科　學　譯　叢

理論及應用力學：第 2 册

蘇聯厚板與薄板力學工作概述

詹涅里傑　作

中國科學院出版

科 學 譯 叢

——理論及應用力學：第 2 册——

蘇聯厚板與薄板力學工作概述

Г. Ю. 詹涅里傑　作

胡 海 昌　譯

中國科學院出版

1953 年 7 月

科 學 譯 叢

——理論及應用力學：第 2 冊——

蘇聯厚板與薄板力學工作概述

ОБЗОР РАБОТ ПО ТЕОРИИ ИЗГИБА ТОЛСТЫХ И ТОНКИХ ПЛИТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В СССР

(原文載於 *Прикладная Математика и Механика*, 1948, Т. XII, Вып. 1.)

原作者	Г. Ю. Джанелидзе
翻譯者	胡　海　昌
出版者	中　國　科　學　院
印刷者	上海藝文書局鑄字印刷廠
總經售	中　國　圖　書　發　行　公　司

書號：53029 (理) 03　　1953 年 7 月初版

(滬) 0001—4,300　　定價：3,000 元

字數：29,000

內 容 提 要

本文簡明扼要地介紹了在蘇聯發表的有關厚板與薄板彎曲理論的工作，對於重要的著作一一說明其所用的方法和所得的結果或所解決的問題。 正文共分三部分：第一部分介紹厚板和變厚板力學的工作；第二部分介紹承接古典方向的研究工作，包括普通薄板的彎曲問題、用擱柵支承的地板的彎曲問題、由柱支承的地板的彎曲問題以及薄板在彈性基礎（溫克耳、齊姆門理論和半無限彈性體）上的彎曲問題；第三部分介紹用新法處理的研究工作，包括複變函數法、虛載荷法、相補載荷法、小參數法以及其他數種方法。 文末收集了有關文獻六十九條。

譯者並在文末增加了最近文獻十七條。

目　　録

蘇聯厚板與薄板力學工作的概述*

Г. Ю. 詹涅里傑

蘇聯學者在彈性體力學方面的工作，大都致力於薄板和厚板的力學。在蘇聯彈性體力學中這一方面的發展，按照許多方向前進。我們欲指出下面這些：(i)板的靜力學的研究、(ii)板的動力學諸問題的研究、(iii)板的穩定問題的研究。最後特別需要提出的是有關所有薄板的一系列非線性問題的研究。

自然，在以下的概述裏，我們特別注意近十幾年來發表在蘇聯的工作，並不要求全面，主要只涉及爲作者所關心的板靜力學的工作。因此對於大批討論板的穩定性和動力學諸重要問題的工作，只能放着不提，這些問題需要一篇單獨的概述。

爲簡便起見，本文分爲下列三節：

(1) 厚板和變厚板的力學的研究；

(2) 承接古典方向的研究；

(3) 用新法探討的薄板力學的研究。

一. 厚板和變厚板的力學的研究

在蘇聯最初的厚板力學的研究由院士 Б. Г. 伽遼金[3] 所

*原文載於應用數學與力學 (ПММ), 1948, 第 12 卷, 第 109—128 頁。

完成。他發展了他早期用三個雙調和函數以求空間彈性體力學的方法，用來研究厚板的彎曲問題。Б. Г. 伽遼金依照相似的方法，用二重三角級數求得了簡單支承的矩形板和三角形板的解答[4,5]。之後，他又用一常級數來解矩形的厚板[8]。在論著[8]中，他一直推算到數字結果，於是與從薄板力學的公式算得的結果相比較，證實了甚至當板厚 h 與另一最小的長度 a 之比 $h/a=1/3$ 時，用通常的薄板力學來計算板在均佈載荷下的情形，尙可適用。

Б. Г. 伽遼金應用這一方法，研究了圓形和扇形厚板在上下兩底面上受任意法向載荷的問題。

所有 Б. Г. 伽遼金所求得的解答，在板的側面，僅在中截線 z 等於常數處符合邊界上的幾何條件，同時應力符合聖維那原理下的邊界條件。

厚板在調和載荷(係指載荷適合拉普拉斯方程)作用下的彎曲問題，曾由 С. Г. 哥脫門在論著[15a]中加以研究。他指明，若在板的側面僅需符合聖維那原理下的邊界條件，那麼板在調和載荷作用下的通解，可由以下兩部份相加而得：

