工程力学学习指导

■ 上 册 ■

主编 梅凤翔 副主编 周际平 水小平

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

工程力学学习指导

（上　册）

主　编　梅凤翔
副主编　周际平　水小平

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

由梅凤翔教授等主编的《工程力学》教材属于普通高等教育"十五"国家级规划教材及北京市精品教材，本书是与该教材配套的学习指导书。

全书按原教材的教学体系分上、下两册，本书为上册，共十三章。每章包含基本要求和重点、主要内容概念及学习中应注意的问题、典型例题解析、自测题及其解答四部分内容。

本书文字叙述简明，选材精细恰当，将准确地理解基本概念、基本理论与有效地提高分析问题和解决问题的能力有机地结合起来，以期达到融会贯通所学知识、提高综合分析能力和激发创新思维的目的。全书是学生学习工程力学或理论力学、材料力学、流体力学基础不可多得的理想参考书，也是考生报考硕士学位研究生和教师备课时值得选用的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

工程力学学习指导. 上册/梅凤翔主编. —北京：北京理工大学出版社，2003.8

ISBN 7-5640-0151-8

Ⅰ. 工…　Ⅱ. 梅…　Ⅲ. 工程力学－高等学校－自学参考资料　Ⅳ. TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 037915 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010) 68914775 (办公室)　68912824 (发行部)
网　　址 / http:// www.bitpress.com.cn
电子邮箱 / chiefedit@bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京圣瑞伦印刷厂
开　　本 / 850 毫米×1168 毫米　1/32
印　　张 / 13.875
字　　数 / 352 千字
版　　次 / 2003 年 8 月第 1 版　2003 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 / 1～6000 册
定　　价 / 18.00 元

责任校对 / 陈玉梅
责任印制 / 母长新

前 言

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材及北京市精品教材《工程力学》(上、下册)(由梅凤翔教授等主编，以下称主教材，即参考文献 [1]) 的学习指导用书。

工程力学是许多工科专业的一门重要技术基础课，它的知识既可直接应用于工程实际，又为学习后续相关课程奠定了必要的基础。通过该课程的学习，读者不仅可以掌握力学的最基本概念和定理或原理，还可以学会处理力学问题的最基本方法和技能。同时，它又是一门将高等数学知识较早地应用于工程实际的课程，在对学生进行工程意识与工程能力、科学素质及创新能力的培养中起到了举足轻重的作用。当前，我国高等教育正进行着一场以教学改革为核心的极其深刻的变革，主要体现在教学体系的更新、教学内容的优化、教学起点及教学手段的提高、教学学时的减少等，为了帮助读者更全面、透彻地理解并掌握《工程力学》课程的基本概念、基本理论和基本方法，提高读者分析问题和解决问题的能力，我们组织了主教材的作者，在不断丰富和提炼的基础上，编写了这本学习指导书。这既是作者对多年积累的丰富教学经验的总结，又是对主教材教学内容的准确理解和正确、灵活运用及提高解题技巧的有益补充。

本书按主教材的体系共分二十六章，涵盖了原有工科理论力学、材料力学和流体力学基础等教学内容。每章包括以下四部分内容：**基本要求和重点**明确指出本章所包含的内容及应掌握的程度和重点，供读者参考；**主要内容概述及学习中应注意的问题**简明扼要地给出了本章的基本概念、基本原理、基本定理、基本公式和基本方法，针对读者容易出现理解错误的地方或较难理解的

内容作了深入、透彻的阐述，以帮助读者真正掌握所学知识的内涵；**典型例题解析**精选了各类典型例题，其中既包含一定的巩固基本概念、基本理论和基本方法为目的的基本概念题，又包含较多的难易程度适当的基本要求题及部分综合性较强、难度较大的题，并用较多篇幅予以示范性解答，以帮助读者领会本章的精髓，熟悉并掌握解题的基本思路、方法和技巧，题后的点评，有的对本题的解题关键予以说明，有的指出了读者在解题中容易混淆的概念或常犯的错误及错误的根源，有的对相关问题展开了进一步分析和讨论，以启迪读者的思维、开阔读者的视野，达到深刻理解课程内容和大大提高解题能力的目的；**自测题及其解答**主要让读者检测自己对基本概念、基本理论和计算方法的掌握程度，使读者既巩固了基础知识，又熟悉了解题方法和技巧，提高自己综合运用各方面知识的能力。典型例题和自测题中有三分之一左右选自主教材中的习题和北京理工大学的期末试题。为了更好地帮助考生报考北京理工大学相关专业的硕士研究生，附录Ⅰ和附录Ⅱ分别给出了北京理工大学2001～2003年硕士研究生入学考试理论力学和材料力学试题，并给出了详细解答，使考生明确我校这两门课程的考试重点及解题的基本方法和技巧，同时对报考其他院校或研究单位的硕士研究生也有一定的参考价值。总之，本书对《工程力学》的基本知识要点进行了系统的总结，力求将基本概念阐述得科学、准确，将基本理论阐述得系统、全面，将基本方法阐述得清楚、易懂，帮助读者在较短的时间内融会贯通所学知识，深入理解其物理意义，提高综合分析和处理力学问题的能力。同时，本书力求使读者的科学素质和创新能力在研读本书的过程中得到一定的锻炼和提高，更好地满足21世纪对人才培养的更高要求。

