普通高等教育"十五"国家级规划教材

应用统计学系列教材 Texts in Applied Statistics

应用随机过程

Applied Stochastic Processes

张 波 张景肖 编著

Zhang Bo Zhang Jingxiao

清华大学出版社 Springer

普通高等教育"十五"国家级规划教材

应用统计学系列教材 Texts in Applied Statistics

应用随机过程
Applied Stochastic Processes

张 波 张景肖 编著
Zhang Bo Zhang Jingxiao

清华大学出版社 Springer
北京

内容简介

本书是现代应用随机过程教材，内容从入门知识到学术前沿，包括预备知识、随机过程的基本类型、Poisson 过程、更新过程、Markov 链、鞅、Brown 运动、随机积分、随机微分方程及其应用和 Levy 过程等. 本书配有大量与社会、经济、金融、生物等专业相关的例题和习题，并给出了参考答案，方便自学.

本书可以作为高等院校统计、经济、金融、管理专业的本科生教材，也可以作为其他相关专业的研究生教材和教学参考书，对广大从事与随机现象相关工作的实际工作者也极具参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

应用随机过程/张波，张景肖编著. —北京：清华大学出版社，2004. 9
(应用统计学系列教材)
ISBN 7-302-08940-X

Ⅰ. 应… Ⅱ. ①张… ②张… Ⅲ. 随机过程—高等学校—教材 Ⅳ. O211. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 062835 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦
http://www. tup. com. cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
责任编辑：王海燕
封面设计：常雪影
印 刷 者：清华大学印刷厂
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：170×230　**印张**：16. 5　**字数**：274 千字
版　　次：2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-08940-X/O · 375
印　　数：1～3000
定　　价：22. 00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换. 联系电话：(010)62770175-3103 或(010)62795704

应用统计学系列教材

Texts in Applied Statistics

序

随着社会经济的飞速发展，统计学课程设置的不断调整，统计学教材已经有了很大的变化.为了适应这些变化，我们从 2000 年开始编写面向 21 世纪统计学系列教材，经过近 4 年的实践，该系列教材取得了较好的效果，基本实现了预定的目标.然而目前学科的发展和社会的进步速度相当快，其中的一些教材已经需要进一步修订，也有部分内容成熟、适合教学需要的教材没有列入编写计划.

为满足应用统计科学和我国高等教育迅速发展的需求，清华大学出版社和施普林格出版社（Springer-Verlag）合作，倡议出版这一套“应用统计学系列教材”，作为对现有统计学教材的全面补充和修订.这套教材具有以下特点：

1. 此套丛书属于开放式的，一旦有好的选题，即可列入出版计划.

2. 在教材选择上，拓宽了范围.有些教材主要面向经济类统计学专业，包括金融统计、风险管理与精算方面的教材.部分教材面向人文社科专业，而另外一些教材则面向自然科学领域，包括生物统计、医学统计、公共卫生统计等.

3. 本套教材的编写者都是活跃在教学、科研第一线的教师，他们能够积极地、广泛地吸收国内外最新的优秀成果.能够在教学中反复对教材进行补充修订和完善.

4. 强调与计算机应用的结合，在教材编写中，注重计算机软件的应用，特别是可编程软件的应用.对于那些仅限于应用方法的教材，充分考虑读者的需求，尽量介绍简单易学的“傻瓜”

软件.

5. 本套教材包括部分优秀国外教材译著，对于目前急需，而国内尚属空白的教材，选择部分国外具有广泛影响的教材，进行翻译出版.

我们希望这套系列教材的出版能够对我国应用统计科学的教育和我国统计事业的健康发展起到积极作用.感谢参与教材编写的中国人民大学统计学院和兄弟院校的教师以及进行审阅的同行专家.让我们大家共同努力，创造我国应用统计学科新的辉煌.

易丹辉

2004 年 1 月

前　言

本书的初稿曾在中国人民大学统计学系本科生的教学中多次使用，反映良好. 此次出版，我们根据广大读者的反馈意见，对部分内容进行了适当调整，对 Markov 过程的讨论更加详尽，并增加了随机微分方程和 Levy 过程等新的内容.

