

高等学校经济学管理学系列教材

经济数学方法与模型教程

● ● ● ● ● ● ● ●

郎艳怀 主 编
冯苏苇 董程栋 杨 勇 副主编



上海财经大学出版社

高等学校经济学管理学系列教材

经济数学方法与模型教程

郎艳怀 主 编

冯亦伟 董程栋 杨 勇 副主编



上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学方法与模型教程/郎艳怀主编. —上海:上海财经大学出版社, 2004. 10

(高等学校经济学管理学系列教材)

ISBN 7-81098-231-1/F·204

I. 经… II. ①郎…②冯…③董…④杨… III. ①经济数学-方法-高等学校-教材
②经济模型-高等学校-教材 IV. F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 090867 号

☐ 策 划 姜 勇

☐ 责任编辑 姜 勇

☐ 封面设计 周卫民

JINGJI SHUXUE FANGFA YU MOXING JIAOCHENG

经济数学方法与模型教程

郎艳怀 主 编

冯苏苇 董程栋 杨 勇 副主编

上海财经大学出版社出版发行

(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)

网 址: <http://www.sufep.com>

电子邮箱: webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

上海崇明裕安印刷厂印刷装订

2004 年 10 月第 1 版 2004 年 10 月第 1 次印刷

787mm×960mm 1/16 17 印张 361 千字

印数: 0 001—4 000 定价: 26.00 元

前言

经济数学方法与模型是经济类、管理类院校教学的基础课,许多院校的教学计划中都设有数学建模、金融建模等课程。

目前经济数学方法的教程很多,这些教程大都有这样的特点:虽然名为经济数学方法,但实际上主要是数学体系的阐述,与经济建模没有很大的联系,形式上则是数学公式和符号的直接运用,却简单地认为是数学在经济上的应用了。因此,学生即使学完这些教材,也很难熟练地应用到经济理论和实践中去。

作为在教学第一线从事数学方法、数学建模教学工作多年的教师,从本科的数学建模课程,以及研究生和博士生的数学方法课程中,我们发现经济研究中很需要数学方法的支撑,但目前已有的教学参考书,不适应经济类、管理类院校的教学需要。在多年的教学实践中,我们积累了一些经验,取得了较好的教学效果。现将我们的讲义整理出来,献给我们的学生,献给和我们一样探索的同行们。

本书结合我们多年的教学经验,根据财经类专业的特点,以经济学中涉及的数学方法为主线,以经济学中数学方法应用的经典范例为模型,详尽归纳不同的数学方法在经济领域的使用情况,是一本适合财经类学生学习的理论与实践相结合的教材。

《经济数学方法与模型教程》由上海财经大学应用数学系教师编写,其中郎艳怀承担引论、第四部分经济博弈论方法的编写,以及整个书稿的统稿等;

董程栋承担第三部分规划方法和第六部分模糊数学方法的编写;冯苏苇承担第一部分初等数学方法、第二部分微分方程与差分方程方法的编写;杨勇承担第五部分数理统计方法的编写。

鉴于我们的水平有限,书中难免存在错误和不当之处,恳请读者和教学工作者给我们提出宝贵意见,让我们一同来完成经济数学方法与模型课程的改进、完善工作,以期奉献给读者一本满意的教科书! E-mail: yhlang@mail.shufe.edu.cn。

在本书的编写过程中,我们得到了学校的重视和支持,以及上海财经大学出版社的大力协助,在此一并致谢!

编者

2004年10月

目 录

前 言	1
引 论	1

第一部分 初等数学方法

第一章 建模示例	9
1.1 选举中的席位分配	9
1.2 商业中心的影响范围	14
1.3 动物的身长和体重	16
1.4 房屋保温隔热的经济效益核算	18
本章小结	22
思考题	22

第二部分 微分方程与差分方程方法

第二章 微分方程方法	25
2.1 人口的增长	26
2.2 新产品的推销与广告	29
2.3 经济增长模型	34
2.4 常微分方程的平衡点及其稳定性	37

2.5 传染病模型.....	41
2.6 消费与积累的数学模型.....	47
2.7 捕食系统的 Volterra 方程	50
本章小结	53
思考题	53
 第三章 差分方程方法	55
3.1 差分方程的平衡点及其稳定性.....	57
3.2 市场经济中的蛛网模型.....	58
3.3 差分形式的阻滞增长模型.....	62
本章小结	65
思考题	65
 第三部分 规划方法	
 第四章 运筹学	69
4.1 运筹学概述.....	69
4.2 线性规划模型的标准形.....	71
4.3 线性规划模型的建立.....	73
4.4 线性规划模型的图解法.....	76
4.5 线性规划模型的单纯形法.....	79
4.6 计算机软件求解线性规划问题.....	86
本章小结	88
思考题	88
 第五章 非线性规划的概念和原理	89
5.1 非线性规划的实例及数学模型.....	89
5.2 无约束非线性规划问题.....	91
5.3 约束非线性规划问题.....	93
本章小结	98
思考题	98

