★ 工程数学丛书

线性代数（第二版）

● 华中科技大学数学系

高等教育出版社

工程数学丛书

线性代数

第二版

华中科技大学数学系

刘先忠　　杨　明

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／华中科技大学数学系编．—2 版．—北京：高等教育出版社，2003.6

ISBN 7-04-011963-3

Ⅰ.线…　Ⅱ.华…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 037801 号

责任编辑　徐　可　　**封面设计**　王凌波
版式设计　杨　明　　**责任印制**　韩　刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	880×1230　1/32	**版　　次**	1999 年 8 月第 1 版
印　　张	7.75		2003 年 6 月第 2 版
字　　数	230 000	**印　　次**	2003 年 6 月第 1 次印刷
		定　　价	15.00 元

序

在高等学校理工科专业的数学教育体系中,"工程数学"一直是属于具有重要地位的课程系列. 当前,革新之风正吹遍高等教育界;课程重组、内容改造与学时调整的呼声日益高涨. 在此形势下,工程数学课程经受了严峻的考验,它作为学习现代科学技术所不可缺少的重要基础课,其地位丝毫没有动摇.

然而,这绝不意味着现存的"工程数学"课程体系已经完美无缺;更不意味着数学教育界除了墨守成规之外别无所为.恰好相反,面对现代科学技术飞速发展的形势,面对教育界对数学训练质量的愈来愈高的期待,数学工作者革新"工程数学"课程的任务更为紧迫!正是意识到时代的需要与自己的职责,我们全力推出这套"工程数学"教材呈献给读者.

华中科技大学数学系几十年来一直在组织力量探索"工程数学"课程的新的内容体系与教学方法,先后编写了百余万字的教材与讲义,在多年使用过程中不断提炼,逐步趋于完善. 应该说,本套教材正是这一长期探索过程的产物,它凝结了华中科技大学数学系几代教师的心血. 当然,具体执笔的教师对教材的最终成型作出了决定性的贡献.

本套教材先分《线性代数》、《概率论与数理统计》、《计算方法》、《复变函数与积分变换》和《数学物理方程与特殊函数》五册出版.编者在取材上充分考虑到新世纪对科技人员数学知识的要求;在内容处理上力求联系理工科专业的实际需要,注重培养学生的基本运算能力、分析问题与解决问题的能力;在表述上力求清晰易读,便于教学与自学. 本套教材配备了较丰富的例题与习题,它们大多源于教师在自身教学中的积累,既具有明显的启发性,又具有典型的应用意义. 书末所附的习题答案与提示供教师与学生在教学中参考. 本套教材可供高等学校理工科各专业(非数学)使用.

本套教材的编写自始至终得到华中科技大学教务处及数学系的支

持，也得到华中科技大学数学系全体教师的协助与鼓励.高等教育出版社的宝贵支持，使本套教材得以顺利出版. 对此，我们一并表示衷心的感谢.

刘次华

2003 年 5 月于武汉

第二版前言

线性代数是高等院校理工科本、专科生的必修课程，是学习现代科学技术的重要理论基础，它在自然科学和工程技术各领域都有着重要的应用. 本书是在《线性代数》(高等教育出版社 1999 年出版)的基础上，以教育部最新颁布的《高等学校工科各专业线性代数课程基本要求》为依据，广泛吸取校内外教师的意见后修订而成的. 本书可作为各工程专业本科生的线性代数教材，学习前六章建议教学学时数为 40 学时左右. 本书还可作为高等院校成人教育、继续教育等各类教育的教学用书.

上半世纪计算机技术的迅猛发展，拓宽了线性代数在各领域内的应用. MATLAB、MAPLE 等现代数学软件的应用普及使线性代数的各类计算方便快捷. 与之相适应的教学发展使我们在有限的学时内，将重点放在基本理论工具的建立与应用上. 因此，新版在内容的处理上，既注意到教材体系的完整性与合理性，又考虑到教学的效率和学生学习线性代数的实际情况，作了如下取舍：

· 对于行列式，采取归纳定义，只强调基本计算以利于用计算机处理行列式，提高教学效率.

· 重点建立矩阵、向量空间两大理论工具，以突出由线性代数课程给出的最重要的两类数学工具.

· 对于解线性方程组这一线性代数的主要问题，作为矩阵和向量理论的应用.

· 在线性空间的概念中，重点放在向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的相应概念及背景建立上，为学习后续课程奠定基础. 对于较为抽象的线性空间和线性变换的理论，根据需要作为选学内容.

