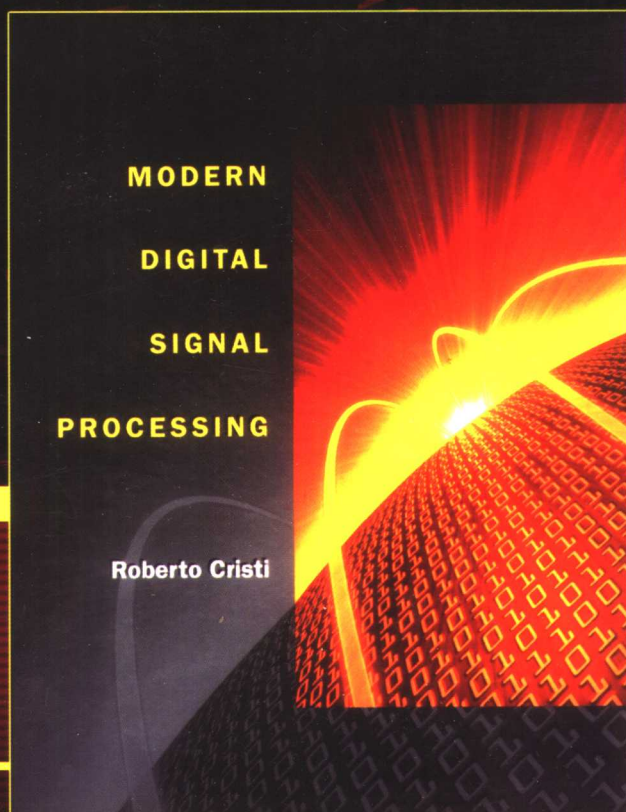


现代数字信号处理

Modern Digital Signal Processing

(美) Roberto Cristi 著
徐盛 等译



电子与电气工程丛书

现代数字信号处理

Modern Digital Signal Processing

(美) Roberto Cristi 著

徐盛 等译



机械工业出版社
China Machine Press

本书系统介绍数字信号处理的理论与实现, 内容涵盖了离散时间信号傅里叶分析、数字滤波器、多采样数字信号处理基本原理、DFT滤波器组和传输多路复用器, 以及时频展开等。本书论证严谨, 实例丰富, 章后附有大量习题方便教学。

本书可作为高等院校电子、通信、计算机等专业高年级本科生或研究生的教材, 也可以供相关技术人员参考。

Roberto Cristi: Modern Digital Signal Processing (ISBN:0-534-40095-7)

Copyright © 2004 by Brooks/Cole.

Original language published by Thomson Learning (a division of Thomson Learning Asia Pte Ltd). All rights reserved. 本书原版由汤姆森学习出版集团出版。版权所有, 盗印必究。

China Machine Press is authorized by Thomson Learning to publish and distribute exclusively this simplified Chinese edition. This edition is authorized for sale in the People's Republic of China only (excluding Hong Kong, Macao SAR and Taiwan). Unauthorized export of this edition is a violation of the Copyright Act. No part of this publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

本书中文简体字翻译版由汤姆森学习出版集团授权机械工业出版社独家出版发行。此版本仅限在中华人民共和国境内(不包括中国香港、澳门特别行政区及中国台湾)销售。未经授权的本书出口将被视为违反版权法的行为。未经出版者预先书面许可, 不得以任何方式复制或发行本书的任何部分。

981-265-554-9

版权所有, 侵权必究。

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

本书版权登记号: 图字: 01-2003-4666

图书在版编目(CIP)数据

现代数字信号处理 / (美) 克里斯蒂 (Cristi, R.) 著; 徐盛等译. —北京: 机械工业出版社, 2005.5

(电子与电气工程丛书)

书名原文: Modern Digital Signal Processing

ISBN 7-111-16280-3

I. 现… II. ①克… ②徐… III. 数字信号—信号处理 IV. TN911-72

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第020913号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037)

责任编辑: 王镇元

北京昌平奔腾印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2005年5月第1版第1次印刷

787mm×1092mm 1/16·21.5印张

印数: 0 001 - 4 000册

定价: 39.00元

凡购本书, 如有倒页、脱页、缺页, 由本社发行部调换
本社购书热线: (010) 68326294

译者序

随着电子技术的发展,数字信号已经取代了模拟信号,占据了主导地位。目前,虽然绝大多数科研院校都开设了“数字信号处理”课程,着重介绍数字信号处理的基础理论,但其中涉及的内容离实际使用的理论和算法还存在一定的距离。本书的编写过程中特别注意了上述问题,其内容非常贴近实际应用,可以作为初学者的入门书籍,也可以供研究生和工程人员的进一步提高使用。

本书涉及的内容较广泛,按照所涉及理论的难易程度安排,前7章是数字信号处理的经典理论,后面两章是现代理论。第1章和第2章,回顾信号与系统的基础理论并介绍数字信号处理的基础知识;第3章介绍数字信号处理的基本工具——离散时间傅里叶变换;第4章至第8章介绍滤波器和滤波器组的设计、多采样率变换等内容;第9章介绍时频分析基础。读者可根据自己的需要和水平有选择性地阅读,相信这本书会给大家带来帮助。

