非凡图书

龚冬保教授考研数学

2006版

数学考研典型题

数学一

龚冬保 魏战线 张永怀 魏立线

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

（2006 版）

数学考研典型题

考卷分析·应试对策·全真模拟

（数学一）

龚冬保　　魏战线

张永怀　　魏立线

西安交通大学出版社

·西安·

内容简介

本书自1999年问世以来，2006版是最新修订版，也是本书第7版. 在本书问世后的6年中，每年均以高分覆盖当年考题，深受考生欢迎. 例如在2000年考研中，书中36道题命中考题中非客观题（大题）27道（次）（数学一，8题49分；数学二，7题44分；数学三，6题41分；数学四，5题44分）；2000年修订后的第2版中相似题覆盖2001年考题66道（次）332分（数学一68分，数学二90分，数学三83分，数学四91分）；2001年修订后的2002版中覆盖2002年考题338分（数学一87分，数学二91分，数学三81分，数学四79分）；2002年修订后的2003版中覆盖2003年考题561分（数学一142分，数学二139分，数学三142分，数学四138分）；2003年修订后的2004版覆盖2004年数学一试卷136分；2004年修订后的2005版（数学一分册）覆盖2005年数学一试卷135分.

本书由四部分组成：第一部分是考卷分析：对新"考试大纲"问世后2003～2005年的数学考研考卷作了列表分析，将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了；第二部分是应试对策：讲的是复习备考及身临考场的策略；第三部分是典型题选讲与练习：选了1500余道题，其中500多道例题（包含了往届的考题），讲解采用分析、注释、一题多解等讲法，讲解解题的方法与技巧，所有练习题均给出了答案与提示；第四部分是考题分析：龚冬保教授每年都有一篇专文，深入剖析当年的试题，指出命题的动向. 另外，附录中收录了2003～2005年考研试卷.

本书可供准备考研的读者使用，也可供大学数学教师参考.

如有建议和意见，请与本社联系. Email：xjtup_kysx@126.com

图书在版编目(CIP)数据

数学考研典型题—2006版（数学一）/龚冬保等编著.
—7版（修订版）. —西安：西安交通大学出版社，2005.4
ISBN 7-5605-1967-9

Ⅰ.数… Ⅱ.龚… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第025300号

书　名	数学考研典型题—2006版（数学一） 考卷分析　应试对策　全真模拟
编　著	龚冬保　魏战线　张永怀　魏立线
出版发行	西安交通大学出版社
地　址	西安市兴庆南路25号（邮编：710049）
电　话	(029)82668357　82667874（发行部） (029)82668315　82669096（总编办）
印　刷	陕西友盛印务有限责任公司
字　数	741千字
开　本	787mm×1092mm　1/16
印　张	26.375
版　次	2005年4月第7版　2005年4月第2次印刷
书　号	ISBN 7-5605-1967-9/O·223
定　价	37.20元

从 2005 年考研的数学试题谈起

（代 2006 版前言）

本书至今不觉已出到第 7 版了，用本书的“典型题”、“典型的解题方法”与每年的四套考研的数学试卷对比，两者极相似的题都在 90%左右. 这并不奇怪，原因是我们能“紧扣大纲”、认真分析历年考卷，精选典型例题，突出讲解一些重要的解题思路、方法和技巧，不少题采用多种解法，有利于训练解题的灵活性.

以下围绕 2005 年四套考卷中的典型试题，详细分析它们的解法及出题动向，以帮助考研同学做好数学的复习.

一、填空题仍强调考基本运算

2005 年填空题的运算步骤更简单，但又有几个更灵活的题，举例如下：

例 1 （数学三、四）$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1} =$ ____.

解 应填 $\underline{\quad 2\quad}$. 当 $x\to\infty$ 时，只要直接用等价无穷小替换 $\sin\dfrac{2x}{x^2+1}\sim\dfrac{2x}{x^2+1}$，便可得：

$$\lim_{x\to\infty} x\frac{\sin 2x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot 2x}{x^2+1} = 2.$$

例 2 （数学一、二）(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线为 ________.

(2) 曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线为 ________.

