配合最新教学大纲 与人教版教材同步

超强纠错

《超强纠错》丛书编委会 编

精学途径指南 重点难点分析

高三数学

典型例题讲解 错解误解辨析

北京出版社

超强纠错

高三数学

《超强纠错》丛书编委会 编

北京出版社

图书在版编目(CIP)数据

超强纠错:高三数学/超强纠错丛书编委会编著.－北京:北京出版社,1999

ISBN 7－200－02855－X

Ⅰ.超… Ⅱ.超… Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 30113 号

超强纠错 高三数学

CHAOQIANG JIUCUO GAOSAN SHUXUE

《超强纠错》丛书编委会 编

*

北 京 出 版 社 出 版

(北京北三环中路 6 号)

邮政编码:100011

北 京 出 版 社 总 发 行

新 华 书 店 经 销

北京朝阳北苑印刷厂印刷

*

850×1168 毫米 大 32 开本 6 印张 143 000 字

1999 年 8 月第 1 版 1999 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—10 000

ISBN 7－200－02855－X/G·1241

定价:8.00 元

《超强纠错》丛书编委会名单

主　编　胡家骏

副主编　宛炳生　沙宗琳

编委会　（按姓氏笔划为序）

田德蓓　朱永和　李大中　杜庆延

沙宗琳　陈朝志　张豫芝　罗守进

宛炳生　查　鸣　胡家骏　翟　翔

目 录

第一部分 代数

第二部分 立体几何

第三部分　平面解析几何

第一部分　代数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

(一)知识概述

● **精学指要**

1. 集合

(1)一组对象的全体形成一个集合,集合里各个对象叫做这个集合的元素,含有有限个元素的集合叫做有限集,含有无限个元素的集合叫做无限集.集合的表示法通常有列举法和描述法两种.几个最常见的数集一般用专门字母表示,自然数集记作 N;整数集记作 Z;有理数集记作 Q;实数集记作 R.

(2)元素与集合之间的关系常用符号$\in$或$\overline{\in}$($\notin$).

(3)集合中元素主要有两个特征,它们是:确定性;互异性.

2. 子集、交集、并集、补集

(1)子集、真子集、空集、全集、补集、交集、并集的概念.

①子集与真子集:对于两个集合 A 与 B,若集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,则称集合 A 是 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$);若 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

②空集是不含任何元素的集合,记作$\varnothing$.

③全集与补集:研究集合与集合的关系时,在某种情况下,这

些集合都是某一个给定集合的子集，这个给定的集合可以看作一个全集，记作 I. 若 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 A 在 I 中的补集，记作 $\bar{A}$.

④交集与并集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合叫做 A、B 的交集，记作 $A\cap B$；由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，叫做 A、B 的并集，记作 $A\cup B$.

(2)集合与集合之间的关系常用符号 $\subseteq$、$\supseteq$、$\subset$、$\supset$、$\not\subseteq$、$\not\supseteq$、$\not\subset$、$\not\supset$、$=$.

(3)集合的包含关系及交、并、补运算.

①交集和并集的运算：$A\cap A=A$，$A\cup A=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$；$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$.

②补集的运算：$A\cup\bar{A}=I$，$A\cap\bar{A}=\varnothing$；$\bar{\bar{A}}=A$；$\bar{I}=\varnothing$，$\bar{\varnothing}=I$；$\bar{A}\cap I=\bar{A}$，$\bar{A}\cup I=I$；$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$，$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$.

③包含关系：$A\subseteq A$，$\varnothing\subseteq A$；$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$，$A\subset B$ 且 $B\subset A\Rightarrow A\subset C$；$(A\cap B)\subseteq A\subseteq(A\cup B)$；$(A\cap B)\subseteq B\subseteq(A\cup B)$.

3. 绝对值不等式

(1)不等式的三条基本性质

①不等式两边都加上同一个数或同一个整式，不等号方向不变.

②不等式两边都乘以同一个正数，不等号方向不变.

③不等式两边都乘以同一个负数，不等号方向改变.

(2)若 $a>0$，$|x|<a$ 的解集为 $\{x|-a<x<a\}$；$|x|>a$ 的解集为 $\{x|x>a$ 或 $x<-a\}$.

(3)若 $c>0$，则 $|ax+b|<c$ 可化为 $-c<ax+b<c$ 来解；$|ax+b|>c$ 可化为 $ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$ 来解.

4. 一元二次不等式

(1)一元二次不等式的定义及其一般形式

含有一个未知数,并且未知数的最高次数是二次的不等式叫做一元二次不等式,其一般形式是 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$(其中 $a\neq0$).

(2)一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$(Ⅰ)及 $ax^2+bx+c<0(a>0)$(Ⅱ)的解集.