整书的翻译历时近8个月才完成了初稿。在对初稿的校对中,我们一起讨论分析,使得大家对数字信号处理的理论又有了一层更深的认识。翻译是一种艰苦的工作,但当书籍即将出版的时候,这种苦已经变成了一种期待的兴奋和快乐。作为一个老师和一个译者,此时希望将这种快乐与读者、参与翻译的人们和出版社的编辑分享,希望大家在阅读时能够记下他们的名字——张伟、尤扬、李晋、潘银君、肖龙安、郑珊瑚、白晓亮。同时,我也希望把这本书作为一份礼物送给我的导师——陈健教授,希望他收到这份礼物时能够和当年拿着我的博士毕业论文时一样高兴。最后,我要感谢我的父母和我的妻子,是他们的支持让我能够在工作上投入很大的精力,感激之情难于言表,套用一句歌词“军功章上有我的一半,也有你的一半”。

限于水平和时间原因,书中难免有遗漏之处,敬请读者批评指正。

徐 盛
2005年3月

前 言

数字信号处理 (Digital Signal Processing, DSP) 是一个激动人心的研究领域, 它吸引着数学家、工程师、音乐家、网络迷、通信专家和其他人员。现在很多软件的价格与教科书一样, 使得我们能够使用这些软件对声音、图片和图像进行数字信号处理实验。如果引导得当, 即使是痛恨数学的高中生也会开始喜欢这个领域。对于CD这个成熟的技术, 其本身就包含着很多复杂的数学问题, 如滤波 (包括数字滤波和模拟滤波)、多采样率变换、 $\Sigma-\Delta$ 调制。但是由于篇幅原因, 本书对差错校验不做讨论。无论是在第2代、第2.5代通信, 还是第3代通信的手机中, 都配备了FFT、数字滤波和多采样率滤波等模块。Internet使用者也应该感谢利用离散余弦变换 (DCT) 和小波变换 (WT) 的信号表示方法, 它们使得用户可以在较短的时间内, 哪怕是使用速度较慢的调制解调器, 也能下载自己所喜欢的音乐和图片 (仅包含很小的畸变)。现在数字技术的使用才刚刚开始!

目前教育的趋势 (无论研究生教育还是本科生教育) 正从青年教育和成人教育向终生教育发展。在二十几年的工作中, 我在“信号与系统”的本科生教学和研究生教学以及DSP和控制系统的研究中, 深深地感受到这种变化。尤其是在海军研究生院的这段时间, 这种感受尤为深刻, 因为在那里我参与了高等成人教育的工作。例如, 海军研究生院的学生与普通的学生不同, 他们的年龄 (30多岁)、家庭状况 (大多数已婚并且有了小孩) 和知识背景 (离开学校多年) 在几年前是一件非同寻常的事。在近半个世纪里, 学校一直为有着各种不同背景的学生服务。

选择一门课程的教材必须面向不同的应用和不同的学生。无论是针对无实践经验的年轻学生, 还是实践经验丰富的学生, 教材的内容都必须是合理的且理论上是严密的。当然, 学生必须具备一定的信号与系统和数字信号处理的基础。对于研究生, 不仅要掌握上述基础知识, 而且还要会使用相关的软件, 并了解其功能和局限性。

我个人在教学工作中就面临着这样的教材选择问题, 尤其是在研究生的“数字信号处理”课中。现有的大多数教材在数学的严密性和完整性上是好的 (甚至非常好), 而在启发学生学习的积极性方面就很一般 (甚至是较差的)。与之相反, 有些教材有生动的应用实例, 但在数学的完整性上显得较差。

我写这本书的目的是希望本书为学生们提供数字信号处理相关的资料, 它同样适合大学教育和自学。全书共9章, 包括背景知识 (第1章) 和适合33~40学时的核心内容 (包括第7章的多采样率和DFT滤波器组)。最后两章 (第8章和第9章) 涉及的正交镜像滤波器和时频分析初步, 可以作为学有余力的学生的课外阅读材料。本书的逻辑清晰, 使学生能够准确把握数字信号处理技术的发展历程。书中对大多数理论知识不仅做了阐述, 而且做了证明。

第1章回顾信号与系统的知识。首先提出了离散时间信号的一些结论, 然后将其推广到连续时间信号。在连续时间信号的傅里叶级数和傅里叶变换的基础上, 介绍了离散时间信号的傅里叶序列和离散傅里叶变换。对于那些准备选修该课程的同学来讲, 第1章可以让他们了解

本课程的一些基础知识。在网页 (<http://engineering/brookscole.com/cristi>) 上可以获得本章的内容。根据我的经验, 那些离别校园多年的学生重新返回校园的学术环境中时需要一些引导。

第2章介绍如何利用离散时间处理方法来处理连续时间信号。对于数字滤波器一般结构的分析能够让读者明白如何使连续时间和离散时间信号与系统共存。此外, 该章也介绍了量化噪声的数字特征(均值和方差)和一些现代数字化技术(例如 $\Sigma-\Delta$ 调制)。