解 (1) 只要用除法：$\dfrac{x^2}{2x+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x^2+x-\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{2x+1}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}+o(1)$. 故，斜渐近线为：$\underline{\ y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\ }$.

(2) 注意 $x>0$，因此 $\dfrac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{x}}=x(1+\dfrac{1}{x})^{3/2}=x+\dfrac{3}{2}+o(1)$. 用的是泰勒公式. 斜渐近线为：$\underline{\ y=x+\dfrac{3}{2}\ }$.

例 3 （数学二）$x\to 0$，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 ________.

解 本题最好的方法是用泰勒公式：

当 $x\to 0$ 时，$(1+x\sin x)^{\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}x\sin x+o(x^2)=1+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$

$$\sqrt{\cos x}=[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}(1-\cos x)+o(x^2)$$

$$=1-\frac{1}{4}x^2+o(x^2).$$

故　$\beta(x)=\dfrac{3}{4}x^2+o(x^2)$. 从而填：$\underline{\ k=\dfrac{3}{4}\ }$.（以上解题方法是本书最强调的）

例 4　(1)（数学三、四）方程 $xy'+y=0$ 满足 $y(1)=2$ 的特解为________.

(2)（数学一、二）方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为____________.

解(1) 原方程即$(xy)'=0$，故 $xy=c$. 代入 $y(1)=2$，得 $c=2$. 故特解应填：$\underline{\ xy=2\ }$.

(2) 原方程即$(x^2y)'=x^2\ln x$. 由 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 得

$$x^2y=\int_1^x x^2\ln x\mathrm{d}x-\frac{1}{9}=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}.\text{故填：}\underline{\ y=\frac{x}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)\ }.$$

以上两题并未套一阶线性方程解的公式，只要微积分熟悉便可. 这是本书介绍的独特方法.

例 5　(1)（数学三、四）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量，记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$. 如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，那么 $|\boldsymbol{B}|=$____.

(2)（数学三）设行向量组$(2,1,1,1)$，$(2,1,a,a)$，$(3,2,1,a)$，$(4,3,2,1)$ 线性相关，且 $a\neq 1$. 则 $a=$____.

解(1) 只要知 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$.

故 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&6\end{vmatrix}=2$. 填：$\underline{\ 2\ }$.（本题用到矩阵分块乘法. 较灵活）.

(2) 只要计算行列式

$$\begin{vmatrix}2&1&1&1\\2&1&a&a\\3&2&1&a\\4&3&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\0&0&1&1\\1&1&1-a&0\\1&1&1&1-a\end{vmatrix}(a-1)=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\0&0&1&1\\0&1&1-a&0\\0&0&a&1-a\end{vmatrix}(a-1)$$

$$=(1-a)\begin{vmatrix}1&1\\a&1-a\end{vmatrix}=(1-a)(1-2a).$$

$a\neq 1$，故 $a=\dfrac{1}{2}$. 填 $\underline{\ \dfrac{1}{2}\ }$.

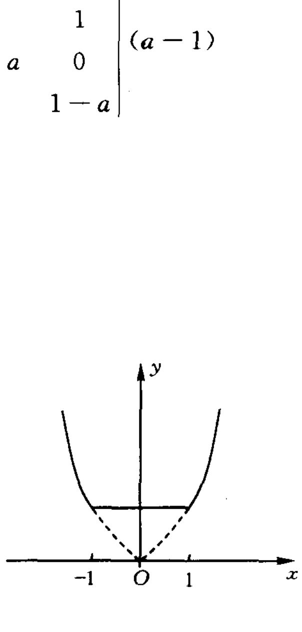
二、选择题加强了对基本概念考查

例 6　（数学一、二）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$（　）

(A) 处处可导　　(B) 恰有一个不可导点

(C) 恰有两个不可导点　　(D) 至少有三个不可导点

解　首先 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ |x|^3, & |x|>1.\end{cases}$ 在 $|x|=1$ 两点均不可导. 选(C).（用我们强调形数结合的方法，作出 $y=f(x)$ 图像，便一目了然）