几十年来，由于实际问题的需要和数学工作者的努力，随机过程无论在理论上还是在应用上都有了蓬勃的发展. 它的基本知识和方法，不仅为数学、概率统计专业所必需，也为工程技术、生物信息及经济领域的应用与研究所需要. 因此，随机分析的方法越来越受到人们的重视，高等院校的学生、工程技术人员、金融工作者，更迫切地需要学习和掌握随机过程的知识. 本书是为适应这种需求，根据近年来讲授这门课的教学实践所积累的资料，参考国内外有关著作编写而成. 由于随机过程这门学科发展十分迅速，其内容十分丰富，作为一本大学本科生用教科书，不可能包括其全部内容. 因此，我们力图根据经济类和管理类本科生教学选择素材. 为适应更广泛的读者，本书着重于随机过程的基础知识和基本方法的介绍，特别注重实际应用，尽量回避测度论水平的严格证明，只有第 6 章的部分内容、第 8 章和第 9 章不可避免的用到一些测度论知识. 这些内容初学者可以根据各自的基础进行取舍，数学基础稍好、有测度论基础或对数理金融有兴趣的读者可以选学. 为了方便读者，我们在第 1 章中用很小的篇幅，对概率测度和积分进行了初步介绍，希望对读者有所帮助. 一般读者只要具有高等数学及概率论的基础知识便可阅读和理解本书的大部分内容. 我们建议对大学本科生以 54 学时讲授本书前 7 章的内容. 如果课程设置为 60 学时以上，则可以讲

授前 8 章的全部内容，并对第 9 章做简单介绍. 如果课时比较少，教师可根据授课对象适当选择教学内容.

全书大体可分为 3 个部分. 第 1 部分是预备知识和随机过程最基本的内容，一般教科书都包含这部分内容（第 1,2,3,5 章）. 第 2 部分是更新过程，这一内容在许多教科书中没有单独讨论. 考虑到它在应用中的重要性，特别是在人口学和保险论中的应用，故将它放在第 4 章讲授. 第 3 部分包括第 6,7,8,9 章，鉴于在经济和金融领域非常广泛的应用，分别介绍鞅、Brown 运动、随机微分方程及其应用和 Levy 过程. 考虑到实际问题的需要，本书第一次将 Levy 过程写入随机过程的教科书中.

本书配有一些与社会、经济、金融、管理以及生物等领域相关的例题和习题，以帮助学生加深理解，提高应用随机过程理论解决问题的能力. 为了便于自学，书末给出了大部分习题的答案，供自学者参考. 为了便于有兴趣的读者进一步学习，我们对主要内容增加了一个文献评注，同时书后列出较多的参考书目，为这些读者提供线索. 因此，虽然我们强调主要着眼于经济管理类本科学生，但是对于这些专业的研究生以及某些应用数学和其他理工科的本科生、研究生来说，也不难发现使用本书的方便之处.

本书的编写得到吴喜之、张尧廷、易丹辉、顾岚、肖争艳等许多同仁的鼓励、支持和帮助；宋士吉教授和刘立新博士分别在清华大学、北京大学和对外经贸大学使用过本书的初稿，并对本书提出了许多宝贵的修改意见；薛芳，李晓明，刘晓华，吴孟书，何艳青，胡威等同学提供了习题参考答案. 在此谨表衷心谢意！

同时也要感谢中国人民大学统计学院，使得笔者有机会在教学实践中完成本书的写作和修改. 还要感谢教育部的支持，将本书列为普通高等教育“十五”国家级规划教材，使得本书得以顺利出版.

由于编者水平所限，书中的缺点错误在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2004 年 2 月

目 录

第1章

预备知识

随机过程通常被视为概率论的动态部分. 在概率论中研究的随机现象,都是在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个或有限多个随机变量的规律性. 在讨论中心极限定理时也不过是对随机变量序列的讨论. 但在实际问题中,我们还需要研究一些随机现象的发展和变化过程,即随时间不断变化的随机变量,而且,所涉及的随机变量通常是无限多个,这就是随机过程所要研究的对象. 随机过程以概率论作为其主要的基础知识,为此,我们首先对在本书中经常用到的概率论的基本知识作简要的回顾.