第3章介绍离散时间傅里叶变换(Discrete Time Fourier Transform, DTFT)、离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)和快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)。虽然在第1章已经简单地介绍了这些内容, 该章结合谱分析、卷积计算、数据压缩和离散余弦变换(Discrete Cosine Transform, DCT)等应用做了更深入的讨论。对于DFT到DTFT的收敛性(许多情况下是不收敛的)和基于DCT的信息表示和熵等内容, 该章做了详细的阐述。最后, 介绍了FFT的基本知识, 并且详细地分析了Radix-2的快速算法。

第4章主要介绍数字滤波器和模拟滤波器的设计, 包括有限冲激响应(Finite Impulse Response, FIR)的和无限冲激响应(Infinite Impulse Response, IIR)的滤波器。其中涉及的内容非常有限, 包含两种基本的FIR滤波器设计方法(窗函数法和等波纹法)、两种模拟滤波器映射到数字滤波器的方法(欧拉法和双线性法)和两种模拟滤波器的设计方法(巴特沃兹法和切比雪夫法)。目的是希望读者能了解这些基本方法并清楚每种方法的局限性。同时零点和极点的直接映射作为一种计算传输函数的实用方法也进行了介绍。

在第4章对滤波器分析之后, 第5章对其实现进行了介绍。首先介绍了状态空间方程, 特别介绍了低阶系统的分解, 以及基于特征矢量和特征值的分解。其次, 介绍了基于格型结构的FIR和IIR的实现, 着重分析了反射系数的意义和稳定性之间的关系。最后, 介绍了一种稳定性很好的等波纹滤波器实现方法。除此之外, 对滤波器实现感兴趣的读者还可以在该章中找到很多其他的滤波器实现方法。

第6章介绍了多采样率数字信号处理的基本知识。从复弦波信号入手, 分析了上采样和下采样对频谱的影响, 再将其结论推广到一般情况。在接触具体的数学公式推导前, 对简单例子的分析能够让学生更准确地理解和把握多采样率信号处理的基本概念。在最后, 结合具体的应用介绍了滤波器的实现和对信号的重采样。

第7章介绍了一类特殊的滤波器组——DFT滤波器组和与其对应的变换复用器。这些滤波器能够很好地分解出信号的瞬时频率成分, 它们成为第9章将介绍的短时傅里叶变换(Short Time Fourier Transform, STFT)和盖博变换(GT)的理论基础。传输多路复用器在数字通信中使用非常广泛, 本章将介绍时分多址(Time Division Multiplex Access, TDMA)、频分多址(Frequency Division Multiplex Access, FDMA)和多载波(Multicarrier, MC)这些常见的变换复用技术。其中作为数字用户环路(DSL)基础的多载波调制, 也称正交频分复用(Orthogonal Frequency Multiplexing, OFDM)技术将着重介绍。

第8章介绍了基于数据采样率变化的滤波器组分解(分析)和重建(合成)技术。上述技术能保证在信号被分解成很多成分后, 其总的速率不发生变化。该技术对于信号表示和压缩特别有吸引力。在向量空间的基础上(内积和正交性), 能推导出滤波器的传输函数和分类(Daubechies和双正交)。它们是第9章介绍的时频技术的基础。在最后一章中, 着重分析了对于连续信号的连续分解和离散分解的区别, 及其相关技术STFT、Gabor变换、连续小波变换

(WT)、小波变换等。这些内容能够让学生了解时频不确定性条件下的完全正交性和完全重建。

每章都附有一定数量的习题，其中部分是需要用计算机才能解答的。部分习题中只涉及本章的内容，部分习题涉及以前章节的内容，这样能让整个学习有一种连续性。

如有差错，敬请指正。联系方式可参见本书的网页。

致谢

写这本书的想法要回溯到几十年前，那时我还在帕多瓦大学和安荷斯特的马萨诸塞大学。正是在那里，我有幸遇到了几位伟大的导师——Gianfranco Cariolaro、Lewis E. Franks、Jack K. Wolf以及去世的Richard Monopoli和Howard Elliott。他们的热忱和睿智一直影响着我。不仅在教学和研究工作中，而且在生活中他们都是我的榜样。

我要感谢海军研究生院的同事，他们是Ralph Hippenstiel（目前在得克萨斯大学工作）、Monique Fargues、Murali Tummala和Charles W. Therrien。尤其要感谢Ralph，他曾经细致地阅读过早期的手稿，而且还与我进行了多次讨论并给予了很大建议。研究部的Mike Matthews是我的朋友和同事，对本书的撰写帮助很大。我们曾经在“French Café”中多次交流，从信号处理一直谈到我们的孩子。

海军研究生院的同学一直激励我把事情做得更好，特别是最近几年的学生，他们对于知识的渴望以及钻研精神激励着我努力去做一个好老师。此外，还要感谢电气和计算机工程系的主任John Powers，以及几位前任主任Jeff Knorr、Mike Morgan和Herschel Loomis，感谢他们为我提供了一个良好的工作环境。

最后，我要感谢我的双亲——Anna和过世的Ivanoe Cristi，感谢他们对我一直的关爱。最后，还要感谢我的妻子Karla和女儿Roberta，感谢她们对于我工作的支持以及每天给我带来的欢乐。如果我会写诗的话，那么整本书都将是描写她们的！

