}(cu)=c\mathscr{L}u. \tag{1.11}$$

由方程(1.11),我们可得关于线性方程的如下**叠加原理**.

定理1.1 若 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 是线性齐次方程(1.9)的解,则 $u=c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_mu_m$ 也是(1.9)的解;若 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 是线性非齐次方程(1.10)的解,则 $u=c_1u_1+$

$c_2u_2+\cdots+c_nu_n$ 是如下线性非齐次方程

$$\mathscr{L}u=f\sum_{i=1}^{n}c_i$$

的解，其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意常数.

1.5 非线性偏微分方程

我们把不是线性偏微分方程的偏微分方程统称为**非线性偏微分方程**. 在非线性偏微分方程中，如果关于未知函数的所有最高阶偏导数都是线性的，则称它为**拟线性偏微分方程**. 例如方程(1.5)、(1.6)和(1.7)都是拟线性偏微分方程. 在拟线性偏微分方程中，由最高阶偏导数所组成的那一部分，称作方程的**主部**；若主部内的系数都是常数或是自变量的已知函数，这时方程被称作是**半线性**的，如方程(1.6)和(1.7)就是半线性的. 对于既不是线性也不是拟线性的偏微分方程，就称它为**完全非线性偏微分方程**，如方程(1.3)就是. 一般地，我们又把拟线性偏微分方程及完全非线性偏微分方程，统称为非线性偏微分方程.

习　题　1-1

1. 指出下列方程的阶并判断它是线性的，还是非线性的. 如果是线性的，说明它是齐次的，还是非齐次的：

(1) $u_t-(u_{xx}+u_{yy})+1=0$；

(2) $u_t-u_{xx}+xu=0$；

(3) $u_t-u_{xxt}+uu_x=0$；

(4) $u_x^2+uu_y=0$；

(5) $u_{tt}-u_{xx}+t^2+x^2=0$；

(6) $u_x+e^yu_y=0$；

(7) $u_t+u_{xxxx}+\sqrt{1+u}=0$；

(8) $u_x(1+u_x^2)^{-\frac{1}{2}}+u_y(1+u_y^2)^{-\frac{1}{2}}=0$；

(9) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0$；

(10) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\log u=0$.

2. 设 $f(x)$ 和 $g(y)$ 是任意的二次连续可微函数，验证函数 $u=f(x)g(y)$ 满足方程

$$uu_{xy}-u_xu_y=0.$$

3. 验证函数 $u(x,y)=\dfrac{1}{6}x^3y^2+x^2+\sin x+\cos y-\dfrac{1}{3}y^2+4$ 是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x^2y$$

的解.

4. 验证函数$u(x,y)=x^2-y^2$和$u(x,y)=e^x\sin y$都是方程$u_{xx}+u_{yy}=0$的解.

5. 验证函数

$$u(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}$$

在区域$\Omega=\{(x,y,t)\mid(x-\xi)^2+(y-\eta)^2<a^2t^2\}$内满足方程

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),$$

其中a为正常数,ξ,η为任意实数.

§2 几个经典方程

数学物理中的许多问题,都可由一个偏微分方程来描述,本节将介绍几个从物理学和力学中提出的典型的偏微分方程.

2.1 弦振动方程

弹性弦的振动问题,是一个很有意义而且十分重要的古典问题,下面我们建立它的数学模型.

所谓弦是指一条具有弹性的、均匀的、非常柔软的细线,它能够承受相对小的横向振动,并且它在弯曲时所产生的抵抗力比之于张力,可以忽略不计,故张力沿着切线方向.例如,一条被拉直的小提琴弦.

我们考虑弦的微小横振动,如图1-1选择坐标系,将弦的两端固定在x轴的原点O及点L上,并设$OL=l$.所谓横振动是指弦的运动发生在一个平面内,而且弦上各点的位移与弦平衡位置垂直.令$u(x,t)$表示弦上位置为x的点在时刻t的位移.用$\rho(x)$表示弦的线密度(即单位长度细线的质量).如果弦是均匀的,则$\rho(x)=$常数.