①当方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相异实根 x_1、$x_2(x_1<x_2)$时,(Ⅰ)的解集为$\{x\mid x<x_1$,或 $x>x_2\}$;(Ⅱ)的解集为$\{x\mid x_1<x<x_2\}$.

②当方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等实根 x_1、$x_2(x_1=x_2=-\frac{b}{2a})$时,(Ⅰ)的解集为$\{x\mid x\in R$ 且 $x\neq-\frac{b}{2a}\}$;(Ⅱ)的解集为$\varnothing$.

③当方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实根时,(Ⅰ)的解集为 R;(Ⅱ)的解集为$\varnothing$.

5. 映射与函数

(1)映射的定义,原象集与象集

设 A、B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应.那么这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射,记作 $f:A\to B$.和 A 中元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象,a 叫做 b 的原象.A 称原象集,A 中元素的象的集合称象集,一般地象集 $C\subseteq B$.

(2)函数的定义、定义域、值域

设 A、B 都是非空数集,f 是从 A 到 B 的一个对应法则,那么从 A 到 B 的映射 $f:A\to B$ 叫做 A 到 B 的函数,记作 $y=f(x)$.其中 $x\in A$,原象集 A 叫做函数 $f(x)$ 的定义域;$y\in B$,象集合 C 叫做函数 $f(x)$ 的值域;C 与 B 的关系是 $C\subseteq B$.

(3)区间的概念

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间,记作$[a,b]$;满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做开区间,记作$(a,$

b);满足不等式 $a\leqslant x<b, a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做半开半闭区间,分别记作 $[a,b),(a,b]$;实数集 R 用区间表示为 $(-\infty,+\infty)$,满足不等式 $x\geqslant a, x>a, x\leqslant b, x<b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a,+\infty),(a,+\infty),(-\infty,b],(-\infty,b)$.

6. 分数指数幂与根式

(1) n 次方根的定义

如果一个数的 n 次方(n 是大于 1 的整数)等于 a,那么这个数就叫做 a 的 n 次方根.

(2)两组常用等式

①当 $n\in Z$,且 $n>1$ 时,$(\sqrt[n]{a})^n=a$;

②当 $n(n>1)$ 为奇数时,$\sqrt[n]{a^n}=a$;当 n 为正偶数时,$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$

(3)正数的分数指数幂的意义

当 $a>0, m、n\in N$,且 $n>1$ 时,$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$;$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

(4)幂的运算法则

若 $m、n\in Q, a>0, b>0$,则 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;$a^m\div a^n=a^{m-n}$;$(a^m)^n=a^{mn}$;$(ab)^n=a^n\cdot b^n$.

7. 幂函数

(1)幂函数的定义

函数 $y=x^a$ 叫做幂函数,其中 x 是自变量,a 是常数(本章只讨论 a 是有理数 n 的情况).

(2)幂函数 $y=x^n$($n=\pm\dfrac{p}{q}$, $p、q\in N$, $p、q$ 互质,或 $n=0$)的定义域和值域

(3)会作幂函数 $y=x^n$($n\in\{-2,-1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2},1,2,3\}$)的图像,对 n 是其他有理数时幂函数 $y=x^n$ 的图像只须作一般了解

即可.

(4)幂函数的性质

①当 $n>0$ 时,$y=x^n$ 有如下性质:

a:图像都通过点(0,0),(1,1);

b:在第一象限内函数值随 x 增大而增大.

②当 $n<0$ 时,$y=x^n$ 有如下性质:

a:图像都通过点(1,1);

b:在第一象限内函数值随 x 增大而减小;

c:在第一象限内,图像向上与 y 轴无限地接近,向右与 x 轴无限地接近.

8. 函数的单调性

(1)函数单调性的定义

设函数 $f(x)$在区间 M 上定义,若对于任意 x_1、$x_2\in M$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在 M 上是增函数;反之,若对于任意 x_1、$x_2\in M$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$在 M 上是减函数.此时称 $f(x)$在 M 上具有(严格的)单调性.

(2)单调区间

如果函数 $f(x)$在区间 M 上具有(严格的)单调性,则 M 就叫做$f(x)$的单调区间.

9. 函数的奇偶性

(1)奇、偶函数的定义

对于函数 $f(x)$,如果对于定义域内任意一个 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,那么函数 $f(x)$就叫做奇函数;同理,如果对于定义城内任意一个 x,都有 $f(-x)=f(x)$,那么函数 $f(x)$就叫做偶函数.

(2)奇、偶函数的图像定理

奇函数的图像关于原点成中心对称图形,偶函数的图像关于 y 轴成轴对称图形.