Roberto Cristi

目 录

译者序	
前言	
第1章 信号与系统基础	1
1.1 信号	1
1.2 系统	13
1.3 离散时间信号的傅里叶分析	35
1.4 连续时间信号的傅里叶分析	46
习题	61
第2章 连续时间信号的离散处理	71
2.1 概述	71
2.2 数字滤波器的结构	71
2.3 数字滤波器的频域分析	72
2.4 量化误差	79
2.5 基于预测的采样法: Δ 和 Σ - Δ 调制	84
习题	87
第3章 离散时间信号的傅里叶分析	91
3.1 概述	91
3.2 离散时间傅里叶变换	91
3.3 离散傅里叶变换	94
3.4 用DFT作为DTFT的估计	100
3.5 使用DFT的频谱估计	104
3.6 用DFT做卷积	109
3.7 用DFT/DCT进行压缩	114
3.8 快速傅里叶变换	119
习题	123
第4章 数字滤波器	129
4.1 概述	129
4.2 理想滤波器和非理想滤波器	130
4.3 有限冲激响应滤波器	134
4.4 无限冲激响应滤波器	148
习题	167
第5章 数字滤波器的实现	171
5.1 概述	171
5.2 基本操作	171
5.3 数字滤波器的状态空间实现	174
5.4 稳健的数字滤波器实现方法	183
5.5 等波纹FIR滤波器的稳健实现	196
习题	199
第6章 多采样率数字信号处理基本 原理	203
6.1 概述	203
6.2 问题的描述和定义	204
6.3 对下采样和上采样的分析	206
6.4 有理因子的采样率变换	217
6.5 数字滤波器的多级实现	219
6.6 多采样率系统的高效实现	222
6.7 多采样率DSP的应用: 数模变换	226
6.8 采样频率和量化误差	229
习题	230
第7章 DFT滤波器组和传输多路 复用器	235
7.1 概述	235
7.2 DFT滤波器组	236
7.3 最大抽取DFT滤波器组和传输多路 复用器	243
7.4 传输多路复用器	248
7.5 传输多路复用器在数字通信调制中 的应用	254
习题	259
第8章 最大抽取滤波器组	263
8.1 概述	263

VIII

8.2 矢量空间	263	9.2 短时傅里叶变换	298
8.3 双通道完全重建条件	270	9.3 盖博变换	302
8.4 实系数完全重建滤波器组的设计	278	9.4 小波变换	307
8.5 正交滤波器组的格型实现	286	9.5 递归多分辨分解	314
8.6 音频信号的应用	290	附录 相关定理证明	325
习题	292	索引	327
第9章 时频展开简介	295	公式	333
9.1 概述	295		

第1章 信号与系统基础

1.1 信号

1. 定义和分类

众所周知信号是什么。在驾车时，在我们前面的司机控制汽车转弯和停止，汽车尾灯也随之相应闪烁。在这个生活的细节中，司机借助某种手段——“信号”（左尾灯）向周围的人传递着信息（汽车左转弯）。灯的闪烁是一种光信号，它被眼睛觉察到，然后送入大脑处理。除此之外，信号也可以其他形式出现，例如在地震时地震仪记录下的信息，脑电图仪或测慌仪记录的脑电波等。

如果留意日常生活，能够发现很多不同种类的信号：光信号、声信号（语音）和磁信号（磁带录音机）等。大多数信号都是随时间变化的，例如声信号；但也有例外，比如图像通过颜色和亮度来传递信息，这些信息随其位置的不同而变化，而不随时间变化。

在很多应用中，信号需要从一种形式转化为另外一种形式。例如磁带录音机首先将声音信号转化为电信号，然后再将电信号转化为磁信号并记录在磁带上。与之类似，收音机先将电磁信号（无线电波）转化为电信号，再将电信号转化为人耳能够听见的声音信号。

为便于研究和分析，多种多样的信号以及从中提取出的信息需要用“统一的语言”来描述，这种语言就是应用数学的一个分支——信号处理。这里，“信号”是一个独立于信号物理特征的概念，概括了信号的所有具体形式。在数学中，它被抽象为函数 $x(t)$ ，其中变量 t 表示物理现象的变化。虽然在大多数情况下， t 是一个标量，但是它也可以是一个多维变量，表示二维（或更高维）空间中的点。与信号处理相关的文献中，接触到的信号大致可分成以下三类：

- 一维信号 $x(t)$ ，其中 t 表示时间。例如当表示随时间变化的电压信号时， t 就代表时间。
- 二维信号 $x(s_1, s_2)$ ，其中 s_1, s_2 表示二维空间中的一个点。其最典型的应用是表示静止图像中点 s_1, s_2 的亮度。
- 三维信号 $x(s_1, s_2, t)$ ，其中 s_1, s_2 表示二维空间中的一个点， t 表示时间。它可以表示一系列静止图像的时间序列，我们称之为视频信号。

本书着重分析一维信号 $x(t)$ ，其中 t 表示时间。基于一维信号推导出的相关理论具有相当的普遍性，能够很容易地推广到多维。多维信号（静止图像和视频序列）的处理将在后续的书中介入。

