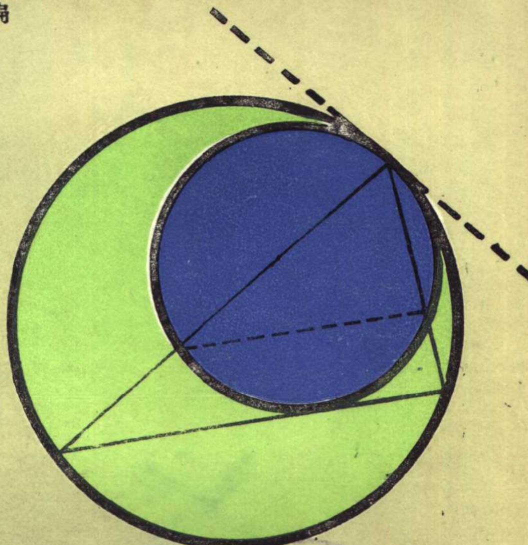
郁　祖　权
胡　国　平　编
罗　来　汤



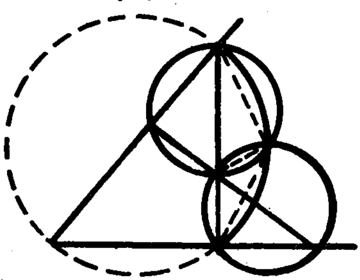
# 新编
# 平面几何证题法

xinbianpingmianjihezhengtifa

安徽教育出版社

# 新编平面几何证题法

郁祖权
胡国平　编
罗来汤



安徽教育出版社

责任编辑： 蒋美荣
封面设计： 应梦莺

新编平面几何证题法
郁祖权 胡国平 罗来汤

安徽教育出版社出版
（合肥市跃进路1号）
安徽省新华书店发行 六安新华印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张 12 字数 260,000
印数：1——31,000
1983年8月第1版 1983年8月第1次印刷

统一书号：13276·4 定价：0.88元

# 前　言

为了帮助初、高中学生和知识青年学习平面几何，掌握证题规律，我们编写了《新编平面几何证题法》一书。

平面几何的教材正处于改革之中，证题方法亦不断发展变革，除传统的综合法外，代数法、三角法、坐标法大量地用于几何证题。它们所依据的基础知识遍布于初、高中各个学年，而且除综合法外，其它方法课本上讲得很少，学生不易掌握其中的规律。因此，本书就上述各种方法，配合教材，分章阐述，通过一些典型例题的分析，开拓思路，总结规律，以发展学生的逻辑推理能力和综合运用能力。习题分$A$、$B$、$C$题，$A$题为基本题，作为初中学生的基本练习。$B$题为中等题，可供高中学生毕业复习之用，$C$题难度稍大，可作为数学爱好者的思考训练题。为便于读者自学，$B$题附有提示，$C$题附有解答。本书的内容，结合中学数学教学实际，不超出教学大纲范围，亦可供老师们教学参考。

本书由我们三人集体讨论，分头编写，胡国平写第一章和第二章第一——九节，罗来汤写第二章第十——十三节，郁祖权写第三、四、五章。由于我们水平不高，缺乏经验，错误之处在所难免，殷切希望读者批评指教。

编　者

# 目　　录


前　　言

第一章　证题方法概述……………………………………（1）

第一节　命题和它的四种形式…………………………（1）

第二节　几何证明的几种方法…………………………（7）

第二章　几何综合法……………………………………（20）

第一节　证题步骤……………………………………（20）

第二节　直线的垂直…………………………………（21）

第三节　直线的平行…………………………………（32）

第四节　线段的相等…………………………………（44）

第五节　角的相等……………………………………（61）

第六节　线段与角的不等……………………………（76）

第七节　点共圆………………………………………（90）

第八节　点共线………………………………………（100）

第九节　线共点………………………………………（112）

第十节　线段和角的和差倍分………………………（130）

第十一节　比例线段…………………………………（144）

第十二节　面积问题…………………………………（158）

第十三节　定值问题…………………………………（175）

第三章　三角法…………………………………………（188）

第一节　应用三角函数定义证几何题………………（188）

第二节　应用正弦定理证几何题……………………（207）

第三节　应用余弦定理证几何题……………………（228）

第四节　利用三角形面积公式证几何题 …………………（246）
第四章　坐标法………………………………………（266）
第一节　关于线段度量的证题……………………………（266）
第二节　有关角的证题 …………………………………（279）
第三节　有关圆的证题 …………………………………（288）
第四节　有关面积的证题 ………………………………（302）
第五节　三线共点与三点共线问题 ……………………（317）
第五章　代数法………………………………………（331）
第一节　代数法证几何题 ………………………………（331）
第二节　利用复数证几何题 ……………………………（357）