10. 反函数

(1)反函数的定义

从函数 $y=f(x)(x\in A,y\in C)$中解得 $x=\varphi(y)$,如果对任意 $y\in C$,通过 $x=\varphi(y)$,在 A 中都有唯一确定的 x 值与之对应,那么函数 $x=\varphi(y)$叫做函数 $y=f(x)$的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$.对调 x,y 得反函数 $y=f^{-1}(x)$.反函数的定义域是原函数的值域,反函数的值域是原函数的定义域.

(2)互为反函数的函数图像间的关系有如下定理:函数 $y=f(x)$图像和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

11. 指数函数

(1)指数函数的定义

形如 $y=a^x$ 的函数叫做指数函数,其中 $a>0$,且 $a\neq 1$,其定义域是实数集 R.

(2)指数函数的图像和性质.

(3)几个指数函数的图像

熟记 $y=10^x$,$y=2^x$,$y=(\frac{1}{2})^x$ 及 $y=(\frac{1}{10})^x$ 在同一直角坐标系中图像的相对位置,并能据此掌握指数函数图像的位置与底数大小的关系.

12. 对数

(1)对数的定义

如果 $a^b=N(a>0$,且 $a\neq 1)$,那么 b 就叫做以 a 为底 N 的对数,记作 $\log_a N=b(a>0$,且 $a\neq 1)$.其中 a 叫做底数,N 叫做真数,式子 $\log_a N$ 叫做对数式,底数为 10 的对数叫做常用对数.

(2)对数式与指数式的互化

当 $a>0$,且 $a\neq 1$ 时,指数式 $a^b=N$ 可以写成对数式 $\log_a N=b$,反之 $\log_a N=b$ 可以写成 $a^b=N$.

(3)对数恒等式

$a^{\log_a N}=N(a>0,a\neq 1,N>0)$,$\log_a a^b=b(a>0,a\neq 1)$.

(4)对数的性质

负数和零没有对数;1 的对数是零;底数的对数等于 1.

(5)对数运算法则

若 $a>0,\neq 1, M>0, N>0$,则 $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$;$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$;$\log_a(N^n)=n\log_a N$;$\log_a \sqrt[n]{N}=\frac{1}{n}\log_a N$.

13. 对数函数与换底公式

(1)对数函数的定义

函数 $y=\log_a x(a>0$,且 $a\neq 1)$叫做对数函数,对数函数的定义域是$(0,+\infty)$,值域是$(-\infty,+\infty)$.

(2)对数函数的图像和性质

(3)几个对数函数的图像

熟记 $y=\log_{10}x$,$y=\log_2 x$,$y=\log_{\frac{1}{2}}x$,$y=\log_{\frac{1}{10}}x$ 在同一直角坐标系中图像的相对位置,并能据此掌握对数函数图像的位置变换与底数大小的关系.

(4)对数换底公式

$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1, b>0$ 且 $b\neq 1, N>0)$

(5)自然对数

以 e 为底的对数 $\log_e N$ 叫做自然对数,$\log_e N$ 通常记作 $\ln N$,它与常用对数的关系是 $\ln N=\frac{\lg N}{\lg e}=\frac{\lg N}{0.4343}=2.303\lg N$.

14. 指数方程和对数方程

(1)指数方程和对数方程的概念

在指数里含有未知数的方程叫做指数方程;在对数符号后面含有未知数的方程叫做对数方程.

(2)指数方程的四种基本类型及其解法

①形如 $a^{f(x)}=c(a>0, a\neq 1, c>0)$的指数方程,常化为对数式来解.

②$a^{f(x)}=a^{g(x)}(a>0,a\neq1)$型的方程，可化为方程 $f(x)=g(x)$来解.

③$a^{2f(x)}+b\cdot a^{f(x)}+c=0(a>0,a\neq1)$型的方程，利用换元法，化为一元二次方程来解.

④利用图像求近似解的一类指数方程.

(3)对数方程的四种基本类型及其解法

①形如 $\log_a f(x)=c(a>0,a\neq1)$的方程，常化为混合组 $\begin{cases}f(x)>0\\f(x)=a^c\end{cases}$ 来解.

②$\log_a f(x)=\log_a g(x)(a>0,a\neq1)$型的方程，化为混合组 $\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0,\\f(x)=g(x)\end{cases}$ 来解.

③$[\log_a f(x)]^2+b\log_a f(x)+c=0(a>0,a\neq1)$型的方程，常用换元法，化为一元二次方程来解.

④利用图像求近似解的一类对数方程.

● **知识点**

1.集合

(1)集合和集合中元素的特性.

(2)集合的两种表示法.

(3)一些特殊数集的表示法.

(4)子集、交集、并集、补集.

2.一元二次不等式

(1)含绝对值不等式和一元二次不等式的解法，在刚刚学过集合后，用集合表示不等式的解集，简单明确.