1) 由中截面的撓曲所規定的特解，可由常用的方程

$\Delta\Delta\ w=p/D$ 求得。

2) 有關板的平面應力問題的解答。

後者的選擇由邊界條件所規定。

在另一文中[15б]，С. Г. 哥脫門應用這一方法來計算彈性厚板在其本重作用下的平衡問題的解答。

下面厚板力學的研究方式，是由 А. И. 盧爾也所完成[43,46]。

他利用數學物理學中求解由二平行平面所圍成的物體的邊值問題的新方法，來探討彈性力學的方程。

A. И. 盧爾也將彈性力學的平衡方程

$$\nu\,\partial_1\theta + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta\right)u = 0,\quad \nu\,\partial_2\theta + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta\right)v = 0,$$

$$\nu\,\frac{\partial\theta}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta\right)w = 0,\quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x},\quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\nu = \frac{1}{1-2\sigma},\quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \theta = \partial_1 u + \partial_2 v + \frac{\partial w}{\partial z},$$

看作是變數 z 的一組常微分方程，並尋求此組方程在起始條件

當 $z=0$ 時，$u=u_0$，$v=v_0$，$w=w_0$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=u_0'$，$\dfrac{\partial v}{\partial z}=v_0'$，

$$\frac{\partial w}{\partial z} = w_0',$$

下的解答。

這樣的解答是：

$$u = \cos z\sqrt{\Delta}\,u_0 - \frac{\nu}{2}\,\frac{z\sin z\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}\,\partial_1(\partial_1 u_0 + \partial_2 v_0 + w_0') +$$

$$+ \frac{\sin z\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}\,u_0' - \frac{\nu}{2(1+\nu)}\left[\frac{\sin z\sqrt{\Delta}}{\Delta\sqrt{\Delta}} -\right.$$

$$\left.- \frac{z\cos z\sqrt{\Delta}}{\Delta}\right]\partial_1(\partial_1 u_0' + \partial_2 v_0' - \Delta\,w_0),$$

$$v = \cos z\sqrt{\Delta}\,v_0 - \frac{\nu}{2}\,\frac{z\sin z\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}\,\partial_2(\partial_1 u_0 + \partial_2 v_0 + w_0') +$$

$$+ \frac{\sin z\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}\,v_0' - \frac{\nu}{2(1+\nu)}\left[\frac{\sin z\sqrt{\Delta}}{\Delta\sqrt{\Delta}} -\right.$$

$$- \frac{z \cos z \sqrt{\Delta}}{\Delta} \Big] \partial_2 (\partial_1 u_0' + \partial_2 v_0' - \Delta w_0), \tag{1.1}$$

$$w = \cos z \sqrt{\Delta}\, w_0 + \frac{v}{2} \Big[\frac{\sin z \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} -$$

$$- z \cos z \sqrt{\Delta} \Big] (\partial_1 u_0 + \partial_2 v_0 + w_0') + \frac{\sin z \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} w_0' -$$

$$- \frac{v}{2(1+v)} \frac{z \sin z \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} (\partial_1 u_0' + \partial_2 v_0' - \Delta w_0).$$

在實際計算時，必須將 $\sin z \sqrt{\Delta}/\sqrt{\Delta}$ 和 $\cos z \sqrt{\Delta}$ 用對於 $z\sqrt{\Delta}$ 的冪級數來代替，但是一系列的演算亦可加在記號算式 (1.1) 上。例如相當於這一組位移，卽可求算應力。

爲簡便起見，今攷慮一由平面 $z=\pm h$ 所圍成的板，在上下兩底面上只負担法向載荷 $q_1(x,y)$ 和 $q_2(x,y)$ 的平衡問題，(推廣到任意載荷的場合，並無困難。) 底面上的邊界條件，化爲兩組微分方程用以定 u_0, v_0, w_0' 和 u_0', v_0', w_0. 我們寫下第一組方程(第二組的形式相同，只須將右端的 q 改成 s):

$$\begin{aligned} A_{11} u_0 + A_{12} v_0 + A_{13} w_0' &= 0, \\ A_{21} u_0 + A_{22} v_0 + A_{23} w_0' &= 0, \\ A_{31} u_0 + A_{32} v_0 + A_{33} w_0' &= q, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q &= \frac{1}{2\mu}(q_1 - q_2) \\ s &= \frac{1}{2\mu}(q_1 + q_2) \end{aligned} \tag{1.2}$$

這裏 A_{ik} 是某些無窮級微分算子。我們引進一應力函數 $\psi(x,y)$

$$u_0 = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} \psi, \quad v_0 = \begin{vmatrix} A_{13} & A_{11} \\ A_{23} & A_{21} \end{vmatrix} \psi, \quad w_0' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \psi.$$