# 第一章　证题方法概述

几何证明就是用一些真实性已经确定的几何命题（例如公理、定理、定义）来论证新的几何命题的思维过程。几何证明的方法多种多样。本章主要对命题及几何证明的几种方法作一些大概的介绍。

## 第一节　命题和它的四种形式

**一、命题。**在日常生活中，在各学科的学习和研究中，我们对所研究的问题经常进行思维，思维的结果就会对所研究的问题有所肯定或否定。对事物有所肯定或否定的思维形式叫判断。任何一个判断，用语言或文字表达出来，就叫做命题。

例如：(1)对顶角一定相等。

(2)两个数不是偶数，它们的和也不是偶数。

(3)如果$ac=bc$，那么$a=b$。

(4)两个三角形的面积不相等，这两个三角形一定不全等。

一个命题可分为两部分，一部分叫“条件”，一部分叫“结论”。上例中(1)“对顶角”是条件，“相等”是结论。(4)中的“两个三角形的面积不相等”是条件，“这两个三角

形一定不全等”是结论。如果用$A$表示命题的条件，用$B$表示命题的结论，那么任何命题都可记为：

若$A$则$B$。

命题可能是正确的，如上例中的(1)、(4)。正确的命题我们称之为“真命题”。命题也可能是错误的，如上例中的(2)、(3)。错误的命题称之为“假命题”。

不是表达肯定或否定的判断的语言，就不能叫做命题。

**二、命题的四种形式**。命题如果把条件、结论进行调换，或把肯定改成否定(或否定改为肯定)都可构成新命题。这样，命题就有四种形式：

| | |
|---|---|
| 原命题： | 若$A$则$B$ |
| 逆命题： | 若$B$则$A$ |
| 否命题： | 若非$A$则非$B$ |
| 逆否命题： | 若非$B$则非$A$ |

**例1**

| | 条　件 | 结　论 | 真假性 |
|---|---|---|---|
| 原命题： | 对顶角 | 相等 | 真 |
| 逆命题： | 两角相等 | 它们一定是对顶角 | 假 |
| 否命题： | 不是对顶角的两角 | 一定不相等 | 假 |
| 逆否命题： | 两角不相等 | 它们一定不是对顶角 | 真 |

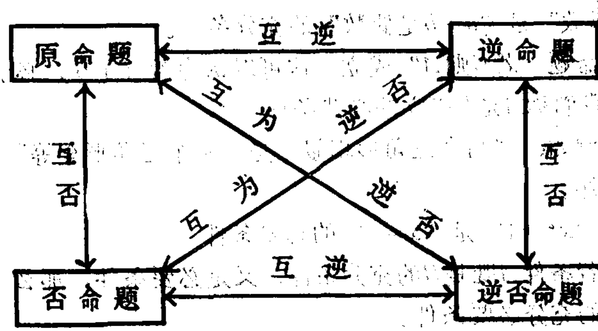
**例2**

| | 条　件 | 结　论 | 真假性 |
|---|---|---|---|
| 原命题： | 两三角形面积相等 | 它们一定全等 | 假 |
| 逆命题： | 两三角形全等 | 它们的面积相等 | 真 |
| 否命题： | 两三角形的面积不等 | 它们一定不全等 | 真 |
| 逆否命题： | 两三角形不全等 | 它们的面积不相等 | 假 |

例3

| | 条　件 | 结　论 | 真假性 |
|---|---|---|---|
| 原命题： | 三角形中两角相等 | 三角形为等腰三角形 | 真 |
| 逆命题： | 等腰三角形 | 两底角相等 | 真 |
| 否命题： | 三角形中没有两个角相等 | 不是等腰三角形 | 真 |
| 逆否命题： | 不是等腰三角形 | 没有相等的两个角 | 真 |