1.1 概率空间

随机试验是概率论的基本概念,试验的结果事先不能准确地预言,但具有如下3个特性:

(1) 可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的结果不止一个,但预先知道试验的所有可能的结果;

(3) 每次试验前不能确定哪个结果会出现.

记随机试验的基本结果为ω,称作**样本点**,随机试验所有可能结果组成的集合称为这个试验的**样本空间**,记为Ω. Ω中的样本点ω也称为**基本事件**,样本空间Ω称为**必然事件**,空集$\varnothing$称为**不可能事件**. Ω的子集A由基本事件组成,通常称为**事件**. 但是在实际问题中,人们一般不是对样本空间的所有子集都感兴趣,而是关心某些事件及其发生的可能性的大小. 我们用下面的概念来刻画这种事件.

定义 1.1 设 Ω 是一个样本空间(或任意一个集合),$\mathscr{F}$ 是 Ω 的某些子集组成的集合族.如果满足:

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$;

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$,则 $A^c=\Omega\backslash A\in\mathscr{F}$;

(3) 若 $A_n\in\mathscr{F}$, $n=1,2,\cdots$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

则称 $\mathscr{F}$ 为**σ 代数**.$(\Omega,\mathscr{F})$称为**可测空间**,$\mathscr{F}$ 中的元素称为**事件**.

如果 $\mathscr{F}$ 是事件的 σ 代数,则(1)$\varnothing\in\mathscr{F}$; (2)当 $A_n\in\mathscr{F}$, $n\geqslant1$, $\bigcap\limits_{n\geqslant1}A_n\in\mathscr{F}$.

定义 1.2 设 $\Omega=\mathbb{R}$.由所有半无限区间$(-\infty,x)$生成的 σ 代数(即包含集族$\{(-\infty,x),x\in\mathbb{R}\}$的最小 σ 代数)称为$\mathbb{R}$上的 **Borel σ 代数**,记为 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$,其中的元素称为 Borel 集合. 类似的可定义$\mathbb{R}^n$上的 **Borel σ 代数** $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

定义 1.3 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间,$P(\cdot)$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的实值函数.如果

(1) 任意 $A\in\mathscr{F}$, $0\leqslant P(A)\leqslant1$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 对两两互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots$(即当 $i\neq j$ 时, $A_i\cap A_j=\varnothing$),有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 P 是$(\Omega,\mathscr{F})$上的**概率**, $(\Omega,\mathscr{F},P)$称为**概率空间**,$P(A)$称为事件 A 的概率.

由定义易见,事件的概率有如下性质:

(1) 若 A, $B\in\mathscr{F}$,则 $P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)$.

(2) 若 $A,B\in\mathscr{F}$,且 $A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$ (单调性).

(3) 若 $A,B\in\mathscr{F}$,且 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(A)-P(B)$.

(4) 若 $A_n\in\mathscr{F}$, $n\geqslant1$, 则 $P\Big(\bigcup\limits_{n\geqslant1}A_n\Big)\leqslant\sum\limits_{n\geqslant1}P(A_n)$.

(5) 若 $A_n\in\mathscr{F}$,且 $A_n\uparrow A$,即 $A_n\subset A_{n+1}$, $n\geqslant1$,且 $\bigcup\limits_{n\geqslant1}A_n=A$, 则

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)\quad(\text{下连续}).$$

(6) 若 $A_n\in\mathscr{F}$,且 $A_n\downarrow A$,即 $A_{n+1}\subset A_n$, $n\geqslant1$,且 $\bigcap\limits_{n\geqslant1}A_n=A$,则

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)\quad(\text{上连续}).$$

如果概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$的 P-零集(即零概率事件)的每个子集仍为事件,则称为**完备的概率空间**.为了避免 P-零集的子集不是事件的情形出现,我们