例1-1

用时间作为自变量，麦克风的输出电信号测得为时间的函数，是一维信号，如图1-1所示。

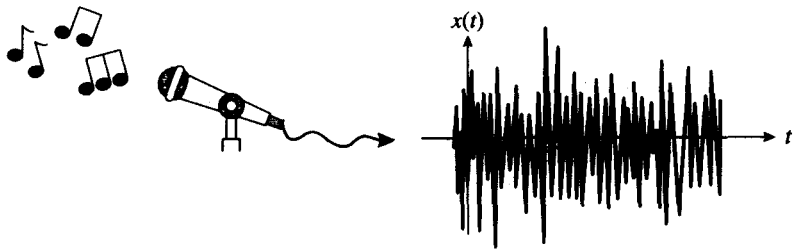


图1-1 一维声音信号

⋮

信号处理的目的是从观测到的现象中提取信息。这些观察到的信号可以是记录在某种媒介上的（如磁带录音机），也可以是实时测量的。现在，大多数工作都依靠数值处理功能强大的计算机来完成的，因此信号必须转化为能够被计算机处理的数字序列。无论一维信号（声音）还是二维信号（图像）都必须经过采样，才能被转换成数字序列。

为此，有必要定义一维的离散时间信号 $x[n]$ ：

$$x[n] = x(nT_s)$$

其中 n 为整数， T_s 为采样间隔。图1-2显示了一维连续时间信号的采样过程，显然模拟（连续时间）信号 $x(t)$ 与数字（离散时间）信号 $x[n]$ 最明显的区别在于前者在时间上是连续的，而后者是离散的。

2

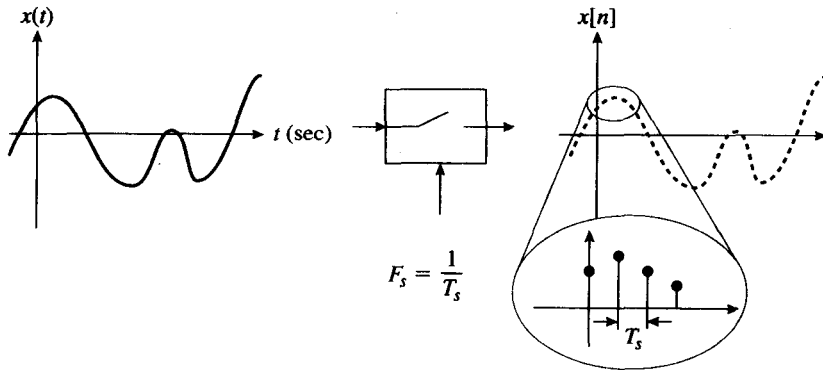


图1-2 连续时间信号的采样过程

下面通过乙烯塑料密纹唱片（Long-Playing record, LP）和光盘（Compact Disc, CD）的对比，将这种区别更形象化地表现出来。如图1-3所示，乙烯塑料LP表面刻着模拟信号的轨迹。如果拥有老唱机，当唱针划过轨迹时，就能听到相应的声音了。与此同时，也会听到如“滋滋”的噪声，它是由附着在唱片上的灰尘所造成的。另一方面，CD上的信息是经过数字编码的，存储得非常紧密，即便使用放大镜也无法分辨出来。

2. 基本信号

当我们试图将数字量与一个现象联系起来时，就需要一个参照系。正如我们刚学习计数时，手指可以作为参照系。学习写数时，10的幂次成为参照系。当我们身处于一个没有参照系的环境中，譬如在沙漠或大海中而没有任何仪器的情况下，或是置身于一群讲完全不懂的异国语言的人中，会感到不知所措。

3

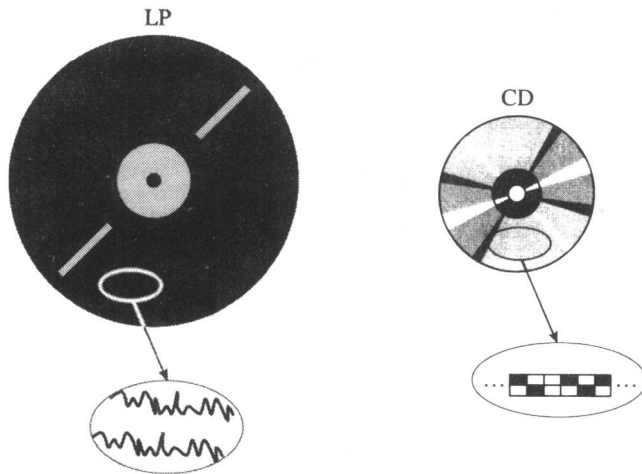


图1-3 模拟LP（密纹唱片）和数字CD（光盘）

在信号处理中也会遇到同样的问题：需要一个合适的参照系来帮助分析信号。由于分析的对象是信号，所以其参照系必须是由具备某些特殊性质的信号组成，它能反映出希望提取的信息。例如，为识别听见的音符，确定该音符在哪个音阶上，需要将该声音与很多特定频率的弦波（即音调）比较，从而判决出哪一个频率与听见的音符最接近。