利用 ψ，方程組（1.2）可簡化爲

$$\left[\frac{\sin 2h\sqrt{\Delta}}{2h\sqrt{\Delta}}-1\right]\Delta\psi=\frac{q}{2\nu h}. \qquad (1.3)$$

從相當於 s 的第二組方程，可求得另一應力函數 χ 的方程

$$\left[\frac{\sin 2h\sqrt{\Delta}}{2h\sqrt{\Delta}}+1\right]\Delta\chi=\frac{s}{2\nu h}. \qquad (1.4)$$

爲求方程（1.3）和（1.4）的解，首先應找尋相當於 q 和 s 的兩個特解。倘使 q 是一個多項式，那麼 ψ 便能簡便地求得，因爲 ψ 亦可爲一多項式。當 $q=q_0\sin\alpha x\sin\beta y$ 時，一個特解是

$$\psi=-\frac{2}{3}\frac{q_0 h^2}{D\gamma}\frac{2\gamma h}{2\gamma h-sh\,2\gamma h}\sin\alpha x\sin\beta y,$$

$$\gamma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\quad D=\frac{2}{3}\frac{Eh^3m^2}{m^2-1}.$$

因此，倘 $q(x,y)$ 能用一三角級數來表示，那麼函數 ψ 的一個特解亦能用同樣的級數來表示。任意一個雙調和函數，適合 ψ 的齊次方程。更一般的齊次解，可由下列微分方程求得

$$\left(\Delta-\frac{\gamma_k^2}{h^2}\right)\psi_k(x,y)=0,$$

式中 $2\gamma_k$ 是方程 $x^{-1}\sin x-1=0$ 的複數根。於是：

$$\psi=\sum_1^\infty\psi_k(x,y).$$

另一組方程的解亦可用相同的方法求得。

上述依賴一超越方程的根的解答，恰能使板的底面不受外力作用，因此其結果非但包括了所有早期的解答（Б. Г. 伽遼金，沃依諾夫斯基·克里葛爾 Войновский—Кригер，皮爾霍夫 Birhoff 等等），並且使適合板側面上的邊界條件以達預定的精確度亦成爲可能。在一些個別問題，例如在圓板負担均佈載荷的問題，不難完成這裏所需要的計算和適合以下的邊界條件：

當 $r=r_0$，$-h\leqslant z\leqslant h$ 時 $u=0$；當 $r=r_0$，$z=0$ 時 $w=0$.

在著作[43]中，А. И. 盧爾也導得變厚度薄板（厚度的變化係對平面 $z=0$ 對稱）的平衡方程如下：

$$\Delta(D\Delta w)-\frac{m-1}{m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)\right\}=$$
$$=P_z+\frac{\partial C_x}{\partial x}+\frac{\partial C_y}{\partial y},\quad\left[D(x,y)=\frac{2}{3}\frac{E\,m\,h^3}{m^2-1}\right],\qquad(1.5)$$

其中 P_z 是法向載荷，C_x，C_y 是外力的合力矩的分量。

在上述推演中，係假定法線在形變後仍爲一直線。倘使放棄這一假定，並再應用前已說明的記號算法（注意，此法首先發表在本文裏），我們可得變厚度薄板的平衡問題的更嚴密的解法。在截面非對稱的問題，А. И. 盧爾也應用卡氏原理，推演得轉動薄板的方程如下：

$$u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} + \left(u' + \frac{u}{m\,r}\right)(\ln h)' + \frac{m^2-1}{m^2 E}\,\rho\,\omega^2 r = 0,$$
$$\tag{1.6}$$
$$\varphi'' + \frac{\varphi'}{r} - \frac{\varphi}{r^2} + \left(\varphi' + \frac{\varphi}{m\,r}\right)(\ln D)' = 3\,g'(r)\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{mr}\right),$$

其中 u 和 φ 是徑向位移和傾角，$2\,h(r)$ 是板的厚度，$z=g(r)$ 是中截面的方程。

П. Г. 舒列日柯[68]推廣了方程（1.5），使適用於各向異性不均勻的板的平衡問題和運動問題，並且指明切應力對於板的形變的影響很小。他所推演得的方程是：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{J\left[\alpha_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\,\alpha_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]\right\} + \\
&\quad + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{J\left[\alpha_{21}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\,\alpha_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]\right\} + \\
&\quad + 2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\left\{J\left[\alpha_{61}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha_{62}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\,\alpha_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right]\right\} = \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial x}\left[T_1\frac{\partial w}{\partial x} + S\frac{\partial w}{\partial y} + M'\right] + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left[S\frac{\partial w}{\partial x} + T_2\frac{\partial w}{\partial y} + L'\right] + Z'(x, y, t)
\end{aligned}\tag{1.7}$$

$$\left(J = \int_{-h}^{+h} z^2\,dz\right).$$

式中 α_{ik} 是彈性常數，$T_1, \cdots Z'$ 是中截面上的力和力矩。

在 П. Г. 舒列日柯廣博的研究中，包括着許多類似的但較爲特殊的方程。方程（1.5）可用級數求解。至於比這更普遍的情形，已在格郎奧耳孫（R. Gran Olsson）的名著中求得。

