科學圖書大庫

理論力學

譯者　王育璋 劉格成

146

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

理論力學

譯者　王育璋 劉格成

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月七日三版

理論力學

基本定價 3.40

譯者 王育璋 劉格成

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 財團法人臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話7813686號 7815250號
發行者 財團法人臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第15795號
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

前　言

本書之編著原供大專物理數學科系作教本之用，在加州大學三四年級採用時其內容包含全年每週三小時課程之教材，並根據作者意見再予精選，以更適合於對力學研究之一般介紹，故學者對微積分與大學物理之基本課程必須先有相當基礎。

各篇之範圍多僅限於基本概念方面，且更易於將引申之方法與步驟予以表明者，在若干部分儘量將向量方法與分析處理並列說明，如此不僅可引起對研討主題之興趣，且使學者對力學問題有更牢靠之認識，同時對向量方法之熟悉運用亦可對高等力學研究作一準備。

作者願對一般學者灌輸之概念乃說明數學方程式之意義係表達一物理關係，而並非僅依既定之原理原則作數學符號之演算，對方程式內之每一項均應審慎研討，然後對其所表示之物理量才能有充分瞭解，在某些表達之型式中，諸如簡諧運動等，且以幾何關係將所表明之量作更具體化之說明，此一觀點在主題之研究上更爲重要。

在力學方面之研討，一般咸認爲其目的係如何表明某些概念與原理，由此可見各主題之基本認識均爲此後研究過程不可或少，學者必須確切肯定對此探討之程序或原理有全然之瞭解，尤其重要者，對某一特定原理引申時其既定之限制條件亦不可忽視，同時注意一基本方程式在一關係結構式中可能全部適用，但亦可能僅部分適用。因此對原理原則之一致運用亦極重要，作者願提供一意見即在運用各原理原則時情願先具保留態度，審慎觀察之。

學者研究此課程之目的，乃養成有對問題分析之思考，已具備之知識固然有用，但如何運用之以獲得新知識之方法與程式更爲有效之工具，一般所謂自然思考之方式，乃是依經驗而來，此種方式實際上是一種試誤之方式，雖然廣泛被運用但甚難在問題研討上獲致進展，故而如何養成對問題有分析性之思考，需要相當智力上之持續性。

所幸仍有對此分析有助益之方法，在本書中對每一問題均作實用上之提示與具體之程序說明，對學者而言，均有助於達成此養成思考之目標。

在習題之演算過程中亦可獲得若干思考訓練之進展，求得一問題之答案並非重要，更重要者乃分析如何求得此答案，故而對每一命題應先作一般觀點之了解，然後列出如何着手之計劃，當此擬定計劃有可能時再逐步進入細節，學者試行之可見其效。但有時受時間因素限制不克按部就班作全盤之分析研討，此時學者如自認確有把握可充分瞭解其過程，則甚至演算細節亦可省略之。

目　錄

第一章　速　度

1-1.參考體系一　當說明一物體之位置或運動時，必先選擇一明確之參考體系，倘無此一參考體系之確定，則欲指明一物體究竟位於何處以及如何進行其運動幾無可能，可知位置與運動均有其相對性。一物體被視為靜止抑或在運動中完全由所取之參考體系而定，嚴格說來甚難斷言一物體為實在之靜止，例如我們可說電車上一位乘客是處於靜止狀態，但當電車行進時此乘客對地而言並非靜止，倘再考慮及地球本身之運動，則即使當電車停止之際，此說亦有待斟酌，顯然對太陽而言，此人並非處於靜止狀態，因為地球在空間中正以大約每秒十八哩之速率對太陽作相對之運轉，因此只有當某一物體所在之坐標對於所選定之參考體系全然不變時才有被稱為絕對靜止之可能。