下面将介绍一些基本离散时间信号，它们将是本书讲述内容的基础。

3. 离散时间单位冲激

单位冲激 $\delta[n]$ 是最基本的信号，它提供了一种最简单的信号展开方式，其定义如下：

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

图1-4左边部分给出了单位冲激的图示，右边是其时移形式 $\delta[n-k]$ 。任何离散时间信号都可以展开成基本冲激时移形式的叠加，每一个基本冲激时移对应一个采样，其数学表示如下：

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k]$$

其中求和中的每一项 $x[k] \delta[n-k]$ 表示序列中的一个样值。

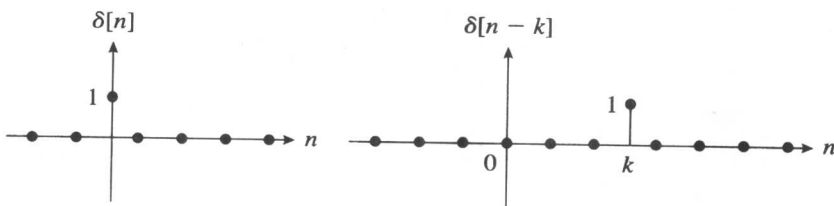


图1-4 冲激 $\delta[n]$ 与时移冲激 $\delta[n-k]$

例1-2

图1-5所示的序列可以如下表示：

4

$$x[n] = 1.5\delta[n+2] - 1.0\delta[n+1] + 1.2\delta[n] - 0.5\delta[n-1] + 0.5\delta[n-2] + 1.6\delta[n-3]$$

信号展开的重要意义在于无论信号多复杂都可以分解成不同幅度和时移的基本冲激信号。

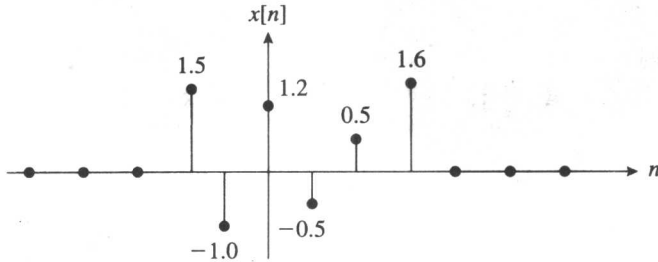


图1-5 数字序列

4. 连续时间单位冲激: Dirac函数

相对离散时间形式, 连续时间分析中的单位冲激定义稍微复杂一些。\$\delta(t)\$ 定义为在非零点都为0但积分不为0的函数, 数学表示如下:

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \quad (\text{所有 } t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1$$

如图1-6所示, 它可以看作是一个宽度为\$T\$、高度为\$1/T\$的矩形信号在\$T\$趋向于0时的极限情况。任何连续时间信号\$x(t)\$ 都可以表示成如下形式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\delta(\tau) d\tau = \int_{0-}^{0+} x(t-\tau)\delta(\tau) d\tau = x(t) \int_{0-}^{0+} \delta(\tau) d\tau = x(t)$$

上述性质被称为移位性质:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) d\tau$$

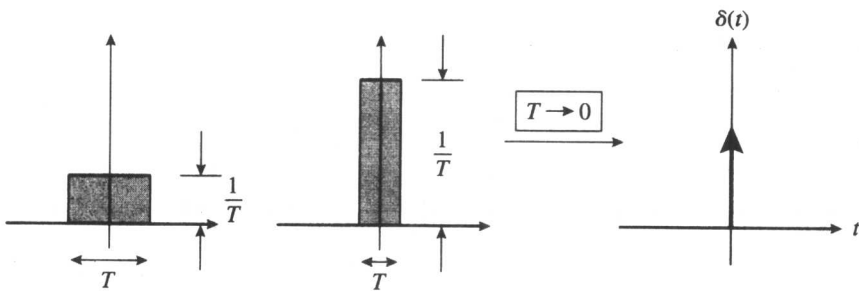


图1-6 Dirac \$\delta\$函数

5

最右边的积分式可以通过改变积分变量来导出。这里, 列出信号展开的以下离散时间形

式，便于与连续形式做一个对比。

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k]$$

可以发现，在连续和离散情况中，都可以将信号展开成一系列的单位冲激。

5. 弦波信号

在傅里叶分析中，正弦波信号可看做是任何信号的组成部分。例如，声音信号是由一系列振动合成的，这些振动来自于人和动物的声带，或是来自乐器的弦或驻波。当站在大声播放摇滚乐的汽车旁边时，在身体中都能够感觉到这种振动。

连续时间的正弦波信号定义如下：

$$x(t) = A \cos(\Omega_0 t + \alpha)$$

其中 A 表示幅度。如果独立变量 t 代表时间（单位：秒），那么 Ω_0 代表角频率（单位：弧度/秒）， α 代表相位（单位：弧度）。与其他的三角函数一样，余弦函数的自变量改变 2π 的整数倍，其数值不发生变化，因此正弦函数具备周期性。

$$x(t) = A \cos(\Omega_0 t + \alpha + 2\pi) = A \cos(\Omega_0(t + T_0) + \alpha) = x(t + T_0)$$