本书分行列式、矩阵、n 维向量空间、线性方程组、特征值与特征向

量、二次型和线性空间与线性变换共七章.第一、二、六、七章由刘先忠编写;第三、四、五章由杨明编写.

在本书编写过程中,得到了华中科技大学数学系及线性代数课程组的老师们的极大关心与支持,在此一并表示衷心的感谢.

限于编者水平,不妥之处在所难免,敬请读者批评指正.

编 者

2003 年 4 月于华中科技大学

第一版前言

线性代数是理工科本专科生的一门重要基础课. 它既是学习计算数学、微分方程、离散数学等后续课程的必备基础，也是在自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学工具. 在计算机日益普及的今天，线性代数在理论和应用上的重要性愈显突出，这使得高等院校计算机、电信、自控等专业对线性代数内容从深度和广度上都相应提出了更高的要求. 本教材根据教育部高等学校线性代数教学基本要求，结合编者长期从事线性代数和矩阵课程的教学与研究，并在近几年我校实行两个层次线性代数教学实践基础上，为适应不同层次线性代数教学要求而编写的.

本书第一章至第五章不含“*”标志部分的内容及 A 组习题适用于理工科本科生 36 学时左右的教学. 其内容符合教育部线性代数教学基本要求，属第一层次；全书内容和 A、B 组习题，适用于理工科本科生 50 学时左右的教学，属于对线性代数有更高要求的第二层次.

根据教学改革的需要和本科各专业对线性代数内容的不同要求，我们在内容、结构等方面做了精心选择和编排. 第一章至第三章介绍行列式、矩阵运算和求解线性方程组，这是线性代数的基本内容，学生应理解、掌握其基本概念、方法和理论. 对第四章介绍的矩阵相似和第五章介绍的二次型，注意把它们作为前面内容的应用来处理，对 Jordan 标准形，我们避开它的理论问题，主要从实用的角度介绍化矩阵为 Jordan标准形的方法. 第六章线性空间与线性变换和打“*”标志部分是拓宽和加深的内容. 将它们置于相应的章、节之末，以保持基本问题的连贯性，方便教学按不同的要求取舍.

本教材以线性方程组为主线，以行列式和矩阵为工具阐明线性代数的基本概念、理论和方法，强调矩阵基本方法的应用，适当加强了矩

阵分块运算，特别是简单实用的矩阵列分块在证明问题中的应用，显示了矩阵方法的简洁与精巧性. 考虑到线性代数课程概念多、结论多、内容抽象、逻辑性强的特点，尽量以提出问题或简单实例引入概念，力求处理上深入浅出、通俗简单、难点分散. 对重点定理和方法，提供较多的典型例题加以剖析，引导、帮助学生较好地理解、掌握和运用. 本书配有形式多样的习题，并附有答案，便于练习检验.

在本书编写过程中，得到华中理工大学数学系及教研室领导和老师们的极大关心与支持. 余鄂西教授详细审阅全稿，提出了许多宝贵的建议，在此一并表示衷心的感谢.

由于水平所限，疏漏错误难免，敬请读者批评指正.

编　者

1999 年 4 月于武汉

目　录

第一章　行列式

行列式的理论起源于解线性方程组，它在数学的许多分支以及其他自然科学方面有着广泛的应用．本章先介绍二阶行列式，然后归纳给出 n 阶行列式的定义，讨论其性质和计算方法，最后作为行列式的应用，介绍 Cramer 法则．

§1.1　行列式的定义

1.1.1　二阶行列式的定义

在许多实际问题中，人们常常会碰到求解线性方程组的问题．我们在中学里已经学过如何解二元一次方程组与三元一次方程组．

设二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x_j(j = 1,2)$ 表示未知量，$a_{ij}(i = 1,2;j = 1,2)$ 表示未知量的系数，$b_i(i = 1,2)$ 表示常数项．用代入消元法从(1.1)式中消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

同样地，从(1.1)式中消去 x_1，得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

引入记号：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.2}$$

称 D 为**二阶行列式**. 于是二元一次方程组(1.1) 的解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

若用 D_j 表示把 D 中第 j 列换成(1.1) 式右边的常数列所得到的行列式,则当 $D \neq 0$ 时,二元一次方程组(1.1) 的惟一解可简单表示为

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1,2). \tag{1.3}$$

例 1 用二阶行列式解二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 = 11. \end{cases}$$

解 计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7, D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 21, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 7,$$

由 $D = 7 \neq 0$ 知方程组有惟一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 3, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 1.$$

1.1.2 n 阶行列式的定义

正因为用行列式来表示二元一次方程组的解有简单明了的优点,所以我们希望也能用它把一般的 n 元一次方程组(亦称为 n 元**线性方程组**) 的解表示出来.