本书既可作为高等院校机械类、航空航天类、土建类、水利类、工程力学类等专业本科生学习工程力学或理论力学、材料力学、流体力学基础的指导用书，还可作为报考硕士研究生读者的

考前复习参考书，也可作为电大、函大、职大、现代远程教育和自学考试等相关专业的学生的学习指导书和考试复习参考书，并可作为教师教学的参考资料。

参加本书编写工作的有：梅凤翔、周际平、水小平、韩斌、刘海燕、秦晓桐、李海龙。具体分工如下：第一章至第四章，第八章由刘海燕编写；第五章至第七章，第十九章至第二十一章，第二十三章，附录Ⅰ由水小平编写；第九章至第十四章，附录Ⅱ由韩斌编写；第十五章至第十七章，第二十二章由周际平编写；第十八章由秦晓桐编写；第二十四章至第二十六章由李海龙编写。统稿由梅凤翔、周际平、水小平完成。

本书编写过程中得到了北京理工大学各级领导的关心、鼓励和大力支持，也得到了国内同行专家和校内同事们的热情倡议，他们对本书的具体编写提出了许多宝贵的建议，在此一并表示衷心的感谢。

限于编者水平，书中的缺点和疏误之处在所难免，恳请广大同仁与读者不吝赐教。

梅凤翔、周际平、水小平

2003 年 5 月

目　　录

第一章

点的运动学

基本要求和重点

一、基本要求

(1)掌握描述点的运动的矢量方法。建立矢量形式的点的运动方程,并求点的速度和加速度。

(2)能熟练地应用直角坐标法,研究点的运动规律,即建立点的运动方程,求其轨迹、速度和加速度。

(3)能熟练地应用弧坐标法建立点的运动方程,求其速度和加速度,并正确理解切向加速度和法向加速度的物理意义。

(4)了解用分析法中的其他方法,例如用柱坐标等方法研究点的运动规律。

(5)掌握描述点的运动规律的各种方法之间的相互关系。

二、重　　点

建立点的运动方程,研究某一瞬时有关点的速度和加速度是本章的两个重要内容。对非自由点,能熟练地根据约束条件选择恰当的方法(例如用直角坐标法或弧坐标法),由已知运动条件,写出其运动方程,并由运动方程求该点的轨迹、速度和加速度。

主要内容概述及学习中应注意的问题

点的运动学研究点相对于某一参考系的几何位置随时间的变化规律,包括点的运动方程(或运动轨迹)、速度和加速度。

一、约束、广义坐标与自由度

事先给定的限制物体运动的条件称为约束。确定质点系在参考空间中位置的一组独立的几何参数称为广义坐标。将确定系统位置的独立广义坐标的个数定义为系统的自由度(该定义只适应于完整约束系统)。

二、点的运动方程

描述任一瞬时物体在参考空间中位置的数学表达式称为运动方程。

点的运动方程确定了点在参考空间中任一瞬时的位置,并由此可进一步揭示点的运动轨迹、速度和加速度。常用的点的运动方程有下面几种形式:

1. 矢径形式的运动方程

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

此方程常用来进行理论推导。它的特点是概念清晰,是采用矢量法分析点的运动的基础。

2. 直角坐标形式的运动方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

这是最常用的运动方程,尤其对运动轨迹未知的点,经常用上述方程进行运动学求解。它是代数方程,虽然依赖于坐标系,但是运算容易,是采用直角坐标法对点的运动进行研究的基础。

3. 柱坐标形式的运动方程

$$\begin{cases}\rho=\rho(t)\\ \varphi=\varphi(t)\\ z=z(t)\end{cases}$$

在某些特殊情况下，更容易写出柱坐标形式的运动方程。该方程是采用柱坐标法对点的运动进行研究的基础。

4. 弧坐标形式的运动方程

$$s=s(t)$$

对运动轨迹已知的点，常用此方程。该方程是在自然轴系中研究点的运动规律所必需的。用弧坐标法研究点的运动，其运算过程比较简便，各运动参数的物理意义也很明确。

5. 极坐标方程

$$\begin{cases}\rho=\rho(t)\\ \varphi=\varphi(t)\end{cases}$$

当点在某平面上运动时，在任一瞬时，其位置也可用极坐标确定。这是柱坐标方程的特殊情况。

此外还有球坐标法等其他曲线坐标形式的运动方程。通过坐标形式的方程表示点的运动方程，并由此进一步描述点的运动规律的方法称为分析法。

6. 学习中应注意的问题

用分析法建立点的运动方程，首先要选择合适的坐标形式，然后将点置于任意位置处(不能放在特殊位置上)，最后根据问题的约束条件、运动条件、几何关系列写运动方程。对于轨迹未知的点，一般选用直角坐标法；对于轨迹已知的点，多选用弧坐标法，当然也可用直角坐标法。