第四部分 经济博弈论方法

第六章 完全信息静态博弈	103
6.1 博弈论的基本概念	104
6.2 纳什均衡	108
6.3 纳什均衡应用	112
6.4 混合战略和混合战略纳什均衡	117
本章小结	122
思考题	123
第七章 完全信息动态博弈	124
7.1 完全且完美信息动态博弈	124
7.2 子博弈完美纳什均衡	126
7.3 应用举例	128
本章小结	135
思考题	135
第八章 不完全信息静态博弈	136
8.1 静态贝叶斯博弈和贝叶斯纳什均衡	136
8.2 应用举例	140
本章小结	143
思考题	143
第九章 不完全信息动态博弈	144
9.1 完美贝叶斯均衡定义	144
9.2 信号博弈的完美贝叶斯均衡	149
9.3 应用举例	154
本章小结	161
思考题	162

第五部分 数理统计方法

第十章 统计量和抽样分布	165
10.1 总体和样本	165
10.2 统计量	167
10.3 抽样分布	171
本章小结	178
思考题	178
第十一章 参数估计	180
11.1 点估计	180
11.2 估计的优良性准则	187
11.3 参数的区间估计	190
本章小结	199
思考题	200
第十二章 假设检验	201
12.1 假设检验的基本思想和基本概念	201
12.2 单个正态总体参数的假设检验	207
12.3 两个正态总体参数的假设检验	211
12.4 拟合优度检验	217
本章小结	222
思考题	223
第十三章 回归分析	224
13.1 一元线性回归分析	224
13.2 多元线性回归分析	233
本章小结	238
思考题	238

第六部分 模糊数学方法

第十四章 模糊数学方法	243
14.1 模糊数学的起源	243
14.2 模糊集合论的基础知识	245
14.3 模糊数学的应用	249
14.4 模糊数学模型举例	252
本章小结	254
思考题	254
参考文献	259

引 论

“一种科学只有成功地运用数学时,才算达到了真正完善的地步。”

——马克思

一、数学与经济

经济学系统运用数学方法最早的例子,通常都认为是 17 世纪中叶英国古典政治经济学的创始人威廉·配第[(William Petty, 1623~1687)]的著作《政治算术》。但实际上,从 19 世纪中叶起,数学才真正开始与经济学结下不解之缘。1838 年,作为拉普拉斯(Laplace)和泊松(Poisson)的数学学生,以概率论研究开始其学术生涯的古诺(Cournot)发表了一本题为《财富理论的数学原理研究》的经济学著作。这本书中充斥了数学符号。对于今天的经济学专业的大学生来说,这自然已是司空见惯的。但是在古诺的时代,经济学家们则完全不能容忍这种“胡言乱语”。他们的反对迫使古诺对经济学沉默了 25 年。1863 年,古诺又用普通语言重写他的著作。书名中的“数学”与“研究”都回避了,而变成《财富理论的原理》。但数学家的严谨思维方法仍使这本著作遭到了冷遇。古诺的历史地位直到他去世 80 年以后才被充分肯定。正如德布鲁(Debreu)在他 1983 年的诺贝尔经济学奖讲演中所说:“如果要对数理经济学的诞生选择一个象征性的日子,我们这一行会以罕见的一致意见选定 1838 年,古诺是作为第一个建立阐明经济现象的数学模型的缔造者而著称于世的。”

真正奠定今天意义下的数理经济学基础的是备受称颂的(小)瓦尔拉斯,他在 1874 年前后提出了一般经济均衡理论。该理论使他成为所有经济学家中最伟大的一个。一般经济均衡的观念一直可以追溯到亚当·斯密,甚至更早。但被表达成瓦尔拉斯的联立方程组的形式,则应归功于瓦尔拉斯所受到的那些工程和数学的教育。商品的供给和需求及