例 6 图

例 7　（数学一、二）设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，则必有（　）

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

解　选(A). 本题除了选项(D) 外,(B)、(C) 均是必要而非充分条件. 排除(B)、(C)、(D) 可用同一个 $F(x) = x + \sin x + 1$,则 $f(x) = 1 + \cos x$. $f(x)$ 是周期函数,$F(x)$ 不是;$F(x)$ 是单调增函数,$f(x)$ 不是;$f(x)$ 是偶函数,$F(x)$ 是非奇非偶的函数. 因此,只有(A) 正确. 在单调性上,$F(x)$ 与 $f(x)$ 无必要或充分条件的关系. 而(A)、(B) 差别在于原函数 $F(x)$ 不是唯一的,它们之间相差一个常数,对偶函数而言加个任意常数仍是偶函数;奇函数(连续的) 只有当 $F(0) = 0$ 才对. 因此(B) 换成 $F'(x) = f(x)$ 连续,且有 $F(0) = 0$,则 $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数. 或者说,$f(x)$ 是连续的偶函数 $\Leftrightarrow$ 有且仅有一个原函数是奇函数.

如果 $f(x)$ 是周期函数,则 $F(x)$ 必为周期函数与一个线性函数的代数和. 我们将其作一个例题来证明.

例 8　设 $f(x)$ 是连续的周期函数,则其原函数必是周期函数与一个线性函数之和.

证　令 $F(x) = \varphi(x) + kx + b$,其中 $\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 有同样的周期 T. 于是

$$F'(x) = \varphi'(x) + k = f(x)$$

从而

$$\varphi(x) + kx = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + c \quad (c\text{ 是任意常数})$$

$$\varphi(x+T) + kx + kT = \int_0^{x+T} f(t)\mathrm{d}t + c$$

故

$$kT = \int_0^{x+T} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

$$k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

即

$$F(x) = \varphi(x) + \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t + b \quad (b\text{ 是任意常数})$$

于是我们知道,当且仅当 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0$ 时,以 T 为周期的连续函数 $f(x)$ 的原函数是周期函数.

通过以上讨论,对一些选项为什么不对,有无可能使其对,增加什么条件可使之正确,等等. 这样去分析一道简单的题,可使我们对有关基本概念搞得更加透彻,从而牢固掌握这些概念.

例 9　(数学三、四) 以下四个命题中,正确的是(　).

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界,则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

解　我们只要对拉格朗日中值定理熟悉. 便知选(C).

设 $x_0 \in (0,1)$ 是任一定点,则 $\forall x \in (0,1)$ 有

$$|f(x) - f(x_0)| = |f'(\xi)||x - x_0| < M \quad (M\text{ 是 } |f'(x)| \text{ 的上界})$$

于是 $|f(x)| \leqslant |f(x_0)| + |f(x) - f(x_0)| < M + f(x_0)$ 有界. 得证.

否定(A)、(B) 可令 $f(x) = \dfrac{1}{x}$,则 $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$;

否定(D) 可令 $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$,则 $f'(x) = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$. 在 $(0,1)$ 内无界.

例 10 （数学一、二、三）设λ_1,λ_2是矩阵$\boldsymbol{A}$两个不同特征值，对应特征向量分别是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$线性无关的充要条件是（ ）

(A) $\lambda_1\neq 0$ (B) $\lambda_2\neq 0$ (C) $\lambda_1=0$ (D) $\lambda_2=0$

解 $\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，而$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$. 与$\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关的充要条件明显是$\lambda_2\neq 0$. 如按定义证明

令 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2)=(c_1+c_2\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$

要$(c_1+c_2\lambda_1)$与$c_2\lambda_2$不同时为0. 若$\lambda_2=0$势必有$c_1+c_2\lambda_1=0$. 故$\lambda_2\neq 0$.

又，数学一的第(10)题是考隐函数存在定理的一个题，由于2005年的“考试大纲”新增加了这个考点便出了此题. 这提醒我们要仔细阅读“大纲”，凡是大纲规定的考试内容都可能出题. 我们在“应试对策”一章中一开始便强调这一点.

