总主编/蔡上鹤

特别合作 sina 新浪网 中学生学习报

Magic

魔力！高效！经典！权威！

魔法数学 MAGIC MATH

魔法数学

Magic Math

专题突破

直线与圆的方程

体验征服学习考试精彩感觉！

高中版

丛书主编/严文科

请认准此防伪标识

补上你知识木桶上最短的那一块

- 最全面、最创新的素质教育
- 最科学、最优化的学习流程
- 最新颖、最独到的情境设置

著名节目主持人
魔法教辅品牌代言人 何炅

长征出版社
CHANGZHENG PRESS

总主编/蔡上鹤

Magic

权威!

魔法数学

魔法数学

Magic Math

专题突破

直线与圆的方程

高中版

从书主编/ 严文科

本册主编 李 慧 张 笋 孙江昆

编 委 于春明 关清波 杜敦杰

于文君 朱 林 邵承青

孙炳术 周正实

长征出版社

CHANGZHENG PRESS

图书在版编目（CIP）数据

魔法数学专题突破. 高中：直线与圆的方程/李慧，张笋，孙江昆主编.
—北京：长征出版社，2004

ISBN 7-80015-814-4

Ⅰ. 魔… Ⅱ. ①李… ②张… ③孙… Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 044320 号

魔法数学专题突破高中版

主创设计 / 魔法教育发展研究中心
电　　话 / 010－80602977
网　　址 / http：//www.magic 365.com.cn

出　　版 / 长征出版社
（北京市西城区阜外大街 34 号　邮编：100832）
行销企划 / 北京九恒世纪文化有限公司
（服务热线：010－80602977）
经　　销 / 全国新华书店
印　　刷 / 北京四季青印刷厂
开　　本 / 880×1230　1/32
字　　数 / 4160 千字
印　　张 / 130 印张
版　　次 / 2004 年 6 月第 1 版
印　　次 / 2004 年 6 月第 1 次印刷
书　　号 / ISBN 7-80015-814-4/G・313
全套定价 / 192.00 元

Magic

魔法系列丛书

Magic

致读者

在新的世纪，国内基础教育正发生着日新月异的变化，广大教师和学生对中学教辅读物出版创新的呼声也此起彼伏：中学教辅需要精品，需要品牌，需要从更远、更新的角度重新打造！在这一大背景下，魔法英语以其独特的品质和魅力赢得了读者的尊重和认可，应接不暇的咨询电话和雪片般的订单让我们更加深刻地体会到：中国的基础教育太需要“魔法”这样卓越的图书了！

数以万计的中学教师和学生问我们：你们何时出版“魔法语文”“魔法数学”“魔法物理”“魔法化学”等其他学科的图书？

肩负着社会的责任，带着广大中学师生的期盼，我们联合了美国蒙登戈国际语言研究中心、英国剑桥国际语言研究院等国内外数十所教育研究机构，邀请了张定远、蔡上鹤、薄冰、张同恂、程耀尧、刘真、杨启楠、臧嵘、刘淑梅等十余名基础教育界权威、国内顶级教材专家，在北京四中、黄冈中学、华东师大附中、清华大学附中、北大附中等国内百余所重点中学的鼎力协助下，隆重推出了以《魔法英语》为龙头的《魔法语文》《魔法数学》《魔法物理》《魔法化学》《魔法生物》《魔法政治》《魔法历史》《魔法地理》系列魔法图书。

“享受学习每一刻！”是魔法系列图书最基本的理念，我们希望把魔法系列图书这一成功的理念推广到中学教育的每一个学科、每一个年级、每一个领域。

一千多位教育专家及知名特高级教师联手缔造的魔法系列图书，已经走在中学教辅图书的最前沿，成为一个全新的中学教辅品牌！一个真正由专家打造的具有国际品质的中学教辅品牌！

我们希望给中学生提供一个崭新的学习平台，为每位读者付出的时间和殷切的期待提供丰厚的回报。我们力求通过不懈的努力，让魔法系列图书解放中学生的学习，解放中学生的考试，让学习变得“轻松、快乐、高效”的思想光芒照耀每位读者！

我们与读者的心是相通的，同广大一线教师的心是相通的。现在，我们付出的每一份努力，都得到了广大教师和读者的支持和肯定。面对这些勉励和关怀，我们将会以百倍的努力来报答。未来我们会做得更好，这是我们的目标，也是我们不变的承诺。