其与价格的错综复杂关系,一旦用一些数学方程来刻画后,由这些方程的解所形成的理想经济状态也就随之而生,而它就是所谓的“瓦尔拉斯一般经济均衡”。瓦尔拉斯虽然正确地提出了一般经济均衡的数学框架,但是他的数学论证则完全是不可信的。1954年,第一个一般经济均衡模型的严格数学证明由阿罗和德布鲁提出,这是由于用来严格证明一般经济均衡存在的数学工具直到1911年才初露端倪,所谓的“布劳维(Brouwer)不动点定理”到那时才问世,而证明一般经济均衡所必要的布劳维不动点定理的推广——角谷不动点定理,则是到了1941年才出现。从1874年到1954年的这80年间,所谓数理经济学,几乎就等于一般经济均衡理论的数学研究。其中还使冯·诺伊曼这样的大数学家也投身其中,为它砌上一块基石。直到1959年,德布鲁发表了他的《价值理论:经济均衡的一种公理化分析》,正式宣告运用数学公理化方法的数理经济学的诞生。至此,数学在经济学中就不仅是一般的介入了,而是占领了一块理论经济学的领地。

帕累托(Pareto)是对理论经济学引进数学思想和方法最多的一人。他在这方面的成就完全可以与庞加莱在自然科学方面的成就媲美。这似乎耐人深思,其实只因为他是个在数学上训练有素的工程师。他的科学思想也好、科学方法也好,说到底首先是数学。他对一般经济均衡的研究几乎完全是数学研究。由此导出的所谓“帕累托最优条件”今天也与在经济学文献中一样频繁地出现在数学文献中。

虽然计量经济学也同样用数学方法来研究经济学,但与数理经济学不同的是:它是从实际数据出发,用数理统计方法,建立经济现象的数学模型;而数理经济学则是从一些经济假设出发,用抽象数学方法,建立经济机理的数学模型。前者用的是归纳法,后者用的是演绎法。

诺贝尔奖原来是既没有数学的、也没有经济学的份的。但是从1969年起,瑞典皇家学院开始设立诺贝尔经济学奖,旨在奖励“以科学研究发展静态的和动态的经济理论,以及对提高经济学分析水平有积极贡献的人士”。首届诺贝尔经济学奖就奖给了弗瑞希和另一位瑞典邻国的经济学家丁伯根。由于诺贝尔经济学奖强调科学性和分析水平,自然使经济学家中的数学家大大沾光。1970年的得主是萨缪尔森,他是位兴趣广泛、才气横溢的大经济学家,并在25岁就成为麻省理工学院的经济学教授。他对经济学的贡献如此之广,使得每个学习经济学的学生都会感到萨缪尔森无处不在。他写的经济学教科书从1948年出版起,年年再版,并且有几十种文字(包括中文)的译本。我们不能说萨缪尔森是完全因数学而得奖,但他的数学造诣确实非同一般。他在1937年作为学位论文写出、1947年正式出版的成名作《经济分析基础》是一本用严格的数学总结的数理经济学的划时代著作。他与多夫曼和索洛合著的《线性规划与经济分析》(1958)是又一本数理经济学的经典著作。他与索洛等一起合作研究的经济增长的数学理论,甚至成了使索洛获得1987年诺贝尔经济学奖的主要原因之一。他的另一个获得诺贝尔奖的大弟子就是那个只比他小5岁的克莱因。数学界把萨缪尔森也看成一名数学家。1973年的诺贝尔经济

学奖的得主是列昂惕夫。他的投入产出方法现在几乎已成了经济学常识。其实,投入产出不过是一种数学方法。1975年的诺贝尔经济学奖的得主之一是个完完全全的数学家。他就是前苏联的康托罗维奇,一个在实变函数、泛函分析和计算数学等多方面具有开创性贡献的大数学家。

实际上,经济学中数学的运用与经济学本身的发展已在一定程度上不可分割,并且这种程度正在越来越深。为什么数学会如此深入到经济学中去呢?对此,德布鲁的回答是:“坚持数学严格性,使经济理论公理化已经不止一次地引导经济学家对新研究的问题有更深刻的理解,并使适合于这些问题的数学技巧用得更好。这就为向新方向开拓,建立了一个可靠的基地。它使研究者从必须推敲前人工作的每一细节的桎梏中脱身出来。严格性无疑满足了许多当代经济学家的智力需要,因此,他们为了自身的原因而追求它,但是作为有效的思维工具,它也是理论的标志……还有另一个方面,经济理论的公理化已经向经济工作者提供他们能接受的高度有效的数学语言。这使得他们可以互相交流,并以非常经济的方式进行思考。与此同时,经济学家和数学家之间的对话已经变得更加频繁。像冯·诺伊曼那样,把他的研究精力的相当一部分放在经济问题上,这种一流数学家的例子已经不是独一无二的了。同样,经济理论也开始影响数学。其中最明显的例子是角谷定理、集值映射的积分理论、近似不动点计算的算法以及方程组的近似解的算法。”

经济学应用数学的起点是“生产最优化”。由于经典数学中的变分原理的研究和后来数学规划理论的发展,这方面的数学相当成熟。而生产最优化至少局部来看是实证经济学中的一个重要问题,它在数学上又恰好能归结为熟知的问题,从而数学就得到了非常成功的运用。其成功的标志之一是光线性规划已经为人类节约了上千亿美元。

经济学中更进一步的问题都要涉及多方利益的协调。于是经典的最优化数学就不够用了,从而导致冯·诺伊曼—摩尔根斯顿的博弈论和阿罗—德布鲁的一般经济均衡理论的出现。尽管它们能说明的问题至今还十分有限,但是,人们对群体的经济行为和有利害冲突的经济问题的认识大大深化了。与此同时,还有福利经济学和社会选择问题的研究,同样是对个体和整体的利害关系的讨论。由于成功地运用了数学公理化方法,出现了阿罗不可能性定理。人们可以对它有不同的理解,但它所揭示的深刻关系非数学方法是无能为力的。经过了近100年的研究,人们开始对经济中的竞争与合作的关系有了较清晰的了解。为此成功地动用了数学武器库中的各种武器。当需要在经济学问题中考虑不确定性时,随机数学就成为必要的数学工具。随机过程、数理统计在经济学上的成功运用,解决了人们在具有不确定性的环境下的经济行为问题。这个问题人们争论了200多年,至今还在继续。但如果不能成功地运用数学,这一争论是进行不下去的。

宏观经济学中的数学不能认为很成功。那些宏观经济模型都只抓住了一些相当表面的数量关系,人为因素太多,而缺乏机理性的刻画。虽然投入产出和计量经济学的专家们常常超大规模地来利用这些表层关系,人们对宏观经济的运行机制的认识仍然不太深刻。

经济增长理论和经济控制论希望能对宏观经济的运行在机理上有更多的了解,于是数学上就会出现各种微分方程。利用微分方程的理论,人们又可能描绘出一些经济图景,甚至可以试图来控制经济的最优运行。

在经济学家探索前进的道路上,“成功地运用数学”将永远可以作为经济学家手中的一个有利的工具!

二、数学方法

什么叫方法论?方法论就是把某种共同的发展规律和研究方法作为讨论对象的一门学问。英文“methodology”一词又译为“方法学”。众所周知,各门科学都有方法论。数学当然也有它自己的方法论。数学方法论是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问。

数学是一门工具性很强的科学,它和别的科学比较起来,还具有较高的抽象性等特征。为了有效地发展它、改进它、应用它或者把它很好地传授给学生,就需要对这门科学的发展规律、研究方法、发现与发明等法则有所掌握。因此,数学研究工作者、数学教师、科学研究工作者,以及高年级大学生、研究生等都需要掌握一些数学方法论。数学科学的发展规律可以从数学发展史的丰富材料中归纳分析出来。由于数学史是人类科学技术发展史的一个组成部分,数学发展的巨大动力源泉与社会生产实践及技术发展的客观要求紧密相连,因此,对数学发展规律的研究,如果撇开数学的内在因素不提,那就是属于宏观的数学方法论范畴。不考虑数学发展的外在推动力,只就数学内部体系结构中的特定问题来进行分析研究,需要考虑采取最有效的数学研究方法,需要懂得数学发现与数学创造等各种法则,这些属于研究工作者个人必须遵循的方法与法则的研究,称之为微观数学方法论。每一个科研工作者都必须掌握一些微观的数学方法论,才能有效地开展科研工作,获得丰硕成果。美籍匈牙利数学家波利亚(Polya)曾花数十年致力于“数学发现”与“解题思想方法”的研究。他的一些著作已被译成中文,特别值得重视的是他所著的《数学中的归纳与类比》一书。归纳法与类比法是数学方法论中最基本的方法之一,用好了能获得新的成果,乃至完成重要发现。

如何用好归纳法与类比法?首先,要有敏锐的观察力,才能从众多的特例中归纳总结出一般性命题来。“特例”有时是现成的,有时却需要故意构造出来。其次,需要有较丰富的数学知识,知识面越广,在数学思维中可用作类比推理的题材就越多,因此,能形成普遍命题的机会也就越多。

三、数学模型

“数学模型方法”(mathematical modeling method)简称MM方法,它不仅是处理数学理论问题的一种经典方法,而且也是处理科学和技术领域中各种实际问题的一般数学

方法。现代电子计算机的广泛应用和科学技术的数学化浪潮,使得 MM 方法已经非常广泛地应用于自然科学、工程技术科学与社会科学的一切领域中。例如,经济科学、军事科学、交通运输等管理科学领域,都应用着 MM 方法。

粗略来说,数学模型是针对或参照某种事物系统的特征或数量相依关系,采用形式化数学语言,概括地或近似地表述出来的一种数学结构。这种数学结构应该是借助于数学概念和符号刻画出来的某种系统的纯关系结构。所谓纯关系结构是指已经扬弃了一切与关系无本质联系的属性后的系统而言,因此,在数学模型的形成过程中,已经用了抽象分析法,也可以说,抽象分析法是构造数学模型的基本手段。

从广义上讲,数学中各种基本概念,例如实数、向量、集合、群、环、域、范畴、线性空间、拓扑空间等都可称为 MM,因为它们都是以各自相应的现实原型(实体)作为背景而加以抽象出来的最基本的数学概念。这些概念可称为原始的 MM。广义的解释是凡一切数学概念、数学理论体系、各种数学公式、各种方程式(代数方程,函数方程、微分方程、差分方程,积分方程等)以及由公式系列构成的算法系统等都可称之为 MM。

狭义的解释是只有那些反映特定问题或特定的具体事物系统的数学关系结构才称为 MM。例如,在应用数学中,MM 一词通常都作狭义解释,而构造 MM 的目的就是为了解决具体实际问题。

1. 数学模型的类型

(1)确定性数学模型,这类模型所相应的实体对象(又称背景对象)具有确定性或固定性,对象之间又具有必然的关系。这类模型的表示形式可以是各种各样的方程式、关系式、逻辑关系式、网络图等。所使用的方法是经典数学方法。

(2)随机性数学模型,这类模型的背景对象具有或然性或随机性,MM 的表示工具是概率论、过程论及数理统计学等方法。

(3)模糊性数学模型,这类模型所对应的实体对象及其关系具有模糊性。MM 的基本表示工具是 Fuzzy 子集合理论和 Fuzzy 逻辑。

2. MM 的构造过程

数学模型与现实原型的关系是反映与被反映的关系。因为 MM 的构造必须经过抽象分析过程,即经过对现实原型扬弃次要环节的过程,因此,MM 和现实原型只能具有相对一致性,事实上往往只能在基本环节上(这些环节或关系结构是能借助数学形式表现出来的)有着近似的一致性。

3. 构造 MM 的步骤

第一步:对所研究的实际问题即现实原型,要分析其对象与关系结构(包括量变因果关系)的本质属性,以便确定其 MM 的类别。

第二步:确定所要研究的系统并抓住主要矛盾。为了使用 MM 方法,需要考察问题所属系统。为了建立 MM,必须选择具有关键性作用的变量或量的关系进行考察。这就

是说,要抓住主要因素,因为 MM 所反映的应该是主要因素间的关系结构。

第三步:进行数学抽象,对事物对象及其对象间的关系进行抽象,要尽可能使用数学概念、数学符号和数学表达式来表现事物对象及关系。

第四步:构成数学模型之后,还必须把从 MM 上分析得出的理论解答(数学推论)返回到现实中去,看看能否确实回答实际问题。

4. 模型的特点

(1) 在 MM 上应具有严格推导(逻辑推理)的可能性以及导出结论的确定性。如果没有这一特点,那么,MM 就没有什么用处了。

(2) MM 相对于较复杂的现实原型来说,应该具有化繁为简、化难为易的特点。因此,在用以解决实际问题时,应该允许有一定的误差范围。好的 MM 还应该具有估计误差范围的性能。

5. 培养构造 MM 的能力

从数学模型的性质要求和构造方法来看,一个人构造 MM 的能力至少包括四个方面:一是理解实际问题的能力;二是抽象分析的能力;三是运用数学工具的能力(包括运用数学形式语言的能力);四是通过实践加以验证的能力。

第一部分

初等数学方法