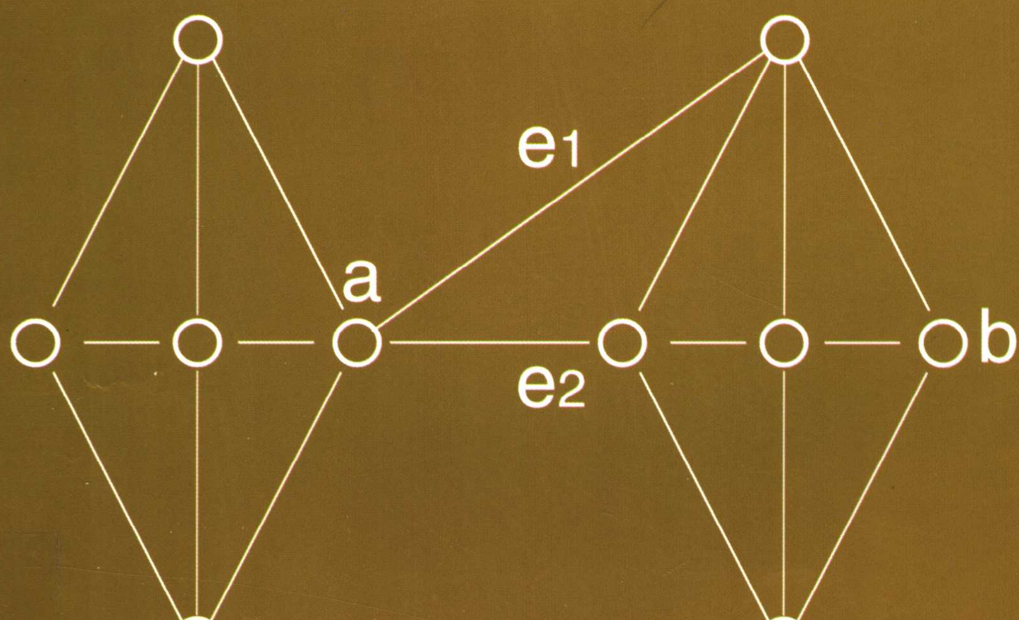
离散数学

于筑国 编著

I S A N S H U X U E



国防工业出版社
http://www.ndip.cn

离散数学

于筑国　编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书作为计算机专业的专业基础教材，主要介绍离散数学的基础知识，全书共分7章，包括命题逻辑，一阶谓词逻辑集合论与二元关系，函数，代数系统，格代数，图论等，并含有相关的例题与习题。本书适用于高等理工科院校、计算机科学、工程、应用信息安全专业的本科生。也适用于对此课程有需要的信息管理、通信工程及跨专业的本科生。也可供教师、研究生及有关工程技术人员参考使用，也适合作为自学读本。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学／于筑国编著．—北京：国防工业出版社，2005.4

ISBN 7-118-03835-0

Ⅰ.离... Ⅱ.于... Ⅲ.离散数学 Ⅳ.0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 015778 号

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 19½ 448 千字

2005 年 4 月第 1 版 2005 年 4 月北京第 1 次印刷

印数：1—4000 册 定价：26.00 元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　言

人类在生产实践和社会实践中，常常需要考虑的一个问题是：怎样使用工具去减轻劳动以及加快产生劳动成果的速度。在实现此考虑的过程中，人们首先要根据劳动目的设想工具的结构和能力，接着要考虑工具与劳动目的之间的对应关系，根据这种对应关系去产生出方法，最后依这些方法去设计和制造这个工具。计算机是人类创造出的一种复杂而有效的工具，在它的诞生、应用和发展的过程中，数学始终是人类与机器之间的进行交互所必备的方法语言。人类需要机器做的事情，常需要通过数学方法来转换成机器能接受的方法。这就是一个需要掌握计算机的人必须要学习一些数学的原因。

“离散数学”是计算机专业中的一门重要的专业基础课，它包含了人类在创造计算机，运用计算机以及发展研究计算机的过程中，所使用的各种数学方法和数学思想，以及与这些数学问题相关的基础知识。学好《离散数学》不仅可以为学习计算机的后续课程奠定必需的入门基础，也为进一步研究和讨论与计算机学科领域相关的理论或应用问题打下一个良好的数学基础。因此人们常将《离散数学》作为学习其他计算机课程之前所必须掌握的一种数学工具，也将它看成是加入计算机学科研究领域，特别是人工智能研究领域之前所必不可少的一种专业基础。