魔法系列图书愿做中学生学习的最佳助手，最贴心的朋友！让魔法系列图书伴随着我们的幸福、快乐和回忆，一起成长！

魔法教育发展研究中心
2004.6

Magic

魔法数学

前　言

Preface

根据教育专家多年的研究发现，几乎每位学生在学习过程当中都有薄弱的学科，每一学科中都有薄弱的专题，而正是这些薄弱学科、薄弱的专题阻碍了学生的成功。“亡羊补牢，未为迟也。”为了帮助更多中学生在高考中走向成功，我们组织了全国数十名有多年教学和研究经验的特高级教师、教研员，在张定远、薄冰、蔡上鹤、张同恂、程耀尧、刘真、杨启楠、臧嵘、刘淑梅等中学教育界权威、教材专家的悉心指导下，在北京四中、黄冈中学、华东师大附中、清华大学附中、北大附中等国内百余所重点中学的鼎力协助下，精心编写了本系列图书。

本丛书在编写过程中秉承“科学划分、高效实用”的编写理念，尊重现行教材体系，依据教学大纲与考试大纲，结合近几年数学命题实践及课堂教学实际，将高中数学专题科学地设置为:《集合与简易逻辑》《函数》《数列》《三角函数》《平面向量》《不等式》《直线与圆的方程》《圆锥曲线方程》《空间直线与平面》《空间向量与简单几何体》《排列、组合、二项式定理》《概率统计(理)》《概率统计、导数(文)》《极限、导数、复数(理)》《高中数学思想方法》十五个分册。

本书具备如下特点：

细分专题，针对性强：适合高中不同年级的学生对自己的薄弱学科、薄弱专题集中复习，不受年级、教材限制。

内容详尽，重点突出：以大纲为面，考纲为线，所有该专题的内容全面详尽，重点难点内容突出。

表述灵活，直观高效：本书灵活使用图、表、眉批、旁注等多种表达方式进行内容阐述，使平常枯燥的学习过程变得直观、具体、高效。

信息敏锐，材料新颖：本书采用了大量的前沿性、趣味性、现实性资料，结合最新的高考信息和命题趋势，从最新的角度组织学习和复习，具有很强的实用性和超前性。

Magic

前 言

Preface

丛书栏目功能定位如下：

【教考动态】紧扣教学大纲和考试大纲，总结分析中学教学教材改革的新趋势、新动向，突出最新考试信息和对未来高考命题走向的预测，有很强的指向性。

【知识精讲】对所涉及科目的知识点，高度集中地作全面、详尽地分析，以利学生在有限的时间里，集中补差、补弱，系统有效地提高自己的知识能力，补上自己知识木桶上最短的那一块。

【经典例题】针对【知识精讲】中的内容，重点精选一线教师多年积累的最典型例题进行分析，与知识精讲栏目形成互动，总结规律，点拨技巧，使学生融会贯通，举一反三，触类旁通。

【思维跨越】对重点、难点和热点延伸，使学生既从点上把握，又能够纵横扩展，最终对所学知识能够达到点面结合，灵活运用。

【范例剖析】针对【思维跨越】中的内容，对综合性强的拓展题作解析，结合最新的《考试大纲》，评价每道题的命题角度和能力层级要求，分析解题过程，点拨解题技巧。

【高考连线】收集了与本节内容相关的近几年的高考题并进行简要解析，使学生了解高考，感受高考，为决胜高考做准备。

【专题训练】专题训练由三个层次组成，第一层次的基础训练，重在基础；第二层次的拓展训练，重在提高；第三层次的综合训练，重在运用。通过这三个层次的练习从而使知识的训练由浅入深，阶梯形提高，最终达到把握基础知识，培养和提高学生的综合素质和应考能力。