其中， $T_0 = 2\pi/\Omega_0$ 表示周期（单位：秒）。正弦波的幅度和周期如图1-7所示。例如，某正弦波的角频率为 $\Omega_0 = 2000\pi$ ，那么其周期

$$T_0 = \frac{2\pi}{2000\pi} = 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ ms}$$

周期的倒数 $F_0 = 1/T_0$ 是频率，表示信号每秒钟重复的次数。例如，弦波的周期为 $T_0 = 1 \text{ ms}$ ，其频率应该为 $F_0 = 1000 \text{ Hz}$ ，其中 $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$ 。周期和频率的定义以及它们之间的关系是理论分析的基础，现归纳如下：

角频率： $\Omega_0 = 2\pi F_0 = \frac{2\pi}{T_0} \text{ rad/s}$

周期： $T_0 = \frac{1}{F_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0} \text{ s}$

频率： $F_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\Omega_0}{2\pi} \text{ Hz} = \text{s}^{-1}$

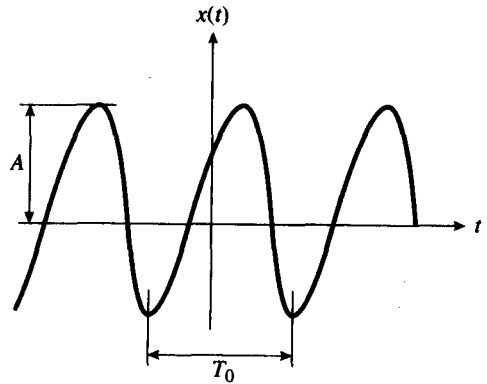


图1-7 幅度为 A ，周期为 T_0 的弦波信号

6

例1-3

某弦波的频率 $F_0 = 250 \text{ kHz}$ ，则其周期

$$T_0 = \left(\frac{1}{250}\right) \times 10^{-3} \text{ s} = 4 \times 10^{-6} \text{ s} = 4 \mu\text{s}$$

⋮

按采样间隔对连续时间的弦波信号进行采样, 可获得离散时间信号:

$$x[n] = x(nT_s) = A \cos(\Omega_0 T_s n + \alpha)$$

定义数字频率 $\omega_0 = \Omega_0 T_s$, 那么上式可重写为

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \alpha)$$

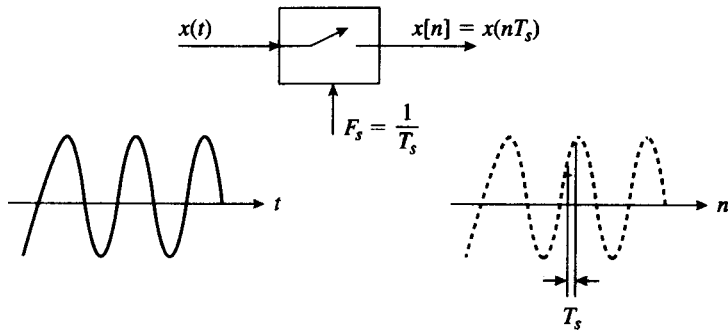


图1-8 采样后的弦波信号

根据定义 $\omega_0 = \Omega_0 T_s = 2\pi F_0 T_s = (\text{rad/s}) \times \text{s}$, 数字频率是没有量纲的。为明确数字频率的含义, 定义采样频率 $F_s = 1/T_s$, 表示每秒的采样值数目, 那么数字频率可以写为:

$$\omega_0 = 2\pi \frac{F_0}{F_s} \text{rad}$$

也就是说, ω_0 是和采样频率相关的一个频率度量。

例1-4

一频率为 $F_0 = 2\text{kHz}$ 的正弦波, 采样间隔为 $T_s = 0.1\text{ms} = 10^{-4}\text{s}$ 。那么, 采样频率 $F_s = 10^4 \text{Hz} = 10\text{kHz}$, 相应的数字频率为:

$$\omega_0 = 2\pi \frac{F_0}{F_s} = 2\pi \frac{2000}{10\,000} = \frac{2\pi}{5} \text{rad}$$

6. 复指数信号

虽然用弦波可以表示信号, 但三角函数的运算不够简洁。所幸的是, 弦波信号可以展开成复指数信号, 跟前者相比, 复指数的数学特性更好, 其变换公式称为欧拉 (Euler) 公式:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})$$

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})$$

将其中的变量替换成时变的相位, 则连续时间和离散时间的弦波信号都可以表示成为复指数信号:

$$x(t) = A \cos(2\pi F_0 t + \alpha) = \frac{A}{2} e^{j\alpha} e^{j2\pi F_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\alpha} e^{-j2\pi F_0 t}$$

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \alpha) = \frac{A}{2} e^{j\alpha} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\alpha} e^{-j\omega_0 n}$$

8

对于复信号而言,很多重要的运算都转换为线性运算,所以它比弦波信号更具吸引力。例如,

- 差分和积分: 信号 $x(t)$ 对时间变量 t 求导数和积分,定义 $y_d(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ 和 $y_i(t) = \int x(t)dt$ 。除非 $x(t)$ 是指数函数,否则 $y_d(t)$ 和 $y_i(t)$ 与 $x(t)$ 皆不相同。对于复指数,上述两种运算转换为乘法和除法:

$$y_d(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}e^{j2\pi F_0 t} = (j2\pi F_0)e^{j2\pi F_0 t} = (j2\pi F_0)x(t)$$

$$y_i(t) = \int x(t)dt = \int e^{j2\pi F_0 t} dt = \left(\frac{1}{j2\pi F_0}\right)e^{j2\pi F_0 t} = \left(\frac{1}{j2\pi F_0}\right)x(t)$$