随着计算机学科研究往纵深发展，教育领域的拓展及各研究领域的互相渗透和交叉跨越，需要学习《离散数学》的人群在逐年扩大，特别是自学《离散数学》的人也越来越多。于是就有这样一种社会需求，就是如何能更好、更快、更容易地掌握住《离散数学》的基本内容和基本方法。这也是我们教学法研究的一个重要课题。我们根据多年来在大量的教学实践中所积累的经验，从学习者的角度，以自学者心理来编写这本《离散数学》，我们注重基础培养和基本素质培养，我们希望做到既能不失专业性抽象表述，又能达到拨云驱雾的目的。使学习者能得到专业性的指点，让学习者特别是自学者充满自信地走进考场或投入到科研工作中。

本书在每一小节前，都有一段具有启发作用的话，虽然有些是与专业无关的话，但是作者通过这些精心设计的话，逐步地引导读者进入抽象世界，得到抽象思维的训练。

通过接触大量学习《离散数学》的学生，他们有的说：《离散数学》的内容虽然抽象，但还容易接受，只是题太难做了。由于不会做题以至给人的感觉就像没学懂一样。也有的说：内容太抽象，很难让人接受，更不要说做题了。多年的教学实践告诉我们，当人们在接受一种新的思维方式时，有一个思维方式的转变过程，这个转变需要足够的练习来实现。通过练习对课程中的定理、定义、方法等有所记忆以后，才能具备解题的基本能力。所以本书配有一个练习册，除每小节后都配有少量的习题以外，另外对每个概念都配有练习，通过练习来加深对概念的记忆，掌握对定理定义的使用方法，以此来减小从学习内容到做习题之间存在的不容易逾越的困难。

本书吸收了许多《离散数学》教程的优点，在书的整体结构上，内容的叙述方法上都有自己的特色，使学习者在学习过程中能保持一定的连贯性。本书主要包括的内容有：命题逻辑、谓词逻辑、集合与计数、关系与函数、序数与基数、数论基础、群与环、格、图论。在叙述上既不失基础性，又不忽视专业性。

由于作者水平有限，难免出现缺点和错误，希望广大读者和有识之士不吝赐教，给予指正。

编者

2004 年 12 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第一部分　数理逻辑

第二部分 集 合 论

第三部分 代数系统

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一部分　数理逻辑

小说《哈利·波特》之所以畅销全世界，是因为作者在小说中创造了一个神奇的魔法世界，小说用神奇的故事展现了一种非同寻常的思维方式和价值观念。在那个魔法世界里，人们用魔法思想，用魔法交流，用魔法评价社会价值，用魔法解决一切问题。其实，计算机世界也是一个非同于人类世界的另类世界，在计算机世界里，计算机是通过将符号转换成物理量的方式来表现其非凡能力的，所以计算机必须通过符号去思想，去表达，利用符号去解决问题，人类也必须用符号去与计算机交流，利用符号去驱动计算机来为人类服务。然而，让符号来实现这一切的"魔法"便是"离散数学"。

第1章　命题逻辑演算系统

在这一章里，我们要学习一种用符号构建的形式语言系统。并要学会将自然语言无二义地转换成另一种更严谨的形式语言，这种符号表示的形式语言会更方便计算机去识别和处理有关逻辑推理的问题。这里的符号是指英文字母，联结词符号及括号。

1.1　有关命题逻辑演算系统的概念

本节导学：在命题逻辑演算系统中，命题是最基本的运算元素。就像算术四则运算的基本运算元素是自然数一样。在自然语言中，什么样的语句可以作为命题呢？它们又是怎样被表示成一种符号语言的呢？

1.1.1　命题

一、命题的概念

命题概念　具有确定的真值（真的或假的两者之一），且能够用于判断的陈述句被称为命题。

【例1】　判断下列语句，哪些可以称之为命题，哪些不能。

(1) 我正在说谎。

(2) 满山的杜鹃花，散发着沁人的清香，鲜艳的红色，让人心旷神怡。

(3) $1+1=10$。

(4) 全体立正!

(5) 明天是否开大会?

(6) 音乐真美妙!