我们将在上述假设下,用如下两个物理定律来导出弦振动方程.

牛顿(Newton)第二定律:

作用在物体上的力=该物体的质量×该物体的加速度

动量原理:

作用在物体上的冲量=该物体的动量的变化

在弦上任取一小段$[x_1,x_2]$,令$T(x,t)$表示弦在点x处时刻t的张力,用$\alpha(x,t)$表示弦在点x处时刻t的切线方向和x轴之间的夹角,于是在时刻t沿着铅直方向作用在弦段上的张力是

$$T(x_2,t)\sin\alpha(x_2,t)-T(x_1,t)\sin\alpha(x_1,t). \qquad (2.1)$$

设$\Delta x=x_2-x_1$,由于弦的振动很小,所以弦上各点的斜率也很小,从而有

$$\sin\alpha\approx\tan\alpha.$$

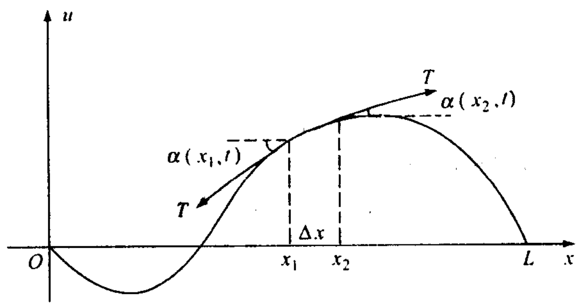

图 1-1

而 $\tan\alpha=u_x(x,t)$，于是(2.1)可写为

$$T(x_1+\Delta x,t)u_x(x_1+\Delta x,t)-T(x_1,t)u_x(x_1,t)=\frac{\partial}{\partial x}\big(T(x,t)u_x(x,t)\big)\Big|_{x=\bar{x}}\Delta x,$$

其中 $\bar{x}\in(x,x+\Delta x)$.

另一方面，在时刻 t 弦段 $(x,x+\Delta x)$ 的动量为

$$\int_x^{x+\Delta x}\rho u_{tt}(x,t)\mathrm{d}x=\rho u_{tt}(\tilde{x},t)\Delta x,$$

其中 $\tilde{x}\in(x,x+\Delta x)$.

根据动量原理有

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(T(x,t)u_x(x,t)\big)\Big|_{x=\bar{x}}\Delta x=\rho u_{tt}(\tilde{x},t)\Delta x.$$

将上式两端除以 Δx，并令 $\Delta x\to 0$，即得

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(T(x,t)u_x(x,t)\big)=\rho u_{tt}(x,t). \tag{2.2}$$

下面我们证明张力 $T(x,t)$ 恒为常数.

事实上，因为弦的振动是横向的，所以作用于弦段上所有力沿 Ox 轴的分量应等于零，即

$$T(x_2,t)\cos\alpha(x_2,t)-T(x_1,t)\cos\alpha(x_1,t)=0, \tag{2.3}$$

由于弦的振动是微小的，所以 u_x^2 可以忽略不计，即

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\approx 1,$$

由方程(2.3)知

$$T(x_1,t)=T(x_2,t),$$

这说明张力 T 与 x 无关. 下面证明张力 T 与时间无关. 因为在振动过程中弦长的改变量为

$$\int_0^l \sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x-l,$$

它是关于u_x的二阶小量.

根据虎克(Hooke)定律知,使弦的长度改变所需加的张力也是u_x的二阶小量.现假设弦是绷紧的,也就是说,原来的张力足够大,因而由于弦的振动使长度改变而产生的张力变化可忽略不计,即弦上每一点所受张力在运动过程中保持不变.这样,张力T与时间t也无关,于是张力T恒为常数.

此时方程(2.2)可写成

$$Tu_{xx}=\rho u_{tt},$$

即

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \tag{2.4}$$

其中$a^2=\dfrac{T}{\rho}$表示弦的张力密度,这就是通常所谓的**弦振动方程**.它是最早被提出的一个偏微分方程.

如果作用于弦上的还有外力,其线密度为$F(x,t)$,这时方程(2.4)将改写为

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), \tag{2.5}$$

其中$f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{\rho}$表示单位质量在点$x$处所受的外力.

弦振动方程中只含有两个自变量x和t,其中x表示位置,t表示时间.由于它描述的弦振动亦称为波动现象,因此又称弦振动方程为**一维波动方程**.

2.2 膜振动方程

对于薄膜的微小横振动,我们可以用类似的方法处理.所谓薄膜是指柔软而有弹性的薄片,它的重量相对于张力可以忽略不计,所以薄膜上每一点的张力总是沿着该点的切线方向.我们考察一张绷紧的均匀薄膜,它的静止状态在水平位置xOy平面内,假设薄膜的运动只是上下方向的,并设在运动时薄膜的弯曲是极微小的.用函数$u(x,y,t)$表示薄膜在点(x,y)处于时刻t的位移,由于薄膜的弯曲极为微小,所以u_x和u_y的高次项可以忽略不计.与推导弦振动方程类似,我们可以证明张力T可近似地看做是与时间t及位置(x,y)无关的常量.

现在我们在薄膜上任取一小块$\Delta\sigma$,由于振动是微小的,所以它的面积可近似等于$\Delta x\Delta y$($\Delta x=x_2-x_1,\Delta y=y_2-y_1$).用$\alpha(x,y)$和$\beta(x,y)$表示薄膜在点$(x,y)$处的切向与$x$轴和$y$轴的夹角,故沿着铅直方向作用在这块薄膜上的力为(如图1-2)

$$T\Delta y\sin\alpha(x_2,y)-T\Delta y\sin\alpha(x_1,y)+T\Delta x\sin\beta(x,y_2)-T\Delta x\sin\beta(x,y_1).$$

由牛顿第二定律,有

$$T\Delta y[\sin\alpha(x_2,y)-\sin\alpha(x_1,y)]+T\Delta x[\sin\beta(x,y_2)-\sin\beta(x,y_1)]=\rho\Delta\sigma u_{tt}(\bar{x},\bar{y},t), \tag{2.6}$$

其中$\Delta\sigma$是这一小块薄膜的面积,u_{tt}是加速度,$\bar{x}\in(x_1,x_2)$,$\bar{y}\in(y_1,y_2)$.

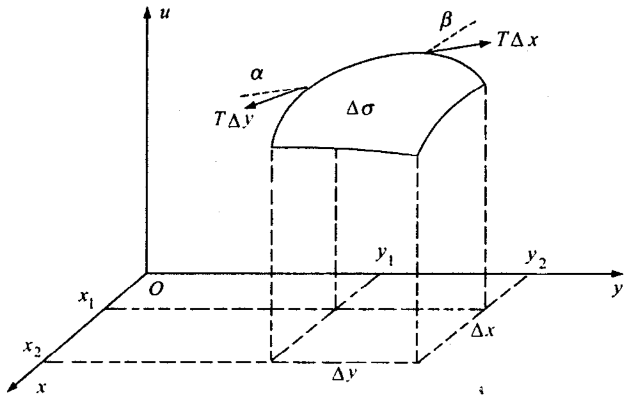

图 1-2

由于薄膜的振动是微小的，于是有

$$\Delta\sigma \approx \Delta x \Delta y,$$

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = u_x(x,y,t),$$

$$\sin\beta \approx \tan\beta = u_y(x,y,t).$$

代入(2.6)式中，得到

$$T\Delta y[u_x(x_2,y,t)-u_x(x_1,y,t)]+T\Delta x[u_y(x,y_2,t)-u_y(x,y_1,t)]$$
$$=\rho\Delta x\Delta y u_{tt}(\bar{x},\bar{y},t),$$