三、非客观题中综合性的题更多了

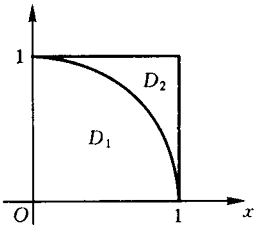
数学一、二的第(17)题是微积分中形数结合的综合题，只要一看图便知$f''(3)=0,f'(0)=2,f'(3)=-2$. 及$f(0)=0,f(3)=2$便行了.

我们先来看数学二、三、四共同考的那道二重积分题：

例 10 （数学二、三、四）计算二重积$\iint\limits_D|x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

解 1 如图，用单位圆弧$x^2+y^2=1$将D分为D_1和D_2两个域. 于是

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma\\&=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma\\&=2\cdot\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\right]-\frac{1}{3}\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$



例 10 图

请读者注意：我们的解法比“参考答案”简略多了. 即便如参考答案，也不用那样解. 请看解 2.

解 2 算D_1上积分如解 1 有$\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{8}$

$$\begin{aligned}\text{而}\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma&=\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{1/\cos\theta}r^3\mathrm{d}r+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_1^{1/\sin\theta}r^3\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{4}\left[\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^4\theta}+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^4\theta}\right]-\frac{\pi}{8}\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta-\frac{\pi}{8}\\&=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

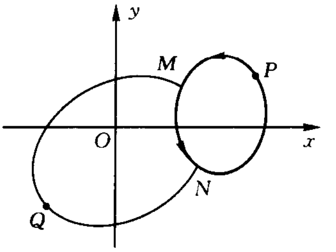
而D_2的面积为$1-\frac{\pi}{4}$.

因此所求积分$I=\frac{\pi}{8}+\frac{2}{3}-\frac{\pi}{8}-1+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$.

例 11 （数学一）设 $\varphi(y)$ 有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint_L \dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为一常数.

（Ⅰ）证明：对右半平面 $x > 0$ 内任意分段光滑简单闭曲线 C，有 $\oint_C \dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4} = 0$；

（Ⅱ）求 $\varphi(y)$.



例 11 图

解 （Ⅰ）证明很简单，如图：设 $\widehat{MNPM}$ 就是 C，则 $\oint_{\widehat{MQNM}} = \oint_{\widehat{MQNPM}}$

即得 $\oint_{\widehat{MNPM}} = 0$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知：$\dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4}$ 是全微分. 求 $\varphi(y)$ 有三种方法，我们仅讲“凑全微分”方法：

因为
$$\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4} = \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{x^2\left[2 + \left(\dfrac{y^2}{x}\right)^2\right]}$$

只要使 $\dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{x^2}$ 是 $\left(A \cdot \dfrac{y^2}{x}\right)$ 形式的全微分，即解得 $A = -1$，$\varphi(y) = -y^2$. 这时

$$\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{x^2} = -\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{y^2}{x}\right)}{2 + \left(\dfrac{y^2}{x}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y^2}{\sqrt{2}x}\right)$$

故 $\varphi(y) = -y^2$.（类似本题“凑全微分”的技巧可见本书“数学一”分册中例 2.10 之解 2）.

例 12 （数学一、二）$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导. 且 $f(0) = 0$，$f(1) = 1$，证明：

（Ⅰ）存在 $\xi \in (0,1)$ 使 $f(\xi) = 1 - \xi$；

（Ⅱ）存在两个不同的 $\eta, \zeta \in (0,1)$，使 $f'(\eta) \cdot f'(\zeta) = 1$.

解 （Ⅰ）用介值定理令 $F(x) = f(x) - (1 - x)$. 则 $f(0) = -1$，$f(1) = 1$，故存在 $\xi \in (0,1)$ 使 $F(\xi) = 0$ 即 $f(\xi) = 1 - \xi$.

（Ⅱ）在 $[0,\xi]$ 上由拉格朗日中值定理有 $\eta \in (0,\xi)$
$$f(\xi) - f(0) = \xi f'(\eta) \quad \text{即} \quad 1 - \xi = \xi f'(\eta)$$
在 $[\xi,1]$ 上，$\zeta \in (\xi,1)$ 有 $f(1) - f(\xi) = (1 - \xi)f'(\zeta)$. 即 $\xi = (1 - \xi)f'(\zeta)$.

