LISAN SHUXUE JICHU

离散数学基础

● 王传玉 ●

中国科学技术大学出版社

离散数学基础

王 传 玉

中国科学技术大学出版社
2004 · 合肥

内容简介

离散数学，是现代数学的一个重要分支，是计算机科学中基础理论的核心课程。离散数学是随着计算机科学的发展而逐步建立的，它形成于20世纪70年代初期，是一门新兴的工具性学科。为适应计算机科学教学的需要，组织编写了这本理工科院校计算机专业适用的基础教材。

内容包括：数理逻辑；谓词逻辑；集合代数；二元关系；函数；代数结构；格与布尔代数；图论等。

本书特色是内容实用，叙述简捷，实例突出，非常适合大专院校师生和有关科技人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学基础/王传玉．—合肥：中国科学技术大学出版社，2004.11

ISBN7-312-01741-X

Ⅰ．离…　Ⅱ．王…　Ⅲ．离散数学　Ⅳ．O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第103992号

中国科学技术大学出版社出版发行
（安徽省・合肥市金寨路96号　邮政编码：230026）
中国科学技术大学印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本：850×1168/32　印张：6.25　字数：160千
2004年11月第1版　2004年11月第1次印刷
印数：1—3000册
ISBN 7-312-01741-X/O・297　定价：12.00元

前　　言

离散数学是研究离散量的结构及相互关系的学科，它在计算复杂性理论、软件工程、算法与数据结构、数字逻辑电路设计等各个领域，都有着广泛的应用。鉴于绝大多部分学生(为大二)学习本课程时，是初次接触较抽象的数学，因此本书力求做到内容易懂、实用，少而精。作为一门重要的专业基础课，通过离散数学的学习，不仅能为学习专业课打下良好的基础，同时也能适当培养他们抽象思维和慎密逻辑推理的能力。

本书包含四部分内容：数理逻辑、集合论初步、代数结构与图论。

第 1 章　数理逻辑

第 2 章　谓词逻辑

第 3 章　集合代数。

第 4 章　二元关系：包括关系的基本概念及若干特殊关系。

第 5 章　函数：包括映射等基础知识。

第 6 章　代数结构：属于近世代数的群环域部分，侧重介绍群论，环与域的内容相对较少。

第 7 章　格与布尔代数：介绍了一些基本概念和基础知识，作为偏序集理论的延伸。

第 8 章　介绍图论方面的基本知识。

在编写过程中，我们参阅了大量的离散数学书籍和资料，在此也向有关作者表示衷心的感谢。

作者对张玥、杨绪兵、谭志杭等老师表示感谢，他们在校对原稿时提出了不少宝贵意见。

最后，我们诚恳地期待读者对本书的批评和指正，限于作者的水平，错误在所难免。希望使用本书的教师和读者不吝指正。

作　　者

2004 年 10 月于安徽芜湖镜湖之畔

安徽工程科技学院

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第1章 数理逻辑

逻辑学是一门研究思维形式及思维规律的科学.数理逻辑是研究推理的数学分支,它是用数学方法来研究推理的规律,而数学方法即为引进一套符号系统的方法,所以数理逻辑又称为符号逻辑,其最基本的内容为命题逻辑和谓词逻辑.

1.1 命题与逻辑联结词

数理逻辑中的命题是一个或真或假,但两者不能同时具备的陈述语句.

作为命题的陈述句所表达的判断结果称为命题的真值,真值只取两个值:真(True)、假(False),真值为假的命题称为假命题,真值为真的命题称为真命题.任何命题的真值都是惟一的,一切没有判断内容的句子、无所谓是非的句子,如疑问句、祈使句、感叹句等都不能作为命题.

例 1.1 判断下列句子是否为命题.

(a) 5 是素数.

(b) 你会说英语吗?

(c) x 大于 y.

(d) 请不要随地吐痰!

(e) 本命题为假.

(f) 如果天气不好,那么我将在家读书.

解 (a)、(f)为命题,(e)为悖论,(b)、(c)、(d)不是命题.

在命题逻辑中,对命题的成分不再细分,因而命题就成为命题逻辑中最基本也是最小的研究单位.对命题和它的真值进行符号

化，常用大写英文字母 $P,Q,R,\cdots,P_i,Q_i,R_i,\cdots$表示命题，用“0”表示假，用“1”表示真，于是命题的真值取值为 0 或 1. 在例 1.1 中，用 P,Q 分别表示(a)，(f)中命题，称为这些命题的符号化，其表示法分别为

P:5 是素数.