(2)函数定义域、值域的准备知识.

3.映射与函数

(1)映射是一种特殊的对应.

(2)映射的概念.

(3)函数定义.

(4)函数的三要素(定义域、值域和对应法则).

(5)函数关系的表示法.

4. 幂函数

(1)分数指数与根式.

(2)指数为有理数的幂函数的图像与性质.

(3)函数的单调性.

(4)函数的奇偶性.

(5)函数和反函数及其它们的相互关系.

5. 指数函数和对数函数

(1)对数的概念.

(2)对数的性质和运算法则.

(3)指数函数和对数函数的图像与性质.

(4)一些特殊的对数方程与指数方程.

● 重点、难点

1. 重点

集合、子集、交集、并集、补集、空集、全集的概念,集合的性质及表示方法.

映射的概念;函数有反函数的条件;反函数的求法及性质.

对应法则是构成函数的核心;定义域是函数的重要组成部分;各类函数定义域的求法.

求值域的几种方法(须知求函数值域没有普遍适用的准则可遵循,只能根据不同的题型,采用不同的方法).

奇、偶函数的判定条件及其图像特征;增、减函数的定义及单调区间;周期函数的定义及图像特征.

二次函数的性质、图像特征;二次函数与二次方程、二次不等式、二次三项式的内在联系.

幂函数、指数函数与对数函数三类函数的定义、图像及性质.

几种特殊的指数方程、对数方程的解法.掌握函数作图的基本方法;从图像的展布状况指出函数的某些特性.运用数学知识解决实际问题.

2. 难点

集合的交、并、补运算.

对映射的理解,反函数的概念及求法.

复合函数的定义域、参数的讨论.换元法求值域.单调性、增减性的综合题,周期函数的证明.二次函数的综合运用.

幂函数的图像;与三类函数有关的数值大小的比较.

求解过程中增根、失根的检验.作图技巧的掌握.实际问题转化为数学模型.

(二)超强纠错

● 下列集合是相同的集合吗?为什么?

$A=\{1,2,3,4,5\}$与$B=\{5,4,3,2,1\}$.

【错解】 不是

【正解】 是

【辨析】 由于集合中元素的无序性,A与B是同一个集合.

点评:描述法表示集合,实际上是用概念的内涵来刻画概念的外延,在用描述法表示的集合中,要先分清集合中的元素是什么,然后再去区分元素和属性.

● 从$\in,\notin,\supseteq,\supset,\subseteq,\subset,=$中选择适当的符号填空.

(1) $0\underline{\notin}\varnothing$

【错解】 $=$

【正解】 $\notin$

【辨析】 空集中不含任何元素,因此$0\notin\varnothing$;

(2) $\varnothing\underline{\subset}\{0\}$

【错解】 $\in$

【正解】 $\subset$

【辨析】 空集是数0的集合的真子集,则$\varnothing \subset \{0\}$.

点评:要注意$\in$,$\notin$,$\subset$,$\subseteq$,$\not\subset$,$\not\subseteq$等记号意义的区别.$\in$,$\notin$表示元素与集合间是否存在从属关系,$\subset$,$\subseteq$,$\not\subset$,$\not\subseteq$表示集合与集合间是否存在包含关系,使用时不要混淆.

● 集合A与B,$A=\{0,1\}$,$B=\{x \mid x \subseteq A\}$,那么集合$A$,$B$之间存在的关系是( ).

A.$A \subset B$　　　　B.$A \in B$

C.$A \subseteq B$　　　　D.$A=B$

【错解】 A、C、D

【正解】 B

【辨析】 集合B中的元素$x \subseteq A$,即x是A的子集.因此可得

$$B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$$

$\therefore$ A是B的元素,记为$A \in B$

点评:集合B的元素是$\varnothing$,$\{0\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,集合B的子集是$\varnothing$,$\{\varnothing\}$,$\{\{0\}\}$,$\{\{0\},\{1\}\}$等,写成$A \subset B$就错了,注意分清究竟是元素与集合间的从属关系,还是集合与集合间的包含关系.

● 若集合A、B、C满足条件$A \cup B = A \cup C$,则可以推得:

A.$B=C$　　　　B.$A \cap B = A \cap C$

C.$A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$　　　　D.$\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C$

【错解】 A

【正解】 D

【辨析】 没有正确理解题意,混淆了命题之间的关系.题意是要求从$A \cup B = A \cup C$推出所列条件之一,是求使$A \cup B = A \cup C$成立的必要条件,而不是充分条件,$B=C$是使$A \cup B = A \cup C$成立的充分条件.

事实上,A、B、C都不一定成立,这容易举出反例,设全集$I=A$