于是有 $0 < \eta < \zeta < 1$ 使 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

例 11 和例 12 说明：一个较难考题若分成两问，前一问往往是对第二问的提示. 例 12 先用介值定理，再用拉氏定理这样的考题，是综合用这两个重要定理的新题型. 为了说明这种方法，这里再举一例.

例 13 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0) = 0$，$f(1) = 1$. 证明：存在两不同点 ξ_1、$\xi_2 \in (0,1)$，使 $\dfrac{1}{f'(\xi_1)} + \dfrac{1}{f'(\xi_2)} = 2$.

证 由介值定理知，存在 $x_0 \in (0,1)$，使 $f(x_0) = \dfrac{1}{2}$. 在 $[0,x_0]$ 上由拉氏定理知存在 $\xi_1 \in (0, x_0)$ 使
$$\frac{1}{2} = x_0 f'(\xi_1) \quad \text{或} \quad \frac{1}{f'(\xi_1)} = 2x_0$$

在$[x_0,1]$上由拉氏定理得，存在$\xi_2\in(x_0,1)$，使$\frac{1}{2}=(1-x_0)f'(\xi_2)$.

故
$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=2.$$

这个例题的一般叙述可参阅《高等数学典型题(第3版)》(龚冬保主编，西安交通大学出版社出版，2004.7) 中的3－25题(第84页).

例 14 (数学三、四) 设$f(x)$、$g(x)$在$[0,1]$上有连续导数，且$f(0)=0, f'(x)\geqslant 0, g'(x)\geqslant 0$. 证明：对任意$a\in[0,1]$有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)g(1)$$

证 1 对这一类题，一种简单方法就是用分部积分，将它们化到最简单、容易证明的形式. 即要证：

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x-f(a)g(1)\geqslant 0$$

而
$$\begin{aligned}&\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)g'(x)\mathrm{d}x+\int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x-f(a)g(1)\\&=f(a)g(a)+\int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x-f(a)g(1)\\&\geqslant f(a)\left[g(a)+\int_a^1 g'(x)\mathrm{d}x-g(1)\right]=0\end{aligned}$$

自然地便有了结果. 这里仅用到$f'(x)\geqslant 0$从而在$[a,1]$中$f(x)\geqslant f(a)$.

证 2 (一般简单作辅助函数方法，本书中有不只一道类似例题).

令 $F(a)=\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x-f(a)g(1)\quad a\in[0,1]$

$F'(a)=g(a)f'(a)-f'(a)g(1)\leqslant 0.$ 故$F(a)$在$[0,1]$单减.

只要验证：$F(1)=\int_0^1 g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x-f(1)g(1)=0$

结果是明显的，因此命题获证.

例 15 (数学一、二) 已知三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的第一行(a,b,c)是非零向量，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$($k$是常数). 且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解.

解 由已知知，$1\leqslant r(\boldsymbol{A})<3$. 又$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，$r(\boldsymbol{B})=\begin{cases}1, & 当 k=9\\2, & 当 k\neq 9\end{cases}$. 当$\boldsymbol{B}$的秩为2时，$\boldsymbol{A}$的秩只能是1. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系应有两个线性无关的解. 自然是$\boldsymbol{B}$的两列：$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}$.

从而通解是$c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2$.

若$k=9$，$r(\boldsymbol{B})=1$，则$\boldsymbol{A}$的秩有可能是1和2. $r(\boldsymbol{A})=1$时，方程组等价于$ax_1+bx_2+cx_3=0$. 由于a、b、c不全为零，不妨设$c\neq 0$，则$\bar{\boldsymbol{\eta}}_1=(c,0,-a)^{\mathrm{T}}$，$\bar{\boldsymbol{\eta}}_2=(0,c,-b)^{\mathrm{T}}$是基础解系. 从而通解是$c_1\bar{\boldsymbol{\eta}}_1+c_2\bar{\boldsymbol{\eta}}_2$. 若$r(\boldsymbol{A})=2$. 则$\boldsymbol{\eta}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$是基础解系. 通解为$c\boldsymbol{\eta}_1$.