**三、四种形式命题的关系。**四种形式命题的关系可用下表来表示。




从例(1)——例(3)中，我们可以得出：原命题为真，逆否命题也必为真。原命题为假，逆否命题也必为假。所以原命题与逆否命题同真假。因此可以认为这两个命题是彼此等价的。

逆命题与否命题是互为逆否关系，因此它们也是彼此等价的。这样，四种形式的命题分为两组彼此等价的命题，所以只需分别讨论两组命题中的各一个，它们的真假性一经确定，由等价性，另两个命题的真假性也就随之确定了。通常总是讨论原命题和逆命题。

应该注意的是原命题与逆命题，在真假性上没有必然的联系，因此，在几何证明中，千万不能任意使用定理的逆命题。

**四、充分必要条件**。命题"若$A$则$B$"为真命题的话，亦即条件$A$已经足够保证结论$B$的成立，我们称$A$为$B$成立的充分条件。

例如："对顶角必相等"是真命题，那么"两角为对顶角"是"两角相等"的充分条件。

"$a$、$b$为偶数，那么$a+b$也是偶数"是真命题，那么"$a$、$b$为偶数"是"$a+b$是偶数"的充分条件。

命题"若$B$则$A$"成立，这可以认为若有了$B$，必然有$A$，我们称$A$是$B$成立的必要条件。

例如："两个三角形相似"是"两个三角形全等"的必要条件。

"$x^2=1$"是"$x=1$"的必要条件。

若条件$A$既是$B$的充分条件，又是必要条件，那么$A$叫做$B$的充分必要条件。

例如："两三角形三边对应相等"是"这两个三角形全等"的充分必要条件。

"两直线被第三条直线所截，同位角相等"是"两直线平行"的充分必要条件。

因此，要证明$A$是$B$成立的充分条件，只需证"若$A$则$B$"为真命题。要证明$A$是$B$成立的必要条件，只需证"若$B$则$A$"为真命题。要证明$A$是$B$成立的充分必要条件，则必须证"若$A$则$B$"为真命题（充分性），且"若$B$则$A$"也为真命题（必要性）。

充分必要条件，也常常用"当且仅当"、"必须而且只

须”来叙述。上述的例子可表达为：“当且仅当两三角形三边对应相等时，这两个三角形全等。”“两直线被第三条直线所截，当且仅当同位角相等时，这两直线平行。”或者表达为：“必须而且只须两三角形三边对应相等时，这两个三角形全等。”“两直线被第三条直线所截，必须而且只须同位角相等时，这两直线平行。”

## 习 题

1. 写出下列命题的条件与结论，并判断真假。

(1)中国的首都是北京。

(2)三角形中两角不等，它们所对的边也不等。

(3)一个三角形不是锐角三角形，它一定是直角三角形。

(4)如果$a>b$，那么$ac>bc$。

(5)到线段两端距离不等的点，不在这线段的垂直平分线上。

2. 以下列命题为原命题，写出其它三种形式的命题，判断真假，并验证命题的等价性。

(1)如果$a>b$，那么$b<a$。

(2)直线与圆相切，那么它们不相割。

(3)一角等于三角形两内角和，这角为三角形第三角的外角。

(4)两个三角形全等，一组对应边相等。

(5)如果$A\neq 60°$，那么$\sin A\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$。

3. 下列各题中(甲)为原命题，问(乙)是(甲)的什么形式

的命题？

(1)甲：如果$a+b=c$，那么$a=c-b$。

乙：如果$a+b\neq c$，那么$a\neq c-b$。

(2)甲：平面上两直线相交，它们一定不平行。

乙：平面上两直线平行，它们一定不相交。

(3)甲：$\triangle ABC$中有一角为直角，那么$\triangle ABC$不是锐角三角形。

乙：$\triangle ABC$不是锐角三角形，必有一个内角为直角。

(4)甲：圆内垂直于弦的直径，必平分此弦。

乙：圆内平分弦的直径，必垂直此弦。

(5)甲：点到圆心的距离小于半径，这个点不在圆上。

乙：点到圆心的距离不小于半径，这个点必在圆上。

4.判断$A$是$B$成立的什么条件。

(1)$A$：四边形对角线互相垂直，

$B$：四边形为菱形。

(2)$A$：$\triangle ABC$为直角三角形，$c$为斜边，

$B$：$a^2+b^2=c^2$。

(3)$A$：同圆内两弦平行，

$B$：夹弧相等。

(4)$A$：两三角形一组对应角相等，

$B$：两三角形相似。

(5)$A$：两三角形全等，

$B$：一组对应边上的高相等。

5.第4题中，问$B$是$A$成立的什么条件？试找出它们的规律来。

## 第二节　几何证明的几种方法

命题有真有假，而命题的真假性，单凭人们的直观感觉是有其局限的。所以几何命题其真假性的判断，除公理外，都必须运用公理、已证明的定理，按照逻辑推理的方法来进行。这种逻辑推理的过程叫做证明。