(7) 21 世纪末人类将移居火星。

解:(1)悖论是自相矛盾的陈述句,它没有确定的真值。如果(1)是真的,那么,我在说谎的同时没有说谎,所以矛盾,如果(1)是假的,那么,说明我没有说谎的同时确实在说谎。故又矛盾,不是命题。

(2) 描述景物的陈述句常用于抒发感情,表现场景,不是用来判断其真假的,故不是命题。

(3) 当条件不明确时,命题的真假也不明确。如果我们规定 $1+1=10$ 是在二进制数制下的表达式,那么,命题为真。而在十进制的数制下命题为假。所以在判断之前必须给出完整的条件。不是命题。

(4),(5),(6) 一切不可判断或者无所谓是非的句子,如感叹句,疑问句,祈使句等都不是命题。

(7) 尽管 21 世纪末还未来临,我们对未来的事情处于一个未知状态,但(7)仍是一个可以判断出真假的陈述句,所以它是命题。

我们不能给命题做绝对的定义,只要是可以判断出真假的陈述句,我们不在乎这个陈述句是真理还是谬论。

二、两种命题

原子命题概念 若命题是不能再进行分解的陈述语句,则称其为原子命题。也称简单命题。

【例 2】 以下是原子命题:

(1) 我学习英语。

(2)“小李飞刀”是一部电视剧。

分子命题概念 由一个或多个原子命题,至少有一个联结词以及必需的括号共同构成的命题,称作分子命题,也称复合命题。

【例 3】 以下是分子命题:

(1) 我学习英语,或者我学习日语。

(2) 亚马逊河不仅是一块美丽富饶的沃地,更是一个地球气候的调节器。

原子命题与分子命题的概念类似于自然语言中的简单句和复合句的概念。

三、命题的表示

在数理逻辑中,我们使用以下几种符号形式来表示命题元素:

① 大写字母,如 $A,B,\cdots,P,Q,\cdots$

② 用带下标的大写字母,如 A_i。

③ 用中括号括起来的数字,如[12]。

命题符号概念 用于表示一个具体命题或抽象命题形式的符号称为“命题符号”或“命题标识符”。

也就是说,我们常用①,②,③所指的符号来表示原子命题,或分子命题,命题变元,命

题表达式,或命题公式等。

【例 4】 用命题标识符表示下列命题

(1) P:大山的普通话很标准。

这里用 P 表示“大山的普通话很标准 ”这个具体的原子命题。

(2) [12]:第 12 个文件是文本文件,它被放在文件夹里。

这里用[12]表示“第 12 个文件是文本文件,它被放在文件夹里”这个句子。

(3) 设 A_i 是其中第 i 个命题变元。

这里命题标识符 A_i 被说明为一个命题变元。

(4) 设 A,B 是两个命题公式。

命题标识符 A,B 被说明为两个抽象的命题公式。

以上的例子,给出了怎样对命题标识符加以说明的方法,在形式系统中,对命题标识符的解释应该没有二义性。也就是说,一个符号所表达的含义应该是惟一的。

四、命题的真值

命题真值概念 将一命题的判断结果作为它的值,这个“值”被称为该命题的命题真值,简称真值。可将命题 A 的真值记为 $v(A)$。

对于{真,假},或{*True*, *False*},或{T,F},或{1,0},这 4 个集合中的任何一个都可以用来表示真值的取值范围。最常用的取值范围为{1,0}。其中 1 表示真,0 表示假。

【例 5】 (1) 设 A:五月一日是国际劳动节。

命题 A 的真值为真。记 $v(A)=1$。

(2) 设 P:妹妹生病了。 Q:我去看望她。

$P\to Q$:如果妹妹生病了,那么我去看望她

命题 $P\to Q$ 的真值为 T,记 $v(P\to Q)=1$。

(3) 设 C:具有确定真值的陈述句是命题。

C 命题的真值为 1,记 $v(C)=1$。

注:真 = *true* = $T=1$; 假 = *false* = $F=0$。但人们更喜欢使用 1,0 来表示真,假。

真值指派的概念 设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 n 个命题变元,如果对每个变量 $p_i(i=1\cdots n)$ 都指定一个确定的真值 $v(p_i)$,其中 $v(p_i)\in\{0,1\}$,那么,称 $(v(p_1),v(p_2),\cdots,v(p_n))$ 为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的一种真值指派。有时表示为 $(p_1,p_2,\cdots,p_m)/(v(p_1),v(p_2),\cdots,v(p_n))$