本题是个较中等的综合题. 综合了矩阵的秩的性质及非齐次方程解的结构等重要考点，算得上是个“好题”.

数学四的第(21)题既与其第(5)题有共同考点,又与2001年数学一的一道题相似,我们简单解它一下.

例16 (数学四)设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的三维列向量.且满足 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{B}$.

(Ⅱ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(Ⅲ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

解 (Ⅰ) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}.$$

故
$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}.$$

这与第(5)题属同一考点.

(Ⅱ) 记 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CBC}^{-1}$.即 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$.故只求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值:

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+4)=(\lambda-1)^2(\lambda-4).$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为1、1、4.

(Ⅲ) 以 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 代入方程是 $x_1+x_2+2x_3=0$,解得特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 及 $\boldsymbol{\xi}_2=(0,2,-1)^{\mathrm{T}}$. $\lambda_3=4$ 代入得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_3=(0,1,1)$. 即 $(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$. 从而 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

注 视 $\boldsymbol{A}$ 为在基 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 下线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵,那么 $\boldsymbol{B}$ 就是这同一线性变换在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵.因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同,故 $\boldsymbol{A}$ 的对角矩阵与 $\boldsymbol{B}$ 的对角矩阵相同.

限于篇幅,就不一一赘述了.总之,我们再一次强调,在学会"考卷分析"、把握"应试对策"的基础上,把书中例题当习题边作边看,尤其要注意旁注中的提示,对典型的、基本的解题方法与技巧练熟练透,就一定能在考试中取得理想的成绩.

龚冬保

2005.早春二月

(龚冬保教授关于2001年~2004年考研试卷的精辟分析,请参阅本书的附录——编者注)

目　录

第 1 章

考卷分析

本章主要对过去的一些典型试题作了深入的分析又对 2003、2004 年以及 2005 年的数学一考卷共 3 份以表格形式作了定量分析，以使考研同学较深入了解考研试卷的主要特征.

1.1 分析的必要性

为什么要分析已考过的试卷?不少考生甚至觉得刚考过的题肯定不会再考了，对分析已考过试卷的必要性持怀疑态度，因此，我们先简单说一下分析的必要性.

考试是一种心理测量，一份考卷好比一杆“秤”. 比如您上集市买菜，总要先看看秤一样，您准备考研究生，就得先分析考卷，看看在考试内容、考试难度、考题份量、认知和能力层次等等在每份考卷中是如何体现的，摸一摸近几年考卷的底，然后再制订适合自己的应试策略，从而减少复习迎考的盲目性.

对于考研试卷分析的方法，我们分为“微观分析”和“宏观分析”两种. 首先作“微观分析”，就是对试卷中每道试题都要认真作，边作边分析这道题的考点，解这个题的思路及主要方法是什么，这一类题在考研中的地位等等. 在“微观分析”的基础上进一步作“宏观分析”，我们的做法是，给每份试卷有一个表格，将这份试卷中的每道题的属性用数量表示在相应的空格之中，一份试卷一张表，只要看到表格中的数据，不必看具体的试卷本身，就可以了解这份试卷的考点分布、题型结构及整卷难度等等.

分析好，大有益. 我们在本书中对近三年试卷的分析，不仅仅是将分析结果告诉读者，更重要是希望读者学会本书介绍的分析方法，结合自己的实际，针对性更强地去独立分析自己准备投考的那一类考卷. 以便作到对数学考研“心中有数”.

1.2 微观分析举例

例 1.1 我们试比较 2004 年工学和经济学的两道相似的试题：

(1) (2004, Ⅰ、Ⅱ) 设 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使( ).

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 单调增. (B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 单调减.

(C) 对 $\forall x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$. (D) $\forall x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(2) (2004,Ⅲ、Ⅳ)　设 $f'(x)$ 在$[a,b]$连续,且 $f'(a)>0, f'(b)<0$,则下列结论中错误的是(　).

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)=0$.

解　选(C) 由 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$,知存在 $\delta>0$,当 $0<x<\delta$ 有 $f(x)-f(0)>0$. 故(C) 正确.