**一、证明方法的类别。**数学证明的方法很多，大体说来有下面几种：

1.证明“若$A$则$B$”为真，最自然的方法是提供一种从$A$到$B$的逻辑推理过程，这种从原命题入手的证明方法叫直接证法。

有些命题的证明，采取直接证法比较困难，我们就改证它的等价命题，从而间接证明原命题成立，这种证法叫间接证法。而间接证法又有反证法和同一法两种。

2.按思路的顺序来区分，一种从$A$出发逐步推演，得出$B$成立。这种从条件到结论的证明方法叫综合法。也可以从$B$出发，逐步追溯结论成立的充分条件，从而达到条件$A$，这种方法叫分析法。

3.从特殊到一般的论证方法叫归纳法，从一般到特殊的论证方法叫演绎法。

4.平面几何的证明中，往往利用代数、三角、解析几何等知识，将几何元素的定性描述转换成定量描述，通过运算证明命题的成立。这种方法通称为“解析法”，相对于解析法而言，我们的定性证明方法即泛称为“几何综合法”。

**二、反证法。**

某些命题，如果用直接证法不易达到目的时，可以运用反证法。

反证法的一般过程如下：

求证“若$A$则$B$”

(1)否定$B \Longrightarrow P \Longrightarrow Q \Longrightarrow R \Longrightarrow C$

(2)而$C$不合理，

$$\text{即}C\left\{\begin{array}{l}\text{或与公理矛盾}\\ \text{或与定理矛盾}\\ \text{或与条件}A\text{矛盾}\\ \text{或与临时假定(否定}B\text{)矛盾}\\ \text{或自相矛盾}\end{array}\right.$$

(3)因此$B$不容否定，那么$B$成立。

**例1** 证明圆内非直径的二弦必不能互相平分。

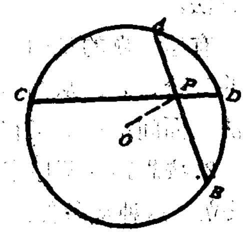


图 1—1

已知：⊙$O$的二弦$AB$、$CD$。它们都不过圆心。

求证：$AB$、$CD$不能互相平分。

**证明** 假定$AB$、$CD$互相平分于$P$点，

∵ $AB$、$CD$不过圆心，

∴ $P$不是圆心。

连接$OP$，那么$OP \perp AB$，$OP \perp CD$，

这就是说，过$OP$上一点$P$可作两直线$AB$、$CD$都垂直$OP$。与定理：过直线上一点只能作一条直线与已知直线垂直产生了矛盾。

∴ $AB$、$CD$必不能互相平分。

**例2** 平面上平行于同一直线的两直线一定平行。

已知：$l_1 \parallel l_3$，$l_2 \parallel l_3$，

求证：$l_1 \parallel l_2$。

**证明** 假设$l_1$与$l_2$不平行，那么$l_1$与$l_2$相交于$A$。

这就是说过直线$l_3$外一点$A$可作两条直线$l_1$、$l_2$都平行于$l_3$，与平行公理：过直线外一点只能作一条直线与已知直线平行产生矛盾。

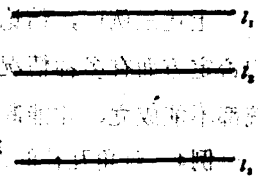



图 1—2

$\therefore\ l_1 \parallel l_2$。

**例3** 如图，在四边形$ABCD$中，$E$、$F$是对边$AD$、$BC$的中点，且$EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$。求证$AB \parallel CD$。