例如: 设有命题变量 p,q,r 的一种真值指派 (1,1,0),这组真值指派,将变量 p 指定为真,q 指定为真,r 指定为假。记为$(p,q,r)/(1,1,0)$。

1.1.2 联结词

为了用符号来表示比原子命题更为复杂的命题,我们需要利用联结词。

正如我们在自然语言的表达中,常用“如果”,“并且”,“虽然…但是”等联结词,将若干个简单句联结成一个复合句一样。所不同的是,在形式系统中联结词是用一些大家共同约定符号来表示的。

否定词¬ 联结词“¬ ”表示对受用命题的否定,读“非”,我们把它视为一个一元逻辑运算。

P	$\neg P$
1	0
0	1

设 P 为一命题符号,$\neg P$ 是对 P 的一个复合联结,称 P 的否定。

若 P 为 *true*,则 $\neg P$ 为 *false*;若 P 为 *false*,则 $\neg P$ 为 *true*。

【例 6】 求出下列命题的否定命题:

(1) P:李农是一个种子研究者。

(2) A:我否定了他的结论。

解:(1) $\neg P$:李农不是一个种子研究者。

(2) $\neg A$:我没有否定他的结论。而若用"我肯定了他的结论"去表示 $\neg A$ 则错。

因为"我肯定了他的结论"不能与 A 的真值相反。

析取词∨ 联结词"∨"表示两个命题之间用"或"的联结,汉语中的"排斥或"不能用"∨"表示。我们将析取词"∨"视为二元逻辑运算。

设 P,Q 是两个命题符号,$P \vee Q$ 是 P 和 Q 的一个复合联结,称 P 析取 Q。

对 P,Q 而言它们的真值指派有 4 种,在 P,Q 的每种取值情况下 $P \vee Q$ 都有一个真值。如下表所示:

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

当且仅当 P、Q 同时为 0 时,$P \vee Q$ 的真值为 0。在其他情况下,$P \vee Q$ 的真值均为 1。

汉语中的"排斥或"是指"或"两端的事件不能同时发生,比如说,命题"今晚我在家看电视或去剧场看戏" 中的这个"或"就是一个"排斥或"。因为"在家看"和"去剧场看"的动作显然不可能同时发生,所以此"或"不能用"∨"表示。

【例 7】 将给定的复合命题符号化:他是 100m 或 400m 赛跑的冠军。

解:运动员跑 100m 和跑 400m 时,在时间和场地上不会有冲突,有可能都获得了冠军,所以是"可兼或",可用"析取词 ∨"表示。

设 P: 他是 100m 赛跑的冠军。Q:他是 400m 赛跑的冠军。

$P \vee Q$: 他是 100m 或 400m 赛跑的冠军。

【例 8】 他昨天钓了 20 或 30 条鱼。

解:这个"或"表示近似数目、范围,不是两个命题之间的"或者"联结。所以不能用"析取词∨"表达。这是一个原子命题。

合取词∧ 联结词"∧"用于表示两个命题之间 "与"的联结,汉语中的"并且","同时","一边…一边","既…又"等都能用"∧"表示。我们将合取词"∧"视为二元逻辑运算。

设 P,Q 是两个命题符号,$P \wedge Q$ 是 P 与 Q 的一个复合联结,称 P 合取 Q。

$P \wedge Q$ 的真值情况如下表所示:

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

当且仅当 P、Q 同时为 1 时，$P \wedge Q$ 为 1。在其他情况下，$P \wedge Q$ 的真值都是 0。

【例 9】 将给定的复合命题符号化：

(1) 小李和小张同时获奖。

(2) 老曾在棋战中屡战屡败。

解：(1) P：小李获奖。Q：小张获奖。

$P \wedge Q$：小李和小张同时获奖。

(2) 老曾在棋战中屡战屡败。

我们不能将此命题翻译成 $P \wedge Q$。这是因为如果我们用 P 表示“老曾屡战”，Q 表示“老曾屡败”的话，当 P 与 Q 之间位置一交换，$P \wedge Q$ 与 $Q \wedge P$ 的含义就不同了。这样就不满足命题的无二义性了。