尽管我们在编写过程中，本着对学生高度负责的态度，处处把关，但如果还有疏漏，诚请读者指正。

编　者

2004 年 6 月于北京

Magic

魔法数学

目　录

Contents

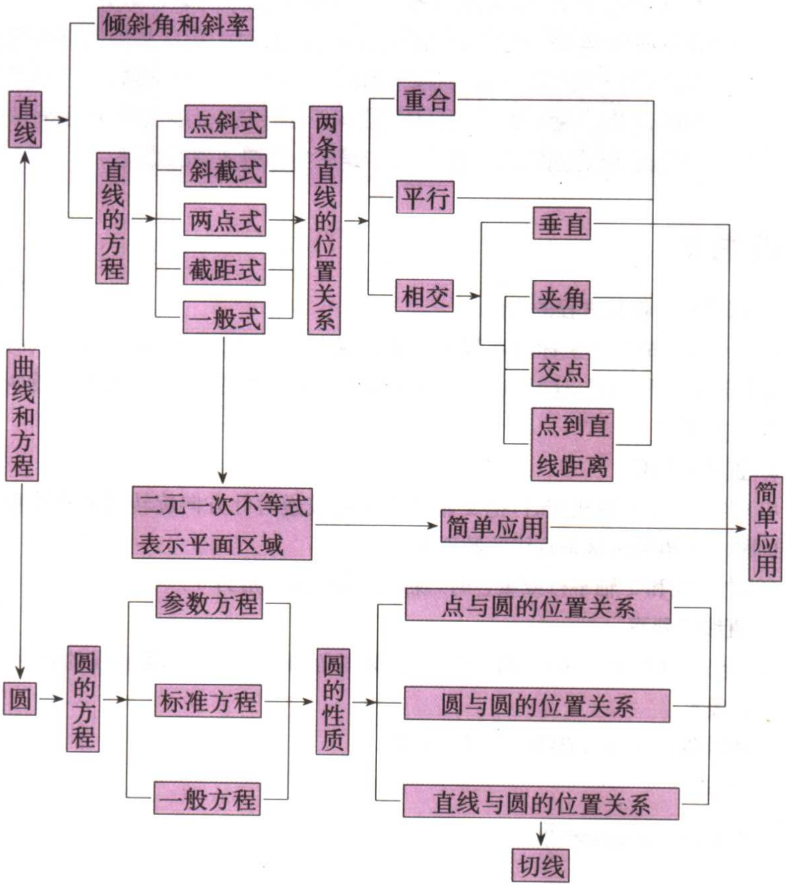
Magic

目　录

Contents

直线与圆的方程

知识网络构建



第一讲　直线的方程

教考动态

1. **教考要求**:(1)理解直线的倾斜角和斜率的概念,掌握过两点的直线的斜率公式;(2)掌握由一点和斜率导出直线方程的方法,掌握直线方程的点斜式、两点式、一般式,并能根据条件熟练地求出直线的方程.
2. **命题动向**:本章节是解析几何的基础部分,其内容在各类试题中均能涉及.试题一般为选择题,且属于容易题,有时也有解答题,试题难度为中档题,容易入手和计算.近几年很少出现单纯的直线试题,而是将该知识点与圆、圆锥曲线结合来考查,也是一个值得注意的倾向.

知识精讲

1. 直线的方程和方程的直线

以一个方程的解为坐标的点都是某条直线上的点,反过来,这条直线上的点的坐标都是这个方程的解,这时,这个方程就叫做这条直线的方程,这条直线就叫做这个方程的直线.

2. 直线倾斜角

(1)当直线和 x 轴相交时,把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到和直线重合时所转的最小正角叫做这条直线的倾斜角;

(2)当直线和 x 轴平行或重合时,规定直线的倾斜角为 $0°$.

3. 直线的斜率

(1)定义:倾斜角不是 $90°$的直线,它的倾斜角的正切叫做这条直线的斜率,通常用字母 k 表示.

当倾斜角是 $90°$时,直线的斜率不存在.

(2)公式:

定义式:$k=\tan\alpha(\alpha\neq\frac{\pi}{2})$

两点式:$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_2\neq x_1)$

(x_1,y_1),(x_2,y_2)是直线上的任意两点且 $x_1\neq x_2$.

(3)倾斜角和斜率的关系

当 $k\geqslant 0$ 时，$\alpha=\arctan k$；当 $k<0$ 时，$\alpha=\pi+\arctan k=\pi-\arctan(-k)$

4. 直线的方程

方程名称	已知条件	方程形式	适用范围
点斜式	(x_0,y_0)、k	$y-y_0=k(x-x_0)$	斜率存在的直线
斜截式	k、b	$y=kx+b$	斜率存在的直线
两点式	(x_1,y_1)、(x_2,y_2)	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ $(x_1\neq x_2,y_1\neq y_2)$	与坐标轴不平行的直线
截距式	a、b	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a\neq 0,b\neq 0)$	不过原点或与坐标轴不平行的直线
一般式		$Ax+By+C=0$ (A、B 不全为 0)	所有直线

其中，上表中的 a 叫做直线在 x 轴上的截距，即直线与 x 轴交点的横坐标；b 叫做直线在 y 轴上的截距，即直线与 y 轴交点的纵坐标.

特别注意：截距≠截得的距离

经典例题

例 1 分别根据以下条件求直线的斜率或倾斜角.

(1)$\alpha=30^\circ$；(2)$\alpha=\frac{5\pi}{6}$；(3)$\alpha=90^\circ$；(4)$\alpha=2$；(5)$k=1$；(6)$k=-2$.

解：(1)$k=\frac{\sqrt{3}}{3}$；(2)$k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$；(3)k 不存在；(4)$k=\tan 2$；(5)$\alpha=45^\circ$；(6)$\alpha=\pi-\arctan 2$

例 2 根据条件分别写出直线的方程.

1. 斜率是$\sqrt{3}$，过点 $A(8,-2)$；
2. 斜率是-4，在 y 轴上的截距为 7；
3. 经过两点 $A(-1,8)$、$B(4,-2)$；
4. 在两坐标轴上的截距分别是 5、-2.

解析：根据题意，分别选用对应形式求解.

1. 点斜式：$y-(-2)=\sqrt{3}(x-8)$，即$\sqrt{3}x-y-2-8\sqrt{3}=0$

2. 斜截式：$y=-4x+7$，即 $4x+y-7=0$

3. 两点式：$\dfrac{y-8}{(-2)-8}=\dfrac{x-(-1)}{4-(-1)}$，即 $2x+y-6=0$

4. 截距式：$\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{(-2)}=1$，即 $2x-5y-10=0$

注意：通常情况下，求直线方程，最后都要转化为直线的一般式.

思维跨越

直线的方程应注意以下几个问题：

1. 利用函数单调性，将斜率与倾斜角进行转化；

2. 90°的倾斜角与斜率的存在性；

3. 根据不同的条件选用合适的方程形式写出直线的方程；通常情况下选用直线的特殊式求解，而非一般式.

4. 方程各种形式的转化及其与斜率、倾斜角的关系.

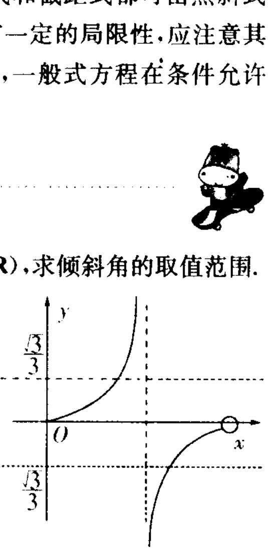
5. 直线方程的点斜式、斜截式、两点式和截距式都是直线方程的特殊形式. 在特殊形式中，点斜式是最基本、最重要的，因为斜截式、两点式和截距式都可由点斜式推出，直线方程的特殊形式都尤其明显的几何意义，但都有一定的局限性，应注意其适用范围和条件. 任何特殊形式的方程都可以化为一般式，一般式方程在条件允许的情况下，也可化为特殊形式.

范例剖析

范例 1　已知直线 l 的方程是 $x\cos\theta+\sqrt{3}y-2=0(\theta\in\mathbf{R})$，求倾斜角的取值范围.

解：$k=-\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}$，$\because\theta\in\mathbf{R}$

$\therefore -1\leqslant\cos\theta\leqslant1$，$\therefore k\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$，即 $k\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$，根据正切函数单调性，可知倾斜角 $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right)$

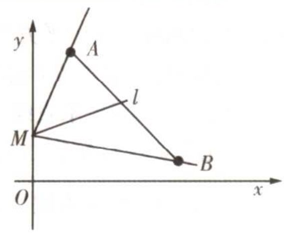


例 1 图

探究提升

本题考查了倾斜角与斜率的关系，把直线的斜率，倾斜角和三角函数中的已知三角函数值(范围)求角的值(范围)问题结合形成的题型，是一种较典型的题目，即可考查有关直线方程的知识，又可考查倾斜角的范围，在二者的转化中有时会涉及反三角表示，故结合图形，数形结合.

范例 2 已知直线 l 过点 $M(0,2)$ 且与以两点 $A(1,4)$，$B(3,1)$ 为端点的线段 AB 相交，求直线 l 斜率的范围及倾斜角的范围.



例 2 图

解: 如图，$k_{MA}=\frac{4-2}{1-0}=2$，$k_{MB}=\frac{1-2}{3-0}=-\frac{1}{3}$，数形结合，可知 $k\in[-\frac{1}{3},2]$ 由斜率与倾斜角的图像可得 $\alpha\in[0,\arctan 2]\cup[\pi-\arctan\frac{1}{3},\pi)$

探究提升

本例求斜率范围可把握如下原则，如果在运动的过程中倾斜角的变化过程跨越了 90°，则斜率范围的形式是 $(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$，反之，只要不跨越 90°，形式为 $[a,b]$.

范例 3 直线 l 经过点 $(3,2)$，且在两坐标轴上的截距相等，求直线 l 的方程.

分析: 可利用点斜式求解，也可利用截距式求解.

解法一: 由于直线 l 在两轴上有相同的截距，因此直线不与 x，y 轴垂直，斜率存在，且 $k\neq 0$

设直线方程为 $y-2=k(x-3)$，令 $x=0$，则 $y=-3k+2$ 令 $y=0$ 则 $x=3-\frac{2}{k}$

由题设可得 $-3k+2=3-\frac{2}{k}$，解得 $k=-1$，或 $k=\frac{2}{3}$

所以，l 的方程为 $y-2=-(x-3)$ 或 $y-2=\frac{2}{3}(x-3)$

故直线 l 的方程为 $x+y-5=0$ 或 $2x-3y=0$

解法二: 由题设，设直线 l 在 x，y 轴的截距为 a

若 $a=0$，则 l 过点 $(0,0)$，$(3,2)$

∴l 的方程为 $y=\frac{2}{3}x$，即 $2x-3y=0$

若 $a\neq0$，则设 l 为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$.

注意：截距式应当分截距 $=0$ 和截距 $\neq0$ 两种情况讨论.

由 l 过点 $P(3,2)$，知 $\frac{3}{a}+\frac{2}{a}=1$，故 $a=5$.

∴l 的方程 $x+y-5=0$，综上所述，直线 l 的方程为 $2x-3y=0$ 或 $x+y-5=0$.

范例 4　过点 $(-5,-4)$ 作一直线 l，使它与两坐标轴相交且与两坐标轴所围成的三角形面积为 5 个平方单位，求直线 l 方程

分析：此题中直线 l 满足两个条件：(1) 过点 $(-5,-4)$.(2) 与坐标轴围成的三角形面积为 5，所以要求直线 l 的方程，有两条路可走，一是用点斜式，先求 k；二是用截距式，先求 a,b，显然第二种过程较为简单.

解：设直线 l 的方程是 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a\neq0,b\neq0)$

∵直线 l 经过点 $(-5,-4)$

∴$\frac{-5}{a}+\frac{-4}{b}=1$，即 $-5b-4a=ab$，又直线 l 与两坐标轴围成的三角形面积为 5.

∴$\frac{1}{2}|a|\cdot|b|=5$，$ab=\pm10$

解方程组 $\begin{cases}-5b-4a=ab\\ab=\pm10\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-\frac{5}{2}\\b=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=5\\b=-2\end{cases}$

故所求直线 l 的方程是 $8x-5y+20=0$ 或 $2x-5y-10=0$.

范例 5　直线 l 过点 $P(2,1)$ 分别交 x，y 轴的正半轴于 A，B 两点，分别求满足条件的直线 l 的方程

(1) $\triangle AOB$（O 为原点）面积最小时；

(2) $|AP|\cdot|BP|$ 最小时.

(1) **解法一**：设 $A(a,0)B(0,b)$ 由题意可得 $a>0$，$b>0$ 设直线 l 方程为：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab$

∵直线 l 过点 $P(2,1)$，代入得 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$，又 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{2}{ab}}$

即 $1\geqslant2\sqrt{\frac{2}{ab}}$，$ab\geqslant8$

∴$S_{\triangle AOB}\geqslant\frac{1}{2}\times8=4$　当且仅当 $\frac{2}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$ 即 $a=4$，$b=2$ 时取等号.