**证明** 假设$AB$不平行于$CD$，

连结$AC$，取$AC$中点$G$，

连结$E$、$G$、$F$、$G$，

$EG$是$\triangle ACD$的中位线，

$\therefore\ EG \parallel CD$。

同理$FG \parallel AB$。

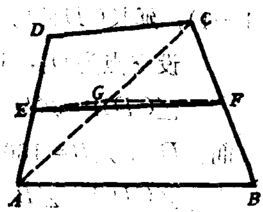



图 1—3

$\because\ AB$不平行于$CD$，

$\therefore\ EG$与$FG$不是一条直线。

那么 $EF<EG+FG$ (1)

又由三角形中位线定理，

$EG=\frac{1}{2}CD$，$FG=\frac{1}{2}AB$

代入(1)得 $EF<\frac{1}{2}(AB+CD)$，

与已知条件 $EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$矛盾，

$\therefore \quad AB \parallel CD$。

上述三例中，结论的否定方面只有一种情况。如果结论的否定方面有多种情况，那么我们就必须证明这多种情况统统都不能成立，才能断定命题的结论成立。

**例4** 对角互补的四边形内接于圆。

已知：四边形$ABCD$中，$\angle B+\angle D=180°$。

求证：$ABCD$为圆的内接四边形。

**证明** 假定$A$、$B$、$C$、$D$四点不共圆，那么经过$A$、$B$、$C$三点作$\odot O$。

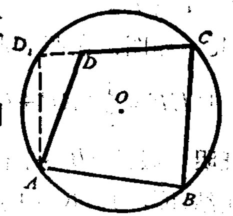



图 1—4

(1) 若$D$在$\odot O$内部（如图1—4），延长$CD$必与$\odot O$相交，

设交点为$D_1$，连$AD_1$，

$\angle CDA>\angle D_1$，

而$\angle D_1+\angle B=180°$，

$\therefore \quad \angle CDA+\angle B>180°$。

与已知$\angle CDA+\angle B=180°$矛盾，

$\therefore \quad D$不可能在$\odot O$内部。

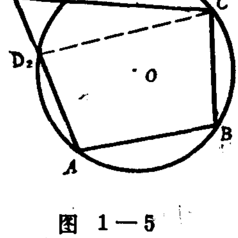



图 1—5

(2) 若$D$在$\odot O$外部，且$AD$与$\odot O$交于$D_2$（如图1—5）。

连$CD_2$，

那末 $\angle CD_2A>\angle D$，

而$\angle CD_2A+\angle B=180°$

$\therefore \quad \angle D+\angle B<180°$，

与已知$\angle D+\angle B=180°$矛盾。

(3) 若$D$在$\odot O$外部，且$AD$与$\odot O$相切于$A$(如图1—6)，连$AC$，那末

$\angle CAD = \angle B$，

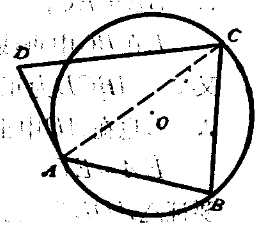


图 1—6

在$\triangle ADC$内，

$\angle D + \angle CAD < 180°$，

$\therefore$ $\angle D + \angle B < 180°$，

与$\angle D + \angle B = 180°$矛盾。

(4) 若$D$在$\odot O$外部，且$DA$延长线与$\odot O$交于$D_3$点(如图1—7)，

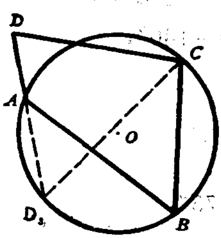


图 1—7

连$CD_3$，$\angle D_3 = \angle B$，

在$\triangle CDD_3$中

$\angle D + \angle D_3 < 180°$，

即$\angle D + \angle B < 180°$，

与$\angle D + \angle B = 180°$矛盾。

综合(2)、(3)、(4)，$D$不可能在圆外，

$\therefore$ $A$、$B$、$C$、$D$共圆。

四边形$ABCD$为圆的内接四边形。

从此题的证明中可见，否定$A$、$B$、$C$、$D$共圆，会出现$D$在$\odot O$内和在$\odot O$外两种情况，而$D$在$\odot O$外时，$AD$与圆的位置又有三种情况。我们在证明时，必须将这四种情况全都进行证明才算完整。

**例5** 已知：$ABCD$为正方形，$\angle 1 = \angle 2 = 15°$。

**求证：** $\triangle ADE$为正三角形

**证明** $\because$ $\angle 1 = \angle 2$，