把概率测度完备化. 令 $\mathcal{N}$ 代表 Ω 的所有 P-零集的子集的全体. 由 $\{\mathcal{F},\mathcal{N}\}$ 生成的 σ 代数(即包含 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{N}$ 的最小 σ 代数)称为 $\mathcal{F}$ 的完备化，记为 $\overline{\mathcal{F}}$. $\overline{\mathcal{F}}$ 中的每个集合 B 都可以表示为 $B=A\cup N$，其中 $A\in\mathcal{F}$，$N\in\mathcal{N}$，且 $A\cap N=\varnothing$. 定义

$$\overline{P}(B)=\overline{P}(A\cup N)=P(A).$$

则 P 就被扩张到 $\overline{\mathcal{F}}$ 上.

容易验证，$\overline{P}$ 是 $\overline{\mathcal{F}}$ 上的概率测度. 集函数 $\overline{P}$ 称为 P 的完备化. 本书总假定 P 是完备的概率测度.

定义 1.4 设 $A_n\in\mathcal{F}$，$n\geqslant 1$. 所有属于无限多个集合 A_n 的 ω 的集合称为集列 $\{A_n\}$ 的**上极限**，记为 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. 可以证明

$$\limsup_{n\to\infty} A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n.$$

有时也记为 $\{A_n, \text{i. o.}\}$. 集列 $\{A_n\}$ 的**下极限**定义为

$$\liminf_{n\to\infty} A_n=\{\omega\in\Omega:\ \exists\, n_0,\ \forall\, n>n_0, \omega\in A_n\}.$$

容易证明

$$\liminf_{n\to\infty} A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n.$$

下面看一个例子.

例 1.1 设有某人在反复地投掷硬币，观察硬币朝上的面是正面或反面. $\Omega=\{$所有由投掷结果“正面”和“反面”组成的序列$\}$，$\mathcal{F}=\{\Omega$ 的所有子集$\}$，记 A_n 为第 n 次投掷的是“正面”的事件，则

$$\limsup_{n\to\infty} A_n=\{\text{有无限多个投掷结果是“正面”}\}.$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n=\{\text{除有限多个外，投掷结果都是“正面”}\}.$$

1.2 随机变量和分布函数

定义 1.5 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是(完备的)概率空间，X 是定义在 Ω 上，取值于实数集 $\mathbb{R}$ 的函数，如果对任意实数 $x\in\mathbb{R}$，$\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}\in\mathcal{F}$，则称 $X(\omega)$ 是 $\mathcal{F}$ 上的**随机变量**，简称为随机变量. 函数

$$F(x)=P\{\omega:X(\omega)\leqslant x\},\quad -\infty<x<\infty$$

称为随机变量 X 的**分布函数**.

如果有函数 $f(x)$，满足

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t, \qquad (1.2.1)$$

则称 $f(x)$为随机变量 X 或其分布函数 $F(x)$的分布密度. 如果 X 具有分布密度,则称 X 为连续型随机变量;如果 X 最多以正概率取可数多个值,则称 X 为离散型随机变量.

注 在上面的定义中,如果 X 是广义实值函数,即 X 可以取∞值,则需要加上条件: X 是几乎处处有限的,即 $P\{\omega: |X(\omega)|=\infty\}=0$. 否则,会出现按上面定义的分布函数是假分布的情况.

定义 1.6 两个随机变量 X 与 Y,如果满足 $P\{\omega\in\Omega: X(\omega)\neq Y(\omega)\}=0$, 则称它们是**等价的**.

对于两个等价的随机变量,我们视为同一.

定理 1.1 下列命题等价:

(1) X 是随机变量;

(2) $\{\omega: X(\omega)\geqslant a\}\in\mathscr{F}$, $\forall a\in\mathbb{R}$;

(3) $\{\omega: X(\omega)> a\}\in\mathscr{F}$, $\forall a\in\mathbb{R}$;

(4) $\{\omega: X(\omega)< a\}\in\mathscr{F}$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

为简单起见,习惯上将$\{\omega: X(\omega)\geqslant a\}$记为$\{X\geqslant a\}$,其他类似记号自明.