- 时移: 信号序列 $x[n]$ 的时移 $y[n] = x[n - L]$,其中 L 为整数。如果 $x[n]$ 是复指数序列,那么时移可通过乘法获得:

$$y[n] = x[n - L] = e^{j\omega_0(n-L)} = (e^{-j\omega_0 L})e^{j\omega_0 n} = (e^{-j\omega_0 L})x[n]$$

用专业术语来讲,复指数信号是差分、积分和时移算子的特征函数,即仅当信号是指数函数时,以上运算才是线性运算。对于其他信号这种关系就不一定成立了。这个特性是大多数作为信号和系统分析工具的数学变换(如傅里叶变换、拉普拉斯变换、Z变换及其相关变换等)的基础。

7. 模拟和数字频率

无论是连续时间复指数信号,还是离散时间复指数信号都可以由其幅度 A 、相位 α 和频率(模拟频率 F_0 Hz、角频率 Ω_0 rad/s或数字频率 ω_0 rad)根据下式完全确定:

$$x(t) = Ae^{j\alpha} e^{j\Omega_0 t} = Ae^{j\alpha} e^{j2\pi F_0 t}$$

$$x[n] = Ae^{j\alpha} e^{j\omega_0 n}$$

正如前面所介绍的,复指数信号是大多数信号分析工具的核心,可以用上述三个参数表示。图1-9将复指数信号的幅度和相位表示成为频率(对于连续时间信号为 F_0 或 Ω_0 ,对于离散时间信号为 ω_0)的函数。

9

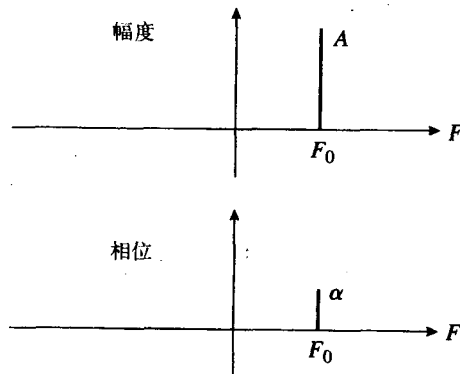


图1-9 复指数信号的频域表示

当信号是由两个或多个不同幅度和相位的复指数信号组成，频域表示中会出现更多成分。例如，弦波表示如下：

$$x(t) = A \cos(2\pi F_0 t + \alpha) = \frac{A}{2} e^{j\alpha} e^{j2\pi F_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\alpha} e^{-j2\pi F_0 t}$$

它是由两个频率分别为 F_0 和 $-F_0$ 的复指数信号组成，如图1-10所示。注意，其负频部分具有与正频部分相同的幅度和相反的相位。

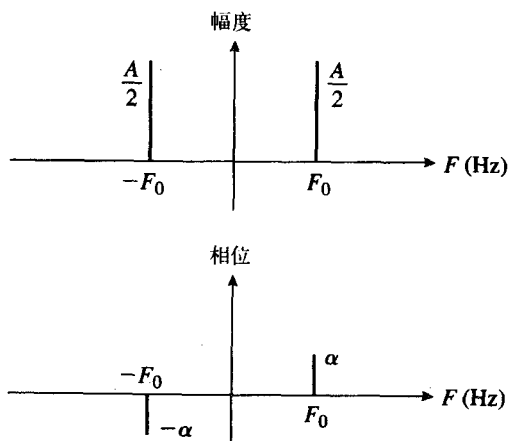


图1-10 弦波信号的频域表示

与连续形式相似，离散弦波信号

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \alpha) = \frac{A}{2} e^{j\alpha} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\alpha} e^{-j\omega_0 n}$$

也是由两部分组成，如图1-11所示，其频率分别为 ω_0 和 $-\omega_0$ ，它们具有相同的幅度和相反的相位。无论是连续时间信号还是离散时间信号，这种图形表示称为信号的频域表示。虽然仅对复指数和弦波信号做了细致的分析，但可以将其结论推广到任意信号，它表示信号

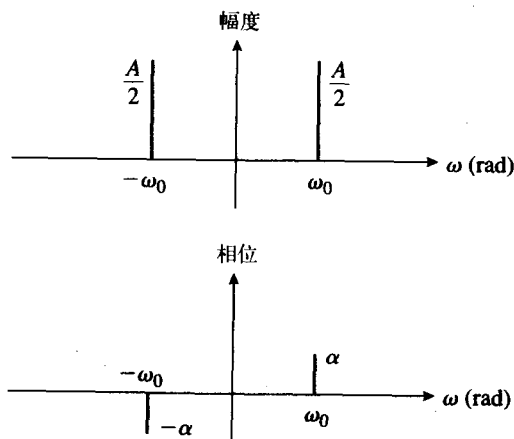


图1-11 弦波序列的频域表示