条件词→ 联结词“→”用于表示两个命题之间“如果…那么”的联结，汉语中的“当…有”，“除非…否则”，“如果…那么”，“P 是 Q 充分条件”，“Q 是 P 的必要条件”等都能用“→”表示。我们将条件词“→”视为一个二元逻辑运算。

给定两个命题符号 P 和 Q，$P \to Q$ 是 P 与 Q 的一个复合联结，读作“若 P 则 Q”或“如果 P 那么 Q”。

$P \to Q$ 的真值情况如下表所列：

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

当且仅当 P 的真值为 1，Q 的真值为 0 时，$P \to Q$ 的真值为 0。其他情况下，$P \to Q$ 的真值均为 1。

我们称条件联结词左边的 P 为前件，右边的 Q 为后件。

【例 10】 将给定的复合命题符号化：少小不努力老大徒伤悲。

解：A：人在小的时候去努力。B：人在老的时候会空伤悲。

$\neg A \to B$ ：少小不努力老大徒伤悲。

条件联结词与自然语言中的“如果…那么”是有所区别的，对条件命题 $P \to Q$ 来说，无论 P，Q 命题之间是否有逻辑关系，只要 P，Q 有确定真值，$P \to Q$ 即为命题。也就是说，我们不要求 P 与 Q 命题之间必须存在因果关系。

【例 11】 将给定的复合命题符号化：除非太阳从西边出来否则雪是黑的。

解：P：雪是黑的（假），Q：太阳从西边出来（假）。

$P \to Q$：除非太阳从西边出来否则雪是黑的。（真）

$\neg Q \to \neg P$：如果太阳不从西边出来那么雪就不是黑的。（真）

$Q \to P$：如果太阳从西边出来那么雪是黑的。（真）

当前件为0时，不论后件是0还是1，$P \to Q$ 真值总是1。可以说，这种运算上的规定表达了人类对未知世界的一种积极期待。

当后件为1时，不论前件是1还是0，$P \to Q$ 真值也总是1。也可以说，这种运算上的规定表达了人类对现实世界的一种肯定。

双条件词$\leftrightarrow$ 联结词“$\leftrightarrow$”用于表示两个命题之间“等值”的联结，汉语中的“当且仅当”，“P 是 Q 的充分必要条件”等命题都能用“$\leftrightarrow$”表示。我们将双条件词“$\leftrightarrow$”视为一个二元逻辑运算。

设 P 和 Q 为两个命题符号，$P \leftrightarrow Q$ 是 P 与 Q 的一种复合联结。读作“P 当且仅当 Q”。

$P \leftrightarrow Q$ 的真值情况如下表所列：

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

当且仅当 P 和 Q 的真值相同时，$P \leftrightarrow Q$ 的真值为1。否则 $P \leftrightarrow Q$ 的真值为0。

【例12】 将给定的复合命题符号化：大象是哺乳动物当且仅当大象是胎生的

解：P：大象是哺乳动物　Q：大象是胎生的

$P \leftrightarrow Q$：大象是哺乳动物当且仅当大象是胎生的。

异或词$\overline{\vee}$ （排斥或）联结词“$\overline{\vee}$”用于表示两个命题之间“排斥或”的联结，汉语中的“排斥或”也用“或”表示。我们将异或词“$\overline{\vee}$”视为一个二元逻辑运算。

设 P 和 Q 是两个命题符号，$P \overline{\vee} Q$ 是 P 与 Q 的一种复合联接。读作 P 异或 Q。

$P \overline{\vee} Q$ 的真值情况如下表所列：

P	Q	$P \overline{\vee} Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

当且仅当 P 和 Q 的真值相同时，$P \overline{\vee} Q$ 的真值为0。否则 $P \overline{\vee} Q$ 的真值为1。

【例13】 将给定的复合命题符号化：今晚我在家看电视或去剧场看戏。

P：我在家看电视。　Q：我去剧场看戏。

$P \overline{\vee} Q$：今晚我在家看电视或去剧场看戏。

从上述介绍可以看出，联结词不仅可以联结命题，也可以联结命题变元，更一般的它可以联结所有的命题符号。

设有一个命题符号的集合 S，在 S 集合上定义了若干个逻辑运算，那么由 S 及这些运算构成的运算系统称为命题逻辑演算系统。我们需要考虑的是，什么样的命题符号才

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com