三、点的轨迹

点在运动时，它相对于参考空间运动路线的几何形状称为轨迹。

当用矢量法描述点的运动时，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的矢径端图就是动点的轨迹；当用分析法描述点的运动时，运动方程是其运动轨迹的参数方程(弧坐标法中运动轨迹是已知的除外)。

求点的轨迹方程，经常通过直角坐标形式的运动方程，消去参数(通常为 t)后得到轨迹方程。

四、点的速度和加速度

1. 矢量法描述点的速度和加速度

已知点的矢径形式的运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，那么该点的速度、加速度分别可用 $\boldsymbol{r}$ 对时间的一、二阶导数表示

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

2. 分析法描述点的速度和加速度

已知点的坐标形式的运动方程，借助该方程，可分别求出该点的速度、加速度在坐标轴上的投影，并由此求出点的速度、加速度和其他物理量。

(1)直角坐标法中点的速度、加速度在坐标轴上的投影为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\ v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\ a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\ a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

那么，该点的速度 $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$ 的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

方向可用 $\boldsymbol{v}$ 与三个坐标轴的方向余弦表示，即

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})=v_x/v=\dot{x}/\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})=v_y/v=\dot{y}/\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}) = v_z/v = \dot{z}/\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

该点的加速度为 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$,其大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$$

方向也同样可以用方向余弦表示,即

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}) = a_x/a = \ddot{x}/\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}) = a_y/a = \ddot{y}/\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}) = a_z/a = \ddot{z}/\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}$$

(2)柱坐标法中点的速度、加速度在坐标轴上的投影

$$v_\rho = \dot{\rho},\ v_\varphi = \rho\dot{\varphi},\ v_z = \dot{z}$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2,\ a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi},\ a_z = \ddot{z}$$

那么,该点的速度为

$$\boldsymbol{v} = v_\rho\boldsymbol{e}_\rho + v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + v_z\boldsymbol{k} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{z}\boldsymbol{k}$$

加速度为

$$\boldsymbol{a} = a_\rho\boldsymbol{e}_\rho + a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + a_z\boldsymbol{k} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi + \ddot{z}\boldsymbol{k}$$

与直角坐标法类似,通过上述投影可分别求出速度、加速度的大小和方向。

(3)弧坐标法中点的速度、加速度在自然轴系的各坐标轴上的投影

$$v_t = \dot{s},\qquad v_n = 0,\qquad v_b = 0$$

$$a_t = \ddot{s},\qquad a_n = \dot{s}^2/\rho,\qquad a_b = 0$$

根据上述速度投影结果,一般常将 v_t 记作 v,于是该点速度

$$\boldsymbol{v} = v_t\boldsymbol{e}_t = v\boldsymbol{e}_t = \dot{s}\boldsymbol{e}_t$$

其大小为 $|\dot{s}|$,方向与该点所在轨迹的切向 $\boldsymbol{e}_t$ 相平行,当 $\dot{s}>0$ 时,$\boldsymbol{e}_t$ 的方向为 $\boldsymbol{v}$ 的方向,$\dot{s}<0$ 时,$\boldsymbol{e}_t$ 的负方向为 $\boldsymbol{v}$ 的方向。

该点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = a_t\boldsymbol{e}_t + a_n\boldsymbol{e}_n = \ddot{s}\,\boldsymbol{e}_t + \dot{s}^2/\rho\,\boldsymbol{e}_n$$

其大小为

$$a=\sqrt{\ddot{s}^2+\dot{s}^4/\rho^2}$$

方向为

$$\tan\theta=\frac{|a_{\mathrm{t}}|}{a_n}$$

其中 θ 是加速度 $\boldsymbol{a}$(也称全加速度,位于密切面内)与主法向 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 的夹角。

切向加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}=a_{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$,改变点的速度大小;法向加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}=a_{\mathrm{n}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$,改变点的速度方向。

自然轴系、柱坐标系是随动点一起运动的正交轴系,表征坐标轴方向的单位矢量的大小不变,但方向随时间改变。

(4)极坐标法中的速度、加速度投影分别为

$$v_\rho=\dot{\rho},\ v_\varphi=\rho\dot{\varphi}$$

$$a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2,\ a_\varphi=\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi}$$