上式两边同除以 $\rho\Delta x\Delta y$，得

$$\frac{T}{\rho}\left[\frac{u_x(x_1+\Delta x,y,t)-u_x(x_1,y,t)}{\Delta x}+\frac{u_y(x,y_1+\Delta y,t)-u_y(x,y_1,t)}{\Delta y}\right]$$
$$=u_{tt}(\bar{x},\bar{y},t), \tag{2.7}$$

在(2.7)式中，令 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$，得

$$u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0, \tag{2.8}$$

其中 $a^2=\dfrac{T}{\rho}$ 表示薄膜的张力密度，这就是**薄膜振动方程**，亦称为**二维波动方程**.

如果作用在薄膜上的还有外力，其密度为 $F(x,y,t)$，这时方程(2.8)可改写为

$$u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y,t), \tag{2.9}$$

其中 $f(x,y,t)=\dfrac{F(x,y,t)}{\rho}$ 表示单位质量在点 (x,y) 处所受的外力.

注 用类似的方法可推出三维波动方程

$$u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=f(x,y,z,t),$$

它表示电磁波、声波的传播.

2.3 热传导方程

我们考察空间物体G的热传导问题，令函数$u(x,y,z,t)$为物体G在点(x,y,z)处t时刻的温度，若温度不是常量，则热量由温度高处向温度低处传递，这种现象叫做"热传导"。根据傅里叶(Fourier)热传导定律，物体在无穷小时段dt内流过一个无穷小面积dS的热量dQ与物体温度沿曲面dS的法线方向的方向导数$\frac{\partial u}{\partial n}$成正比，即

$$dQ=-\kappa(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}dSdt, \tag{2.10}$$

其中$\kappa(x,y,z)$称为物体在点(x,y,z)处的热传导系数，它应取正值。负号的出现是由于热量的流向和温度的梯度的正向(即$\mathrm{grad}u$的方向)相反。也就是说，如果$\mathrm{grad}u$与曲面的法线$\boldsymbol{n}$交成锐角，则$\frac{\partial u}{\partial n}=\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{n}>0$，它表示依法线$\boldsymbol{n}$的方向越过曲面时温度要增加，而热流方向却与此相反，即从温度高的一侧流向低的一侧，依法线$\boldsymbol{n}$的方向越过曲面的流量就应该是负的。

在物体G内任取一闭曲面S，它所包围的区域记为D，以$\boldsymbol{n}$表示它的外法线方向。于是从时刻t_1到时刻t_2流进闭曲面内的全部热量为

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\iint_S\kappa(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}dSdt. \tag{2.11}$$

今假设函数$u(x,y,z,t)$关于变量x,y,z具有二阶连续偏导数，关于t具有一阶连续偏导数，利用奥斯特罗格拉特斯基-高斯(Ostrogradsky-Gauss)公式(简称奥-高公式)，可把(2.11)改写成

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(\kappa u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\kappa u_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\kappa u_z)\right)dxdydzdt. \tag{2.12}$$

另一方面，区域D内的总热量又等于

$$\iiint_D C(x,y,z)\rho(x,y,z)u\,dxdydz, \tag{2.13}$$

其中$\rho(x,y,z)$是物体的密度，$C(x,y,z)$是它的比热。流入的热量使物体内温度发生变化，在时间间隔(t_1,t_2)中物体温度从$u(x,y,z,t_1)$变化到$u(x,y,z,t_2)$，它应吸收的热量是

$$\begin{aligned}Q_2&=\iiint_D C\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]dxdydz\\&=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D C\rho\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}dxdydzdt.\end{aligned} \tag{2.14}$$

由于热量守恒，则$Q_1=Q_2$，即流入的热量应等于物体温度升高所吸收的热量，因此有等式