Q:如果天气不好，那么我将在家读书. 其中 P 的真值为 1，Q 的真值暂时不知道.

有些命题不能分解为更简单的陈述句，称这样的命题为简单命题或原子命题，如例 1.1 中的 P 所表示的命题，但在各种论述和推理中，所出现的命题大多数不是原子命题，而是由原子命题通过联结词、标点符号复合构成的陈述句，称这样的命题为复合命题. 如例 1.1 中的 Q 所表示的命题.

注：P,Q,R 也可表示任意命题，此时它们为命题变元，但不是命题，除非将它们换成具体的命题，F,T 为命题常元.

由于复合命题是由原子命题与逻辑联结词组合而成的，故联结词是复合命题中的重要组成部分. 在命题演算中，联结词就是运算符号，运算对象为命题或命题变元，运算结果为复合命题或命题公式. 在数理逻辑中必须给出联结词的严格定义，并且将它们符号化. 哪些联结词及其相应的符号能足以表达可能情况下的一切命题，常用的有五种：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$.

定义 1.1 设 P 为命题，P 的否定为一个复合命题，记为$\neg P$，读作“非 P”，复合命题“非 P”称为 P 的否定式. 符号$\neg$称作否定联结词.

$\neg P$ 的逻辑关系是 P 不成立，若 P 取 0，则$\neg P$ 取 1；若 P 取 1，则$\neg P$ 取 0.

用运算对象的真值，决定一个应用运算符的命题的真值，列成表格形式，称为运算符的真值表. 联结词$\neg$的真值表如表 1-1 所示.

表 1-1

P	$\neg P$
0	1
1	0

例 1.2　P:王浩是三好生,则$\neg P$:王浩不是三好生.

例 1.3　Q:这些人都是男生,则$\neg Q$:这些人不都是男生.

定义 1.2　设 P,Q 为两个命题,复合命题“P 并且 Q”(或“P 与 Q”)称为 P 与 Q 的合取式,记作 $P \wedge Q$, $\wedge$ 称作合取联结词. 其真值表如表 1-2.

表 1-2

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$P \wedge Q$ 的逻辑关系是 P 与 Q 同时成立,因而只有 P 与 Q 同时为真,$P \wedge Q$ 才为真.

例 1.4　P:张强聪明,Q:张强用功,则 $P \wedge Q$:张强既聪明又用功.

定义 1.3　设 P,Q 为两个命题,复合命题“P 或 Q”称作 P 与 Q 的析取式,记作 $P \vee Q$, $\vee$ 称作析取联结词. 其真值表如表 1-3.

表 1-3

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$P\vee Q$ 的逻辑关系是 P 与 Q 至少有一个成立，因而只有 P 与 Q 同时为假时，$P\vee Q$ 才为假. 但自然语言中的"或"具有二义性，用它联结的命题有时具有相容性，有时具有排斥性，对应的联结词分别称为相容或和排斥或.

例 1.5 P：李明在看书，Q：李明在听音乐，则 $P\vee Q$：李明在看书或听音乐.

例 1.6 P：王晓是中国人，Q：王晓是英国人，则 $P\vee Q$：王晓是中国人或英国人.

定义 1.4 设 P,Q 为两个命题，复合命题"如果 P，那么 Q"称作 P 与 Q 的条件式，记作 $P\rightarrow Q$，并称运算对象 P 是条件式的前件，运算对象 Q 是条件式的后件，$\rightarrow$称作条件联结词. 其真值表如表 1-4.

表 1-4

P	Q	$P\rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$P\rightarrow Q$ 的逻辑关系是 Q 是 P 的必要条件.

例 1.7 P：我得到奖学金，Q：我买书，则 $P\rightarrow Q$：如果我得到奖学金，那么我买书.

还有多种等价方式描述复合命题 $P\rightarrow Q$，例如"若 P，则 Q"，"只要 P，就 Q"，"只有 Q 才 P"，"除非 Q 才 P"，"除非 Q，否则非 P"，等等.

若称复合命题 $P\rightarrow Q$ 为原命题，则 $Q\rightarrow P$ 为其逆命题，$\neg P\rightarrow \neg Q$为其否命题，而$\neg Q\rightarrow \neg P$ 为其逆否命题.

定义 1.5 设 P,Q 为两个命题，复合命题"P 当且仅当 Q"称

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

作 P 与 Q 的双条件式，记作 $P \leftrightarrow Q$，$\leftrightarrow$ 称作双条件联结词. 其真值表如表 1-5.

表 1-5

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$P \leftrightarrow Q$ 的逻辑关系是 P 与 Q 互为充分必要条件. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ 与 $P \leftrightarrow Q$ 的逻辑关系完全一致，即都表示 P 与 Q 互为充分必要条件.

例 1.8 P：两圆 O_1，O_2 面积相等，Q：两圆 O_1，O_2 的半径相等，则 $P \leftrightarrow Q$；若两圆 O_1，O_2 的面积相等，则它们的半径相等，反之亦然.

以上定义了五种最基本、最常用、也是最重要的联结词 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，这五种联结词之意义由其真值表惟一确定，而不由命题的含义确定，因此它们的真值表必须熟练掌握.

利用联结词可以将一些语句翻译成逻辑符，如，设 P：明天下雨，Q：明天下雪，R：我去学校，则语句"明天我将雨雪无阻一定去学校"，可译成 $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$. 还可以用逻辑符表达复合命题，如：我既不看电视，也不外出，我在睡觉. 解题步骤为首先找出所有简单命题，其次依题意选取适当的联结词. 令 P：我看电视，Q：我外出，R：我在睡觉. 则上述语句可用 $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ 表达.

习题 1.1

1. 指出下列语句哪些是命题，哪些不是命题，如果是命题，指

出它的真值:

(a) 离散数学是计算机科学系的一门必修课.

(b) 5 是素数吗?

(c) 请勿吸烟!

(d) 圆的面积等于半径的平方乘以 π.

2. 给出下列命题的否定:

(a) 明天天气好并且我去锻练.

(b) 如果你去踢球,那么我也去踢球.

3. 将下列复合命题分解成若干个原子命题,并找出适当的联结词:

(a) 若地球上没有水和空气,则人类不能生存.

(b) 他是运动员或他是大学生.

(c) 如果你不努力,那么你考试将不会通过.

(d) 除非天下大雨,否则他不乘公交车上班.

1.2 命题公式

简单命题通过联结词可形成复合命题. 设 P 和 Q 是任意两个命题,则 $\neg P, P\wedge Q, P\vee Q, P\rightarrow Q, P\leftrightarrow Q$ 等都是复合命题,皆有真值,可以称它们为基本复合命题. 而多次使用联结词的复合命题,可以称它们为复杂复合命题. 若 P 和 Q 为命题变元时,则上述各式都将变成命题公式,皆无真值. 只有将公式中的命题变元用确定的命题代入时,才得到一个命题.

将命题变元用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串称为命题公式. 当使用联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 中的联结词时,命题公式定义如下.

定义 1.6 (a)单个命题变元是命题公式.

(b) 若 A 是命题公式,则 $(\neg A)$ 也是命题公式.

(c) 若 A, B 是命题公式,则 $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow$

B)也是命题公式.

(d) 只有有限次地应用(a)、(b)、(c)形成的符号串才是命题公式.

可将命题公式简称为公式.

由定义可知,$(P \to Q) \vee (P \wedge Q)$,$(P \vee Q) \wedge (\neg P \to R)$等都是公式,而 $PQ \leftrightarrow \neg R$,$(P \to Q, \wedge P \to \neg Q$ 等不是公式.

在命题公式中,由于有命题变元的出现,因而真值是不确定的. 当将公式中出现的全部命题变元都解释成具体的命题之后,公式就成了真值确定的命题了.

为了减少使用圆括号的数量,约定最外层圆括号可以省略. 同时规定联结词的优先次序为$\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\to$,$\leftrightarrow$,圆括号最强.

组成命题公式的各命题变元为公式分量,一般地,一个命题公式含有 n 个命题变元,可设为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$. 如公式$(\neg P \wedge Q) \to R$ 中含有 3 个命题变元 P, Q, R.

若公式 B 为公式 A 的一部分,则 B 为 A 的子公式. 而在每一个公式中,每一个联结词都有其相应的作用范围,即紧接该联结词的最小子公式,称为该联结词的辖区.

例 1.9 求公式$\neg(P \vee \neg(Q \to \neg R))$中每个联结词的辖区.

解 $P \vee \neg(Q \to \neg R)$为$\neg$的辖区,$P$,$\neg(Q \to \neg R)$为$\vee$的左、右辖区,$Q \to \neg R$ 为$\neg$的辖区,Q,$\neg R$ 为$\to$的左、右辖区,R 为$\neg$的辖区.

习题 1.2

1. 判别下列公式哪些是命题公式? 哪些不是命题公式?

(a) $P \wedge Q \to \neg R$.

(b) $(P \leftrightarrow (\neg Q \to R))$.