此时 $l:\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 即 $x+2y-4=0$

解法二: 由 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$ 得 $\frac{1}{b}=\frac{a-2}{a}$，$b=\frac{a}{a-2}$

$$\therefore S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{a-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a-2+2)^2}{a-2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a-2)^2+4(a-2)+4}{a-2}$$

$$=\frac{1}{2}(a-2+\frac{4}{a-2}+4)$$

$\geqslant\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{4}+4)=4$（$\because b=\frac{a}{a-2}>0\quad\therefore a-2>0$） 当且仅当 $a-2=\frac{4}{a-2}$

即 $a=4$，$b=2$ 时取等号，此时 $l:\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 即 $x+2y-4=0$

解法三: 设直线 l 方程为：$y-1=k(x-2)$ $k<0$

令 $y=0$ 得 $x=2-\frac{1}{k}$

令 $x=0$ 得 $y=1-2k$

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}(2-\frac{1}{k})(1-2k)=\frac{1}{2}[4+(-\frac{1}{k})+(-4k)]\geqslant\frac{1}{2}(4+2\sqrt{4})=4$

当且仅当 $(-\frac{1}{k})=(-4k)$ 即 $k=-\frac{1}{2}$（$\because k<0$）时取等号，此时 $l:x+2y-4=0$

(2)**解法一:** 把题(1)中 $b=\frac{a}{a-2}$ 代入

$$|PA|\cdot|PB|=\sqrt{(a-2)^2+1}\cdot\sqrt{4+(b-1)^2}$$

$$=\sqrt{[(a-2)^2+1][4+(\frac{a}{a-2}-1)^2]}$$

$$=\sqrt{[(a-2)^2+1][4+\frac{4}{(a-2)^2}]}$$

$$=2\sqrt{(a-2)^2+\frac{1}{(a-2)^2}+2}\geqslant2\sqrt{2+2}=4$$

当且仅当 $(a-2)^2=\frac{1}{(a-2)^2}$，即 $a=3$，$b=3$ 时取等号，此时 $l:x+y-3=0$

解法二: $|PA|\cdot|PB|=\sqrt{(2-\frac{1}{k}-2)^2+1}\cdot\sqrt{4+(1-2k-1)^2}$

$$=\sqrt{(\frac{1}{k^2}+1)(4+4k^2)}=2\sqrt{k^2+\frac{1}{k^2}+2}\geqslant2\sqrt{2+2}=4$$

当且仅当 $k^2=\frac{1}{k^2}$，即 $k=-1$ 时取等号，此时 $l:x+y-3=0$

解法三：过 P 做 $PC\perp x$ 轴于 C，$PD\perp y$ 轴于 D

$\therefore\angle BAO=\theta,\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

则 $|PA|=\frac{1}{\sin\theta},|PB|=\frac{2}{\cos\theta}$

$\therefore|PA|\cdot|PB|=\frac{2}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{4}{\sin2\theta}\geqslant4$

当 $\sin2\theta=1,\theta=\frac{\pi}{4}$ 时最小，$k=\tan(\pi-\frac{\pi}{4})=-1$ 时取等号，此时 $l:x+y-3=0$

变式题：$|OA|+|OB|$ 最小时，l 的方程.

高考还会这样考

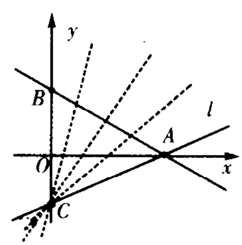
1 (2002 北京文)若直线 $l:y=kx-\sqrt{3}$ 与直线 $2x+3y-6=0$ 的交点位于第一象限，则直线 l 的倾斜角的取值范围是(　　)

A $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$　　B $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$　　C $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$　　D $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$

解析：选 B.

解法一：求出交点坐标，再由交点在第一象限求倾斜角的范围.

由 $\begin{cases}y=kx-\sqrt{3}\\2x+3y-6=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{3(2+\sqrt{3})}{2+3k}\\y=\frac{6k-2\sqrt{3}}{2+3k}\end{cases}$



第 1 题图

$\because$ 交点在第一象限，$\therefore\begin{cases}x=\frac{3(2+\sqrt{3})}{2+3k}>0\\y=\frac{6k-2\sqrt{3}}{2+3k}>0\end{cases}$ 解得 $k>\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$ 倾斜角范围是 $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$.

解法二：如图，直线 $2x+3y-6=0$ 过点 $A(3,0)$，$B(0,2)$，直线 l 必过点 $C(0,-\sqrt{3})$，当直线 l 过 A 点时，两直线的交点在 x 轴上，当直线绕点 C 逆时针旋转时，交点进入第一象限，从而得出结果.