在說明一物體之運動及此運動所循之路線（Path），我們可任選一參考坐標（Frame of reference），唯在限定此參考坐標之確實位置應予注意，依前例而言，設所研究發生之事態僅限於電車之內而不考慮外界之影響時，則凡確定在電車之上之任一參考坐標均可適用，然而倘欲說明一對於地面之運動，則所取之參考坐標必須定位於地面。最主要之條件乃此一參考體系所寄附之物體應為不可移動者，或其運動既非所考慮之事態之一部分又對其無影響者。在本書內亦有採用移動坐標系之實例，此一移動坐標系在機械意識上與靜止參考體系全無二致，兩者均由一組三彼此直交之坐標軸表示且使用相同之英文字母之符號，唯在名稱之定義上有其根本之不同。

1-2.　標準參考體系一　標準參考體系可利用以空間表示之任一體系，選用直角坐標、球坐標以至極坐標均無不可，最常用者仍為直角坐標，在若干情形下則極坐標常更易於表示。試用不同之坐標表示法以及練習由此一體系轉換為另一體系甚有助於學者之瞭解，以後尚有類此之說明。由此亦可發現某一事態以此一體系可清晰表明者而換用他一體系則模糊費解。

本書中所通用之符號，一部分在附圖中表示之（圖1），三彼此成直交之軸 OX，OY，OZ，以 O 為原點，所有正向距離均由原點沿坐標軸平行方向

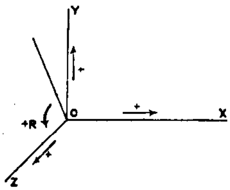

圖1.

計量之。以X軸而轉動之直線，若在YZ面或平行於YZ之平面內由OY轉向OZ則屬正值，如附圖中矢號R所示；在Y軸上則在ZX面內由OZ轉向OX爲正，此亦可用另一方式說明：設在X軸上切標準右旋螺紋並將螺母套上，凡使螺母沿OX之直線方向前進之轉動卽爲正向轉動。

1-3. 點之運動一 今有質點P沿一定之路線AB移動（圖2），設由P量至A之距離爲坐標s，並命由A向B之方向爲正，在每一瞬間時間內P在時間t_1之位置爲s_1，於時間t_2之位置爲s_2，則比率$(s_2-s_1)/(t_2-t_1)$卽代表在此一段時間或空間內之平均速率。

但此距離與時間之比率所示之平均速率値在任一特定事例中所表達之意義有限，因所欲探求者往往爲該質點運動之形態細節而並非僅在選定之一段

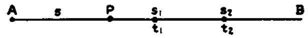

圖2。

時間內之平均速率情況。

一質點之速率可能繼續在改變中，此一事實在決定若干連續而極短之時間距內平均速率更可確定，所取時間距愈短則對該質點運動之說明愈爲完整，瞬間速率（Instantaneous speed）之概念卽因此產生，其定義有如下述：設在某一時間距Δt內，此質點通過一距離Δs，如令Δt之値趨近於零時，則此比率$\Delta s/\Delta t$亦趨近於一極限値，依微積分式可寫作：

$$\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\doteq 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ds/dt卽爲此平均速率在無窮小之時間距內之極限値，亦可稱爲在此一定位置之瞬間速率，由坐標或時刻之値定之。

在既定之情況下亦可將坐標s表示爲時間之已知函數，再將此函數對時間t微分所得之方程式卽表示其瞬間速率，亦爲時間t之函數。若再就坐標與時間關係及速率與時間關係消去時間之因數，則又可得此瞬間速率爲坐標函數之方程式，因此瞬間速率分別由時間及坐標所表明之關係對於一質點運

動之說明當更爲詳盡。

前前述 ds/dt 之代數符號全視 ds 之符號而定，因 dt 之值恒爲正值。倘 ds 所示者爲路線在正向中進行距離之增加，則 ds 爲正，若 ds 表示者爲路線在負向中之位移，則 ds 爲負。故質點 P 在正向之移動其 ds/dt 值爲正，原點位置之選擇對速率之值並無影響，唯其位置必須確定，速率值可爲常數亦可爲變數，若速率爲常數，則 ds/dt 之大小與正負號在此考慮中之一段時間內應爲不變，運動方向則不然，此方向儘可改變而速率仍可爲常值。

速率之單位則根據表示距離與時間所選取之單位而定，距離常以公分、呎或英里表之，時間則多以秒或小時表之。

1-4. 速率之測定－ 一物體或質點沿一固定路線之運動多可以時間及距離表示，例如一物體在眞空中由靜止而下落，在短距離內可由 $s=\frac{1}{2}at^2$ 之簡單關係說明，式中 s 表距離，a 爲一常數（加速度），t 則表時間。速率之一般表示則可由該式對 t 之導式求得，即 $ds/dt=at$，若常數 a 爲已知，速率 $V=ds/dt$ 之值在任一瞬間內可由相當之 t 值代入式中求得。因速率 V 爲時間 t 之函數，V 既然經常改變故 V 之值應爲瞬間值。

但有時一速率不可能由簡單之時間關係求得，設若此一物體運動之距離時間關係可由各相對值繪出時，速率之瞬間值倘可用圖解法求得，此時，在曲線上某一點之正切斜度可由圖上量出，該正切斜度之值卽表所求之速率。

在圖 3 中設 P_1 與 P_2 爲曲線上之二點，分別代表瞬間 t_1 與 t_2 及距離 s_1 與 s_2 之相對關係，並設二點極爲靠近，則 s_2-s_1 可寫作 Δs，t_2-t_1 可寫作 Δt，顯然，直線 P_1P_2 與時間軸夾角之正切卽應爲速率 $\Delta s/\Delta t$，此角正切之大小由 $\Delta s/\Delta t$ 示之，令 P_2 趨近於 P_1，則 P_1P_2 卽成爲該曲線在點 P_1 上

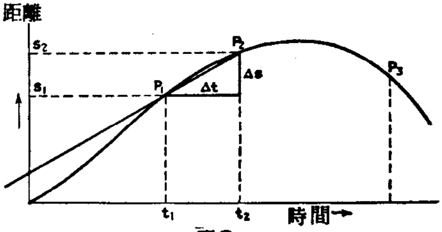

圖3.

之正切，因此，該物體或動點在一定值之時間 t 之速率即可用一距離時間曲線上相當時間之某點正切斜度求解。倘欲知此速率之方向，只須觀察此坐標 s 在所取時間定點上為增大或減小，如圖所示，s 在 t_1 時之值為增，故速率為正，他如點 P_3，其速率則為負。

習題：

1. 根據選定之 a 值，將曲線 $s=\frac{1}{2}at^2$ 繪成圖線，並用圖解法及分析法求出相當之速率時間曲線。
2. 設一物體之移動可用時間之正弦函數表示，試問其相當之速率曲線應為何？

1-5. 速度（向量） — 速度之含義包括速率之全部含義，並加以方向之因素，故速度為一有向之數量，換言之即一有大小及方向之數量，此一數量乃典型之向量，凡須對方向及大小兩者均予考慮而說明之數量亦為向量之一，諸如力、動量、加速度與力矩均是。凡此數量常可由一獨特之方式表示之，通稱為圖解法，且為便於研討起見乃有所謂向量分析之學，此等表現方法與運用對任一向量均相同，唯對求得結果之物理解釋應由所取向量之不同而定，向量分析之若干通用法則多可用速度向量說明之。

當一質點沿一直線進行時，其速度可用一平行於此直線之向量表示，此種表示法之通則（Convention）可舉實例說明，設某質點在一水平線上以每秒60 公分之速率向東運行，其速率之大小由向量之長度表示，故須先取定一適當之比例尺，在此例中設令沿向量每一公分之長度代表每秒15公分之速率，則向量 AB（圖4）應有 4 公分長以表示每秒60 公分之速率。AB 之方向與該速度方向平行（可依一般地理方向表示法之通則）。

若此質點沿一曲線之路線進行，則表示曲線上一定點之速度之向量係與通過該點之切線相平行。

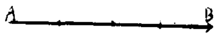

圖4.

速度僅在其包含之二因素均為常數時可為常值，此謂速度為常值者，其運動必為沿不變之方向以不變之速率進行，一質點在一直線上以每小時20 英里之速率前進，則速度為常數。一質點沿一圓之圓周進行時，其速率儘可不變但其速度並非常數。

1-6. 角速度 — 運動通常可分為兩種，一為移動，一為轉動。在純

位移式運動（Pure translational motion）中，凡固定於該物體之任一線在全部運動過程內始終保持與其原始位置相平行，在純旋轉式運動（Pure rotational motion）中，則該物體內之任一點除在轉動軸上而外其路線均為諸圓之圓周。移動有其位移與速度，在轉動則為角位移與角速度，轉動之角度即相當於移動之直線坐標，一點在一直線上之位置在於其與同一線上某參考點之線距離，同理，在轉動時一直線之位置在於其就某參考位置轉動所成之角度。

角度通常雖多用度數表示，但在研究某一轉動物體時，採用另一單位常較便利，此單位稱之為弧度，所謂弧度乃取圓周上與半徑等長之弧，其所對之角為一弧度。某一角度 γ（如圖5）之值若以弧度為單位則可由 $\gamma = s/r$ 之簡式表示之，式中 s 為該 γ 角兩邊所夾之弧長，r 為圓弧之半徑，因此，若 $s = r$，γ 角之值即為一弧度，若上述關係改寫為：

$$s = r\gamma \tag{1-1}$$

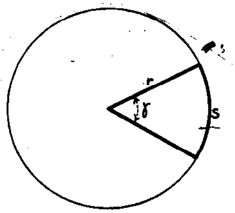

圖5.

則此弧長之計算甚有助於圓周路線上之線位移與相當之角位移之換算。

確定一直線位置之角度可求其時間導數而得該線之角速率。當再考慮及其方向時，此合成之數量即成為角速度，通常角速度由沿轉動軸繪出之向量表示，依固定比例此向量之長度即表示角速率，向量之指向（Sense）表示轉動之方向一如前面1-2節所述之通則。

若將方程式（1-1）對時間微分，並設 r 為常數，可得

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\gamma}{dt}$$

或常寫做

$$V = r\omega \tag{1-2}$$

式中符號 V 代 $\dfrac{ds}{dt}$，ω 表角速率 $\dfrac{d\gamma}{dt}$，此式可表明一點在一半徑為 r 之圓周上之線速率但以角速率為單位。

1-7. 向量之和 — 在數學上及代數上求和之運算常有具方向之數量

或有正負不同之值，在求向量和之運算上亦爲此一概念之引申，玆舉例說明，設有一人操舟渡河，此人在靜止之河面可依一定之速率划槳，但在此例中所欲知者該人實際運動之情形一對固定於地面之一參考體系而言其路線與速率如何，此時其速度爲由兩速度合成者（向量和），此兩速度之向量和方爲所求之速度。

在圖 6 中如以 AB 表此人對於河水之速度，乃屬一移動體系；AD 表水流對於固定在地面之參考體系之速度，則 AC 所示爲此人對於此固定參考體系之速度，如選用一定之比例令 1 公分表每小時 1 英里之速率，則此分別以 AB 及 AD 爲邊所繪成四邊形之對角線 AC 即爲所求之速度。

圖 6.

將二個以上之向量相加之方法有如繪一折線，每一線段分別表示各該向量（依某一定之比例）。諸向量之和則爲一可將此折線圍成一封閉多邊形之直線，此直線之方向由折線之起點向外。在圖 7 中，A、B、C、D 爲欲相

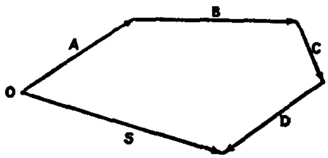

圖 7.