因此,该点的速度

$$\boldsymbol{v}=v_\rho\boldsymbol{e}_\rho+v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi=\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

加速度为

$$\boldsymbol{a}=a_\rho\boldsymbol{e}_\rho+a_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_\rho+(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi$$

同理,通过投影可求出 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$ 的大小和方向。

3. 学习中应注意的问题

(1)用 v, a 表示速度、加速度的数值,它们是代数量。若所设速度、加速度的方向为真实方向,通过求解得到的 v, a 值一定大于0,表示它们是上述物理量的大小;如果所设方向与真实方向相反,求解结果将小于0。当点作直线运动时,要注意 v 与 v_x, a 与 a_x 的相互关系(参见例1.1.2和例1.2)。

(2)采用不同方法研究点的运动时相关量之间的关系,如 a_{t}, a_x 和 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$ 之间的关系(参见例1.1.2)。

(3)求点的速度、加速度以及曲率半径。由点的运动方程可求

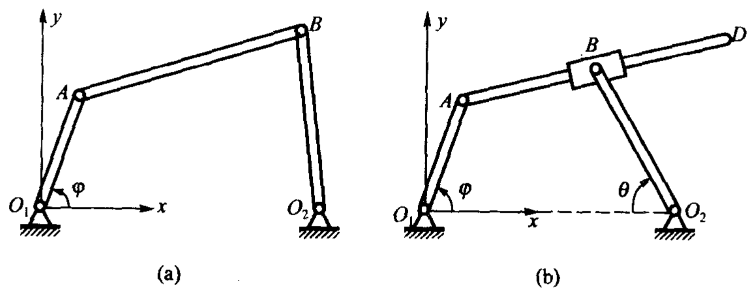
出速度、加速度。曲率半径可通过法向加速度公式 $a_n = v^2/\rho$ 求出，这时会涉及直角坐标法与弧坐标法所表示的运动量之间的关系问题(参见例 1.3)。

(4)已知点的加速度或速度求运动方程。这是数学中涉及积分运算的问题，需要由运动初始条件确定积分常数。这不是本章的重点内容。

典型例题解析

例 1.1　基本概念题

1.1.1　试写出图示平面机构的约束方程，并确定系统的自由度和广义坐标。



例 1.1.1 图

解　(a)只要确定点 A 和 B 的位置，就可确定机构的位置。

确定 A，B 位置需用直角坐标(x_A, y_A)，(x_B, y_B)，它们满足下面的约束方程

$$\begin{cases} x_A^2 + y_A^2 = (O_1A)^2 \\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (AB)^2 \\ (x_B - O_1O_2)^2 + y_B^2 = (O_2B)^2 \end{cases}$$

因此，图示系统的自由度是 1。可选上述直角坐标中的一个为系

统的广义坐标，也可选图示 φ 为系统的广义坐标。

其实，题中只需一个点 A 或 B 就可确定机构的位置。显然，由此所得约束方程的形式与个数与文中不同，但系统自由度不变，仍然等于 1。

(b)**解法一**

只要确定点 A 和套桶 B 的位置，就可确定机构的位置。

确定 A，B 位置需用直角坐标 $(x_A,\ y_A)$，$(x_B,\ y_B)$，它们满足下面的约束方程

$$\begin{cases} x_A^2 + y_A^2 = (O_1A)^2 \\ (x_B - O_1O_2)^2 + y_B^2 = (O_2B)^2 \end{cases}$$

因此，图示系统的自由度是 2。可选上述直角坐标中的 2 个为系统的广义坐标。

解法二

杆 O_1A 作定轴转动，可由角 φ 确定其位置；杆 O_2B 也作定轴转动，可用角 θ 确定其位置。由于约束关系，当杆 O_1A，O_2B 的位置确定后，杆 AD 的位置可确定。因此，系统自由度为 $k = 1 + 1 = 2$，取 φ，θ 为系统的广义坐标，这两个坐标之间不需要满足任何约束方程，彼此独立。

点评

判断由质点和刚体组成的系统的自由度，通常对系统中物体逐个地分析，先确定各物体在空间的位置所需的独立变量数，再求和得系统的自由度。或者通过公式 $k = 3n - s$（空间问题）或 $k = 2n - s$（平面问题）计算，其中 n 表示质点数或刚体系中有代表意义的点的总数，s 表示独立约束方程数。如(a)所用方法为第二种方法，(b)用了两种方法。

1.1.2 试指出下述各量代表什么物理意义：

(1) $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$，$\dfrac{ds}{dt}$，$\dfrac{dx}{dt}$；

(2) $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$，$\dfrac{dv}{dt}$，$\dfrac{dv_x}{dt}$。