И. А. 巴斯拉夫斯基[1]在這方面獲得一系列的結果。例如他研究了剛度依一線性規律 $D=D_0(1+\epsilon\, y/b)$ 變化的板，簡支於平行於 x 軸的邊上（不同於格郎與耳孫的 y 軸），而在厚度有變化的邊上則任加固定。在 $D=D_0\exp(\mu\, y/b)$ 的情形以及其他若干問題，不難應用里茨(*Ritz*)伽遼金的方法求解。И.А. 巴斯拉夫斯基的數字計算指明，用一相當的等厚板代替變厚度板的計算，是不適用的。例如一簡單支承的板負担一均佈載荷，倘 $D=D_0(1+2y/b)$，那麼應力和形變的差誤可達 40%。在這裏，變厚板的最大彎矩比較大些。

二. 承接古典方向的研究

在薄板力學古典的研究方面，我們提到南維爾 (Navier)、雷維 (M. Levy)、愛斯達那夫 (Estanave) 等人。他們的特徵就是用福里哀方法來積分非齊次的雙調和方程，並把解答用二重或常無窮級數來表示。

Б. Г. 伽遼金的許多傑出的著作，其中多數是古典研究的補充，已經概述於他的書中[7]。該書出版在本文所欲攷慮的年代之前。

在這本書裏，他用下面的方法來積薄板的彎曲方程：非齊次雙調和方程的解，寫成爲妥爲選擇的一個特解和一個適合齊次方程並帶有未定係數的級數之和。特解常選用一個多項式，以便使撓曲算式中的級數收斂得很快。Б. Г. 伽遼金常取這個特解，使跟梁的彎曲問題相當。

大批的圖表，使每個問題都獲得數字結果，和新問題的創

始性的解答，是 Б. Г. 伽遼金在板力學方面的主要特徵。可以毫不誇大地說，以前作爲數學園地的板力學，在 Б. Г. 伽遼金的書出版以後，變成工程師手中有效的工具了。

古典方向重要的發展，收集在 П. Ф. 巴博柯維契的廣博的書中[55]。該書第 494—948 頁，專論板的彎曲和穩定性。我們很難概括全書的新結果，甚至是創始性的和巧妙的敍述和熟知的古典解答。我們只能提到下面的計算方式。(參攷[56])。這是雷維方法的推廣，使適用於有相對兩邊固定，其他兩邊任意支承的場合。方程：

$$D \Delta \Delta w = p(x, y) \tag{2.1}$$

(其中 w 是板的撓曲，D 是板的抗彎剛度，$p(x,y)$ 是分佈載荷)的解．使人自然想到去探求如下的形式：

$$w = w_0(x, y) + \sum X_i(x) Y_i(y), \tag{2.2}$$

其中 $w_0(x,y)$ 是任一特解，但和已知函數 $Y_i(y)$ 一樣，在固定邊上符合邊界條件。將 (2.2) 式代入 (2.1)，得

$$\sum \{X_i^{\text{IV}}(x) Y_i(y) + 2 X_i''(x) Y_i''(y) + X_i(x) Y_i^{\text{IV}}(y)\} = 0 .$$

用 $Y_i(y)$ 乘此式，並按 y 積分一次，便得一組無窮線性方程，其係數是 A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}. 此組方程的通解是：

$$X_i(x) = \sum_k A_k v_{ik} \exp s_k x ,$$

式中 s_k 是無窮行列式的根，ν_{ik} 是相當的方程組

$$\sum_i \{A_{ij} s_k^4 + 2 B_{ij} s_k^2 + C_{ij}\} \nu_{ij} = 0 , \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

的解

常數 A_k 由在 $x=0$ 和 $x=a$ 兩邊的邊界條件，先乘以 $Y_j(y)$ 再積分一次後的條件所決定。去尾後的方程系的解答，提供了所設問題的近似解。在若干問題中這方法使求解成為可能。例如載荷使撓曲對 x 軸對稱的情形。選擇 $Y_i(y)$ 使其為方程：

$$\frac{Y_i^{\text{IV}}}{Y_i''} = \left(\frac{\mu_i}{b}\right)^2, \quad \tan\frac{\mu_i}{2} = -\operatorname{th}\frac{\mu_i}{2}$$

的解，並依上述方法計算，得（α_k 是括號中方程的根）

$$X_j(x) = \sum_k \frac{A_k}{(\alpha_k^2 - j^2)^2} \exp\frac{2\pi\alpha_k x}{b},$$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^4}{(\alpha^2 - j^2)^2} = -\frac{1}{2}\right).$$

П. Ф. 巴博柯維契應用類似的方法來計算 A. M. 辛可夫（Сенков）構組的縱框架壁[53]。他還討論了這方法的各種變化。

П. Ф. 巴博柯維契[56]指出，對於計算由二直徑和二同心圓弧所圍成的薄板的通解，這方法太一般化而不適用。他指出了避免這一缺點的方向。

В. З. 符拉索夫[2]曾試圖用結構力學中的方法來解彈性薄

板的問題。將矩形板的撓曲近似地用下列級數來表示:

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{n} W_k(x)\, \chi_k(y),$$

式中線性無關的函數 $\chi_k(y)$（廣義坐標）是依照固定邊（平行於 x 軸）的運動條件來選擇的。再應用虛功原理，B. 3. 符拉索夫導得一組方程以求函數 $W_k(x)$:

$$\sum_k a_{ik} W_k^{\mathrm{IV}} - 2\sum_k b_{ik} W_k'' + \sum_k c_{ik} W_k - \frac{q_i}{D} = 0,$$

式中 $a_{ik} \cdots c_{ik}$ 是從下式計算而得:

$$a_{ik} = \int \chi_i \chi_k \, dy, \qquad b_{ik} = \int \chi_i' \chi_k' \, dy - \frac{\nu}{2} \left| \chi_k \chi_i' + \chi_k' \chi_i \right|,$$

$$c_{ik} = \int \chi_i'' \chi_k'' \, dy, \qquad q_i = \int p\, \chi_i \, dy.$$

此組方程的邊界條件，必須根據所選定的"廣義坐標"來決定。應用這方法，不難求得一系列實用上重要的問題的解答。例如由極狹的矩形板所構成的柱狀壳的彎曲，薄板的穩定性等等。

A. C. 洛克辛[40]研究了矩形薄板經等剛度格柵等間隔 a 加勁後的彎曲問題、振動問題和穩定問題。假定板簡支於平行於 x 軸的兩邊、負担均佈載荷，A. C. 洛克辛設板的第 $k+1$ 條的撓曲為

$$w_{k+1} = \sum_{m=1,3,5,\cdots} Y_m^{(k+1)}(y) \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

為求函數 $Y_m^{(k+1)}$，先以 η_k 和 η_{k+1} 代表 $Y_m^{(k+1)}$ 在該條始點和終點的未知值，以 μ_k 和 μ_{k+1} 代表 $Y_m^{(k+1)''}$ 在兩端的未知值。利用這些數量，就能簡易地求得任一條的雷維解答。數量 η_k 和 μ_k 必須從接頭處的條件求得，此關係經簡化後是

$$\left(\frac{\partial w_k}{\partial y}\right)_{y=y_k}=\left(\frac{\partial w_{k+1}}{\partial y}\right)_{y=y_k},$$

$$\left(\frac{\partial^3 w_{k+1}}{\partial y^3}\right)_{y=y_k}=\left(\frac{\partial^3 w_k}{\partial y^3}\right)_{y=y_k}-\frac{EJ}{D}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_{y=y_k}.$$

這是未知數 η_k 和 μ_k 的一個差分方程，其解答已由 A. C. 洛克辛求得。

A. П. 菲利伯夫[61]研究了矩形薄板的更一般的彎曲問題、振動問題和穩定問題。薄板係經彈性格柵加勁，並支承於一系列分離的支柱上。A. П. 菲利伯夫用雷維方法，先從對邊簡支的板的解答着手。這解答是

$$w=\sum_n V_n(\eta)\sin n\pi\xi$$

式中 $\xi=x/a$，$\eta=y/b$ 是無維坐標，

$$V_n(\eta)=A_n\operatorname{sh} n\pi\eta+B_n\operatorname{ch} n\pi\eta+$$
$$+C_n\eta\operatorname{sh} n\pi\eta+D_n\eta\operatorname{ch} n\pi\eta+\Phi_n(\eta),$$

$\Phi_n(\eta)$ 是對應於載荷的一個特解。

在有載荷 $p(\xi)$ 分佈於直線 $\eta=\eta_1$ 上的場合，