(2) 选(D),(A)(B) 的正确性即是(1) 之选项(C). 至少(C) 的正确性可用连续函数的介值定理;故只有(D) 的结论是不对的,故选(D).

比较这两道题(1) 中仅有一点的导数 $f'(0)>0$ 的假设;(2) 中设 $f'(x)$ 在$[a,b]$上连续,而(2) 中的选项(A),(B) 均可用到(1) 的概念,即只要对导数概念清楚就行了. 在(1) 中若假设 $f'(x)$ 在 0 点连续,那么选项(A) 也是对的. 证明是这样. 由 $f'(x)$ 连续,且 $f'(x)>0$ 故存在 $\delta>0$,在$(0,\delta)$ 上 $f'(x)>0$,因此 $f(x)$ 在$(0,\delta)$ 上单调增. 因此(2) 的假设太强:用 $f'(x)$ 的连续性由 $f'(a)>0$ 知存在 $\delta_1>0$,在$(a,a+\delta_1)$ 上 $f(x)$ 单增. 当然有 $f(x_0)>f(a)$;由 $f'(b)<0$ 知存在 $\delta_2>0$,在$(b-\delta_2,b)$ 上 $f'(x)<0$,$f(x)$ 单调减,有 $f(x_0)>f(b)$ 十分简单. 因此(1) 题要难些,且选项(A) 有迷惑性,作这样的题要求概念清楚,并直接证明(C) 的正确性;而(2) 较简单,用排除法较好因为(A)、(B)(C) 是正确的结论太好证明了.

顺便指出如将(2) 题的假设改成 $f'(x)$ 在$[a,b]$上存在. 其它不变那么选项(A)、(B)、(C) 中结论的正确性正是本书例 4.34(达布中值定理) 的证(1). 读者不妨查读一下,是完全一样的.

至于(2) 的选项(D) 的结论未必正确可以看一个很简单的例子:设 $f(x)=2-x^2$. 在$[-1,1]$上,$f'(-1)=2>0$,$f'(1)=-2<0$,但在$[-1,1]$上 $f(x)\geqslant 1>0$,不存在 0 点.

在考场上作这两个题用不了几行,但剖析起来,尤其是对照剖析,使我们对极限、导数及连续性、单调性都有更深刻的领会,甚至变化一下(2) 题,还可引领到"达布中值定理"这就是举一反三,触类旁通的意思,只限于会不会做这两道题去做题,就不会有多大的收获. 这是我们说的微观分析的方法.

例 1.2　(2001,Ⅰ)　设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导的充要条件是

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\sin h)$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

解　选(B). 本题是概念性较强的题. 只要对导数的定义有透彻理解,就能容易用排除法排除不正确选项. 如,由定义知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$. 而选项(A)、(C) 中,相当于 x 的因式是 h^2,只能取正数趋于 0,不能作导数存在充要条件;而选项(D) 中的极限存在与 $f(0)$ 的取值无关. 也不能作可导充要条件. 因而只有(B) 是正确的选项. 不必举反例,也不要会证明选项(B) 的正确性.

作为平时的练习,深入分析本题,则可以有许多启发. 首先,我们来举反例否定三个不正确选项. 对(A)、(C),可用同一反例:$f(x)=|x|$,满足 $f(0)=0$,且$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\dfrac{1}{2}$ 存在及 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=0$ 存在,但 $f(x)$ 在 0 点不可导,说明(A)、(C) 选项均不对;对于(D),令

$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 也有 $f(0)=0$，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=0$ 存在，而 $f(x)$ 在 0 点间断，故不可导. 因此(D)也被排除. 仿此，读者还可自己举出与上面不同的反例. 顺便提及，本书的第 4 章之例 4.3、4.4、4.5 及其注释，与本题的考点及分析问题方法以及在那里我们列举的反例，均与本题是一致的. 由于导数概念的重要性，此书的每一版都保留了这几个题. 读者可对比着看，以加深对导数概念及其存在的充分条件. 必要条件及充要条件的理解.

其次，我们来证明选项(B)的正确性.

必要性. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{1-e^h}\cdot\dfrac{1-e^h}{h}=-f'(0)$ 存在.