加之諸向量，s 即表示向量和，若以符號表示則爲 $s = A + B + C + D$，注意在圖解中所指示 s 之方向，諸向量之先後次序對最後所得向量和並無關係，此點若有疑問，學者可任用不同之次序相加，以作比較。

1-8. 向量之成分 — 凡二個以上之向量其和等於一已知向量時，此諸向量稱爲該已知向量之分向量或成分（Component），例如在圖 7 中向量 s 表示諸向量 A、B、C、及 D 之和，A、B、C、及 D 即爲 s 之成分。在圖 6 中 AD 及 AB 各爲 AC 之成分。

求一已知向量之諸成分之方法，通稱爲向量之分解或還原。

將一已知向量分解爲分向量之數目可任意取決，就某一特例中幾何形態之觀察當可決定所需分向量之數目以及所取分向量之方向，後者更爲重要。在諸向量均屬同面系（Coplanar）之問題中，一向量應分解爲與一組參考

坐標軸相平行之二分量爲宜，在包含立體坐標之問題中，則常須將一向量分解爲三彼此正交而各與參考坐標軸平行之分向量。

一向量爲已知時，其在任一方向之分向量之大小爲定值，並由已知向量之大小及已知向量與該分向量間之夾角而定。

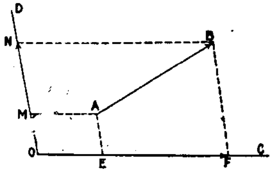

圖8.

用圖解法求一向量在兩已知線方向之一組分向量之大小，乃由此已知向量之兩端點分別沿已知線方向繪兩組平行之輔助線，此兩組平行之輔助線在二已知線上之截線卽爲所求之分向量，所得分向量之方向應使其和等於原已知向量。例如求已知向量AB在平行於直線OC及OD之兩分向量（圖8），輔助線AE及BF各通過已知向量之兩端並與OD平行，則在OC上之截線EF卽爲平行於OC之一分向量，EF之方向如圖中矢號所示，他一平行於OD之分向量MN亦用同法求得之。

一已知向量之二分向量若彼此不在相正交之直線上時，其大小之三角法表示式可由正弦定律得之，已知向量C（圖9）及欲取分向量方向之直線OM及ON，若向量C與ON及OM之夾角各爲α及β，則沿OM方向分向量A之大小可用下式表之

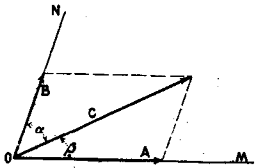

圖9.

$$A=\frac{C\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \tag{1-3}$$

但因$\sin[\pi-(\alpha+\beta)]=\sin(\alpha+\beta)$，故沿$ON$方向分向量$B$之大小爲

$$B=\frac{C\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \tag{1-4}$$

通常一組互相垂直之分向量（正交分向量）在使用上較成斜角之分向量爲便利，在多數情況下，問題之性質僅在求一定方向之分向量，除非另有規定外，所求之分向量均假設爲正交分向量之一。

例如在一物體沿斜面滑下之運動中，所需求知者只是該物體重量在平行於斜面方向之分向量，設PL（圖10）爲此一斜面，AB表示物體之重量，求AB沿平行於PL方向之分向量，可通過A平行於PL繪一直線，並由B

繪一垂直線與平行於PL之直線交於C，則線段AC即為所求。若α為此面之斜角，則AB之值亦可用下式表明

$$AC = AB \sin \alpha$$

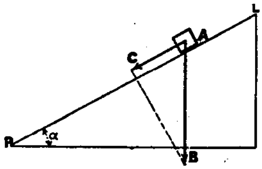

圖10.

在此例中另一分向量必垂直於AC，其值亦便於求得，此一分向量雖並無需要但亦並不能否定其存在。

研究向量之分向量而取代一向量之本身，其便利之處可由討論作用於一剷草機上力之分力而說明，加於剷草機柄上之推力實際有二作用，一為使剷草機沿地面向前推進，另一為加壓於剷草機以增加其與地面之摩擦並減少機輪滑失之可能，此處二分力乃相互垂直，一與地面平行，一與地表垂直，將所施之力依分解方法成為二分力，方可得出其各別之作用。根據此分析之結果，每一分力之效應亦可以所施主力之關係表示之，每一分力之大小乃以主力之大小乘以主力方向與所需分力方向間夾角之餘弦，在圖11中，P表所施之力，H與V各為水平向與垂直向之分力，可得

$$H = P \cos \alpha$$

及

$$V = P \cos \beta = P \sin \alpha \tag{1-5}$$

1-9. 分速度 — 已知一速度V，現欲將此向量分別用三不同坐標系中各沿其坐標軸方向之分速度表明，並求出該速率及速度之方向代以分速度之分析關係。茲選用之三坐標系各為直角坐標、球坐標及極坐標

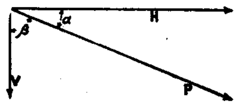

圖11.

a. 直角坐標系— 設速度V與X—，Y—及Z—軸間成夾角α，β及γ（圖12），則

$$V_x = V \cos \alpha, \quad V_y = V \cos \beta, \quad V_z = V \cos \gamma \tag{1-6}$$

式中V_x，V_y及V_z各為V在平行於X，Y，及Z軸方向上之分速度。

欲將V之值代以其分速度之值，可將（1-6）式平方相加，而得下列方程式

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \tag{1-7}$$

V 之方向可由（1-6）式求得，或依下列二式中之任一式

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{V_y^2 + V_z^2}}{V_x} \qquad \tan\beta = \frac{\sqrt{V_z^2 + V_x^2}}{V_y} \qquad \tan\gamma = \frac{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}{V_z} \tag{1-8}$$

若 V 位於 XY 面內，則 $\gamma = 90°$ $V_z = 0$，

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 \qquad \tan\alpha = \frac{V_y}{V_x}$$

以上各式所討論者均爲就正交投影而言，

再求諸坐標值之時間導數與分速度間之一般關係，令 S（圖 13）爲一與已知速度 V 成 δ 角之直線，V 爲一質點在 Q 之速度，則 V 在 S 線上之分速度 V_s 可由下列關係表示

$$V_s = V\cos\delta$$

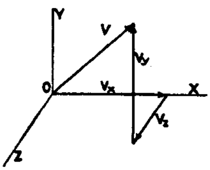

圖12.

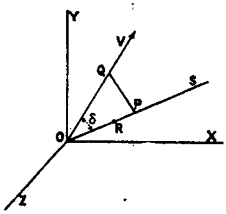

圖13.

V_s 同時亦可用 V_x，V_y，及 V_z 分別表示，其法乃求 V_x，V_y 及 V_z 各在 S 線上投影之和，或寫作

$$V_s = V_x\cos\alpha' + V_y\cos\beta' + V_z\cos\gamma' \tag{1-9}$$

其中 $\alpha'\beta'$ 及 γ' 爲直線 S 之方向角。

令 P 爲 Q 在直線 S 上之投影（求一點在一已知直線上之投影乃經過該點

作輔助線使與已知直線正交，兩線之交點即爲所求該點之投影），並命S（圖上爲RP）爲P與S線上任一點R（x_0，y_0，z_0）間之距離，P點之坐標爲x，y及z，則距離s可由R及P之坐標與S之方向角示之

$$s=(x-x_0)\cos\alpha'+(y-y_0)\cos\beta'+(z-z_0)\cos\gamma' \tag{1-10}$$

s之時間導數爲ds/dt，此導數之值可將（1-10）式之右方微分而求得，若ds/dt與（1-9）式中V_s之值相等，則x_0，y_0，z_0，$\cos\alpha'$，$\cos\beta'$及$\cos\gamma'$之導數必均爲零，爲使此六導數均爲零，R與直線S必須在XYZ軸系內保持靜止，倘R點沿直線S移動或直線S在參考系內改變其位置，則任一運動必引入一移動坐標系，因此除非S一系固定在XYZ軸系內，表示P與直線S上R點相對速度之ds/dt值不可能與V在直線S上之分速度V_s相等。

b. 球面坐標一　在球坐標系內所運用者爲三坐標：一半徑及兩角度，表示坐標之符號各爲γ，φ及θ，三者各自一定點，一參考線及一參考面度量，爲便於說明此定點、參考線與面之相關位置，可將之置於一標準直角坐標系內，令XYZ爲此直角坐標系並以O爲原點（圖14），P爲任一點其直角坐標位置爲x，y，z，球面坐標位置爲γ，φ，θ。

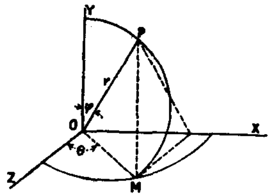

圖14.

球面坐標原點亦取於O，該點並爲一半徑爲r之球心，因此P點適位於球面上，P點在球坐標系之直線坐標乃該點與參考點O間之距離，第二坐標φ則爲半徑γ與亦屬於球半徑之一參考線間之夾角（此參考線既可任選，故令之與OY軸重合），第三坐標θ爲包含OY軸與半徑γ之面與另一參考面間之夾角，此參考面令與YZ面重合。

兩組坐標之關係可寫做

$$x=\gamma\sin\varphi\sin\theta \qquad \gamma^2=x^2+y^2+z^2$$

$$y=\gamma\cos\varphi \quad (1\text{-}11) \qquad \cos\varphi'=y\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (1\text{-}12)$$

$$z=\gamma\sin\varphi\cos\theta \qquad \sin\theta=x\,(x^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

將XYZ軸系中之分速度V_x, V_y, V_z分別用球面坐標系諸變數表示法可將（1-11）式對時間求微分而得，以$\dot{\varphi}$代$d\varphi/dt$，$\dot{\theta}$代$d\theta/dt$，可得下式：

$$V_x=\frac{d\gamma}{dt}\sin\varphi\sin\theta+\gamma\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta+\gamma\dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta$$

$$V_y=\frac{d\gamma}{dt}\cos\varphi-\gamma\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$V_z=\frac{d\gamma}{dt}\sin\varphi\cos\theta+\gamma\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\theta-\gamma\dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta$$

各式之右方分別爲三球坐標系分速度在X，Y，Z軸上投影之和，試看第一式以分辨各球坐標系分速度之大小與方向，

第一項中之$d\gamma/dt$爲在直線γ上之分速度，因在V_x之方程式中$d\gamma/dt$之係數$\sin\varphi\sin\theta$恰爲γ與X夾角餘弦之相當值。第二項中包含球面坐標分速度$\gamma\dot{\varphi}$，此一分速度可視爲因角速度$\dot{\varphi}$及γ之關係而在YOP面上之直線速度，並與γ垂直，$\cos\varphi$及$\sin\theta$兩係數則將之投射於X軸上。

第三分速度爲$\gamma\dot{\theta}\sin\varphi$，此亦由角速度$\dot{\theta}$而來，因$\theta$角必在$ZX$平面內，故$Y$軸即爲$\dot{\theta}$之轉動軸，且因$\gamma\sin\varphi$爲$P$對$Y$軸之垂直距離，此分速度並垂直於$YOP$面。

此三球面分速度彼此互相垂直，故P點之合速度可由下式表示：

$$V^2=\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2+(\gamma\dot{\varphi})^2+(\gamma\dot{\theta}\sin\varphi)^2 \qquad (1\text{-}13)$$

倘三分速度爲已知，則V之大小即可由上述關係求得，V之方向則由三者之相對值而定。

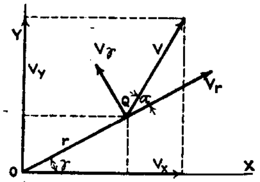

圖 15.

***c*. 極坐標系**— 爲便於求得一速度V與其分速度在極坐標面內之關係，可用直角坐標輔助說明，令此輔助直角坐標爲XOY並以O爲原點（圖 15），令OX爲極坐標之參考基線，繪向量r達於Q點，並與OX成γ角。

設V爲一質點在Q之速度，Q在直角坐標