定理 1.2 (1) 若 X, Y 是随机变量,则$\{X<Y\}$, $\{X\leqslant Y\}$, $\{X=Y\}$及$\{X\neq Y\}$ 都属于 $\mathscr{F}$;

(2) 若 X, Y 是随机变量,则 $X\pm Y$ 与 XY 亦然;

(3) 若$\{X_n\}$是随机变量序列,则$\sup\limits_n X_n$, $\inf\limits_n X_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup X_n$ 和$\lim\limits_{n\to\infty}\inf X_n$ 都是随机变量.

映射 $\boldsymbol{X}: \Omega\to\mathbb{R}^d$, 表示为 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_d)$,若对所有的 k, $1\leqslant k\leqslant d$, X_k 都是随机变量,则称 $\boldsymbol{X}$ 为随机向量.

复值随机变量 Z 定义为两个实值随机变量 X 和 Y 的线性组合 $X+\mathrm{i}Y$.

给定随机变量 X, 可以生成 Ω 上的 σ 代数,即包含所有形如$\{X\leqslant a\}$, $a\in\mathbb{R}$ 的最小 σ 代数,记为 $\sigma(X)$. 类似的可定义由随机变量 $X_1,\cdots, X_n$ 生成的 σ 代数 $\sigma(X_1,\cdots,X_n)$.

在实际中,常用的随机变量有两种类型: 离散型随机变量和连续型随机变量.

离散型随机变量 X 的概率分布用分布列描述:

$$p_k=P\{X=x_k\}, \qquad k=1,2,\cdots,$$

其分布函数

$$F(x) = \sum_{x_k \leqslant x} p_k.$$

连续型随机变量 X 的概率分布用概率密度 $f(x)$ 描述，其分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

对于随机向量 $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_d)$，它的($d$ 维)分布函数(或联合分布函数)定义为

$$F(x_1,\cdots,x_d) = P\{X_1 \leqslant x_1,\cdots, X_d \leqslant x_d\},$$

这里 $d\geqslant 1$，$x_k\in\mathbb{R}$，$1\leqslant k\leqslant d$.

定理 1.3 若 $F(x_1,\cdots,x_d)$ 是联合分布函数，则

(1) $F(x_1,\cdots,x_d)$ 对每个变量都是单调的；

(2) $F(x_1,\cdots,x_d)$ 对每个变量都是右连续的；

(3) 对 $i=1,2,\cdots,d$，

$$\lim_{x_i\to-\infty} F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_d) = 0,$$

$$\lim_{x_1,\cdots,x_d\to\infty} F(x_1,\cdots,x_d) = 1.$$

如果 $f(x_1,\cdots,x_d)=\dfrac{\partial^d F}{\partial x_1\cdots\partial x_d}$ 对所有的 $(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ 存在，则称函数 $f(x_1,\cdots,x_d)$ 为 $F(x_1,\cdots,x_d)$ 或 $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_d)$ 的**联合密度函数**，并且

$$F(x_1,\cdots,x_d) = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_d} f(t_1,\cdots,t_d)\mathrm{d}t_d\cdots\mathrm{d}t_1.$$

设 $F(x_1,\cdots,x_d)$ 为 $X_1,\cdots,X_d$ 的联合分布函数，$1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_n\leqslant d$，则 $X_1,\cdots,X_d$ 的**边际分布** $F_{k_1,\cdots,k_n}(x_{k_1},\cdots,x_{k_n})$ 定义为

$$\begin{aligned}&F_{k_1,\cdots,k_n}(x_{k_1},\cdots,x_{k_n})\\ &= F(\infty,\cdots,\infty,x_{k_1},\infty,\cdots,\infty,x_{k_2},\infty,\cdots,\infty,x_{k_n},\infty,\cdots,\infty).\end{aligned}$$

下面是一些常见的分布.

离散均匀分布 如果其分布列为

$$p_k = \frac{1}{n},\qquad k=1,2,\cdots,n,$$

则称之为离散均匀分布.

二项分布 如果其分布列为：对固定的 n 和 $0<p<1$，

$$p_k = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\qquad k\geqslant 0,$$