为了避免繁琐的分析,我们直接归纳地给出 n 阶行列式的定义. 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.4}$$

它由 n 行 n 列(共 n^2 个元素) 组成,称之为 **n 阶行列式**. 用 M_{ij} 表示 n 阶行列式 D 中划去第 i 行第 j 列元素后剩下的 $n-1$ 行 $n-1$ 列元素组

成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的**余子式**，称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

中元素 a_{32} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-2.$$

下面我们可以归纳地定义 n 阶行列式的值.

定义 1.1　D 由(1.4)给出，定义

$$D=\begin{cases} a_{11}, & \text{当 } n=1 \text{ 时}, \\ a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{n1}A_{n1}, & \text{当 } n>1 \text{ 时}. \end{cases} \tag{1.5}$$

显然，对于任意正整数 n，(1.5) 式给出了一个计算 n 阶行列式的方法：将 n 阶行列式化为 $n-1$ 阶，再化为 $n-2$ 阶，…，最后便可求出 D 的值. 因为(1.5)式中，使用了行列式的第 1 列元素 $a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}$，故 (1.5) 式称为 D **依第一列的展开式**. 当 $n=2$ 时，上述 n 阶行列式的定义与 1.1.1 中介绍的二阶行列式的定义是一致的.

当 $n=3$ 时，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

例 2　求下列行列式的值：

$$(1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix};\quad (2)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解

$$(1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-1) + (-2-3) + 4(-1-6)$$

$$= 6 - 5 - 28 = -27.$$

$$(2)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3(5-4) = 3.$$

在(2)的计算中，由于 a_{21}, a_{31} 都是零，因此行列式依第一列展开时只剩下了一项.

例 3　求下列行列式的值：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这个行列式称为**上三角形行列式**，它的特点是当 $i > j$ 时 $a_{ij} = 0$，或者说这个行列式主对角线(即 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所占的一条对角线）以下的元素都等于零.

解　这是一个 n 阶行列式，但它的第一列除 a_{11} 外都等于零，因此

利用(1.5)式展开时只有一项不为零,于是

$$D = a_{11}A_{11} = a_{11}M_{11} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

容易看出 a_{11} 的余子式 M_{11} 仍是一个上三角形行列式,只是阶数比 D 小 1. 因此又可用同样的方法求得

$$M_{11} = a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

这样一直做下去,不难求得

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即上三角形行列式的值正好等于其主对角线上元素的乘积. 这个结论今后可直接用于行列式的计算.

特别地,有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

像这样的主对角线外的元素皆为零,即 $a_{ij} = 0(i \neq j)$ 的行列式称为**对角行列式**.

在 n 阶行列式的定义 1.1 中,(1.5)式是依第一列展开的,是否可以依其他列展开呢?我们有

定理 1.1　设 D 是如(1.4)所示的 n 阶行列式,则对任意的 $j(1 \leqslant j \leqslant n)$,都有

$$\begin{aligned} A &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij}, \end{aligned}$$

其中 M_{ij}, A_{ij} 分别表示 D 中元素 a_{ij} 的余子式与代数余子式. 这是 D 依

任意一列的展开式.

其证明相当繁琐,这里略去不证.

利用定理 1.1,我们可以依最后一列展开,计算下面的**下三角形行列式**(主对角线上方全为零的行列式).

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{nn}A_{nn}=a_{nn}M_{nn}$$

$$=\cdots=a_{nn}a_{n-1\,n-1}\cdots a_{11}.$$

按照 n 阶行列式的定义,一个 n 阶行列式可表示为 n 个 $n-1$ 阶行列式的代数和,一个 $n-1$ 阶行列式又可表示为 $n-1$ 个 $n-2$ 阶行列式的代数和,…,依此类推知,当把行列式完全展开为元素形式时,一个 n 阶行列式可表为 $n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$ 项的代数和,其中每项是 D 中不同行不同列 n 个元素的乘积,一般可表示为

$$D_n=\sum(\pm\, a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}).$$

§1.2　行列式的性质与计算

直接根据定义来计算 n 阶行列式往往是比较麻烦的. 我们将导出行列式的一些基本性质,利用这些性质. 可以使行列式的计算大大简化.

1.2.1　行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式,称为 D 的**转置行列式**,记为 D^{T}. 即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则