(c) $(P \to (Q \to R)$.

(d) $PQ \to \neg R$.

2. 将下列命题符号化,并讨论各命题的真值.

(a) 今天是星期六当且仅当明天是星期日.

(b) 如果下午不下雨,我去图书馆;否则,我在宿舍读书或看电视.

1.3 真值表和等价公式

对于给定命题公式各种不同的解释,其结果不是得到真命题就是得到假命题. 设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在公式A 中的全部的命题变元,给 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 各指定一个真值,称为对 A 的一个赋值或解释. 若指定的一组值使 A 的真值为 0,则称这组值为 A 的成假赋值,若使 A 的真值为 1,则称这组值为 A 的成真赋值. 易知,含 $n(n\geqslant 1)$个命题变元的公式共有 2^n 个不同的赋值.

定义 1.7 将命题公式 A 在所有赋值下取值情况列成表,称作 A 的真值表.

此方法亦称命题公式的真值表技术,它是建立在联结词的真值表基础上的,同时,它也是后续内容的基础.

构造真值表的具体步骤如下:

(a) 找出公式中所含的全体命题变元 $P_1,P_2,\cdots,P_n$(若无下角标就按字典顺序排列),列出 2^n 个赋值,并规定,赋值从 $00\cdots0$ 开始,然后按二进制加法依次写出各赋值,直到 $11\cdots1$ 为止.

(b) 按从低到高的顺序写出每个子公式.

(c) 对应各个赋值计算出各子公式的真值,直到最后计算出公式的真值.

按照以上步骤,可以构造出任何含 $n(n\geqslant 1)$个命题变元的公式的真值表.

例 1.10 计算公式$(\neg P\leftrightarrow Q)\rightarrow(P\wedge\neg Q)$的真值表.

解 该公式是含两个命题变元的公式. 它的真值表如表 1-6 所示.

表 1-6

P	Q	$\neg P$	$\neg P\leftrightarrow Q$	$P\wedge\neg Q$	$(\neg P\leftrightarrow Q)\to(P\wedge\neg Q)$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1

从表 1-6 可知，该公式的成假赋值为 01，其余 3 个赋值都是成真赋值.

一般地，当命题公式含有 n 个分量，则在真值表中，分量的所有指派组合应有 2^n 个. 也即真值表中应有 2^n 行，命题公式也就有 2^n 种真值情况.

根据公式在各种赋值下的取值情况，可按下述定义将命题公式进行分类.

定义 1.8　设 A 为任一命题公式.

(a) 若 A 在它的各种赋值下取值均为真，则称 A 是重言式或永真式.

(b) 若 A 在它的各种赋值下取值均为假，则称 A 是矛盾式或永假式.

(c) 若 A 不是矛盾式，则称 A 是可满足式.

从定义可知，利用真值表技术不但能准确地给出公式的成真赋值和成假赋值，而且能判断公式的类型.

例 1.11　(a) 例 1.10 中的公式是非重言式的可满足式.

(b) 公式 $(P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg P)$ 是重言式.

(c) 公式 $(P\wedge Q)\wedge\neg P$ 为矛盾式.

具有 n 个命题变元的公式形式各异，这些公式的真值表是否有无穷多种不同的情况？回答是否定的.

定义 1.9　设 A,B 是两个命题公式，且含有相同的分量，若 A,B 的真值表相同，则称 A 与 B 是逻辑等价的，记作 $A\Leftrightarrow B$.

两个命题公式 A,B 逻辑等价的另外一种说明方法是：公式

$A \leftrightarrow B$为重言式.

例 1.12 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P, P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$.

解 利用真值表(表 1-7)易证.

表 1-7

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

虽然用真值表法可以判断任何两个命题公式是否逻辑等价，但当命题变元较多时，计算量是很大的. 可以先用真值表验证一组基本的且重要的等价公式，以它们为基础进行公式之间的演算，来判断公式之间是否逻辑等价.

命题结构中有关$\neg, \wedge, \vee$运算具有许多良好的性质：

(a) 双重否定律

$$P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$$

(b) 幂等律

$$P \Leftrightarrow P \vee P, \qquad P \Leftrightarrow P \wedge P$$

(c) 交换律

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P, \qquad P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$$

(d) 结合律

$$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R), \quad (P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$$

(e) 分配律

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \quad (\vee \text{ 对 } \wedge \text{ 的分配律})$$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \quad (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 的分配律})$$

(f) 德·摩根律

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q, \qquad \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

(g) 吸收律

$$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P, \qquad P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com