充分性. 对任意 $x\to 0$，取 $|x|<1$，令 $1-e^h=x$. 或 $h=\ln(1-x)$. 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(1-x)}$. 于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$ 存在即 $f'(0)$ 存在.

细心的读者会问　由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{1-\cos h}{h^2}$ 令 $1-\cos h=x$，则 $x\to 0$. 不是也有 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{2}$ 存在吗. 不是同样证明了选项(A)也是正确的吗?! 问题在哪里?! 原来，令 $1-\cos h=x$，由 $h\to 0$，只能有 $x\to 0^+$. 因此，我们知道，选项(A)是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右导数存在的充要条件，因此，我们举反例只要举 $f(x)$ 在 $x=0$ 点右导数存在而导数不存在的例子；进一步看选项(C)，我们知道当 $h\to 0$ 时，$h-\sin h$ 是与 h^3 同阶的无穷小，因而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}\cdot\dfrac{h-\sin h}{h^2}$. 只要当 $h\to 0$ 时，$h\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}$ 的极限存在. $f'(0)$ 可以是无穷大量. 于是令 $f(x)=x^{2/3}$. 显然 $f(0)=0$，$f'(0)=\infty$ 不存在. 但 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h-\sin h)^{2/3}}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{h-\sin h}{h^3}\right)^{2/3}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{2/3}$ 存在.

至于选项(D)，如果我们令 $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是有理数}\\ 1, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$，那么，总有 $f(0)=0$，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=0$ 存在，但 $f(x)$ 处处间断!

像这样去分析一道题，必定能作到举一反三、触类旁通，做一个题胜似做一类题.

例 1.3　(2002，Ⅰ)　设 $u_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ (　　)

(A) 发散　(B) 绝对收敛　(C) 条件收敛　(D) 收敛性由所给条件不能判定.

解　选(C). 本题值得分析之处在于不少考生以为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ 是交错级数，且 $\dfrac{1}{u_n}$ 与 $\dfrac{1}{n}$ 是等价无穷小，由莱布尼茨判别法它收敛，如加绝对值则发散. 故选(C). 这是不对的，理由是设 $a_n=\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}$，由已知条件，无法证明 a_n 单调减. 而用莱布尼茨法则这一条是不可少的. 沿这个思路去想这个题，反倒是学习好的学生会选(D)，因为他无法证明 a_n 的单调性.

其实要证明此级数收敛，应当用部分和：

$$S_n=\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}\right)-\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right)+\left(\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}\right)\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_n}+\frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}}=\frac{1}{u_1}+\frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{u_1}$存在,从而级数收敛,且其和为$\dfrac{1}{u_1}$.

因此,此题如改成下面两种题更好.

其一,仍是选择题,只要改为“设$u_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{u_n}$(　　)”仍为原题的4个选项.那么正确答案是(D),而不是(C).

为了排除选项(C),我们可令$\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\ln(n+3)}$,则有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$,但

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+3)},$$

前一个和式收敛,后一个和式发散,故发散.这样一改对学习好的学生有利.而且选项(C)有迷惑性.

其二,“设$u_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$,证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$条件收敛,并求其和.

改为这样的非客观题,应当是较有水平的一道好题.

顺便指出,2002年数学一这个题本身很好,但出成选择题不好;而2002年数学三的选择题二(2)小题则是一道出错了的题,即4个选项无一是对的.关于这两道题的详细分析可参看本书的附录B.

例1.4　(2002,Ⅱ)　已知$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为3阶矩阵,且$2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$.

(1)证明:$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$可逆;

(2)若$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,求$\boldsymbol{A}$.

解　(1)由于逆矩阵来源于矩阵乘法的逆运算.故求逆矩阵的一种方法是:求$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$的逆矩阵,便设法去分解$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$的因式,于是由$2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$,在等式两端左乘矩阵$\boldsymbol{A}$,并移项整理得

$$\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$$

得
$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}-4(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E}.$$

从而
$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})=8\boldsymbol{E},\ (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}).$$

(2)由$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}$.

$$\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

用分块矩阵求逆得

$$8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}-2&2&0\\-1&-3&0\\0&0&-4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

分析　此题使我们想到2000年数学二的一道填空题: