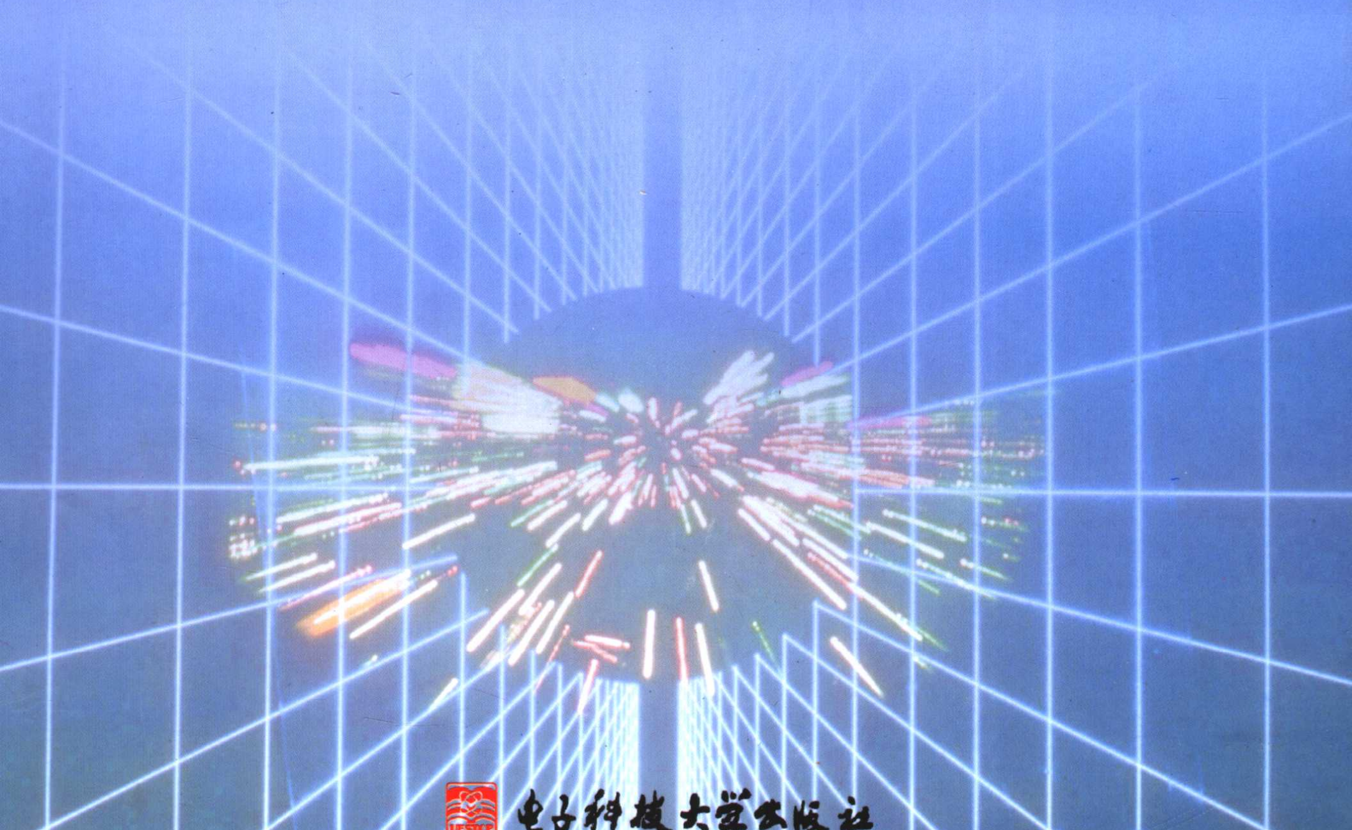
21世纪高等教育系列教材

大学物理疑难点剖析与综合能力培养

魏英智 郭铁梁 孙晓楠 编著



电子科技大学出版社

21世纪高等教育系列教材

大学物理疑难点剖析与综合能力培养

魏英智　郭铁梁　孙晓楠　编著

电子科技大学出版社

内容提要

本书是根据国家教育部大学物理课程教学指导委员会制订的大学物理教学基本要求，结合编著者在物理教学中长期积累的经验和立项研究的成果编写的。全书包括力学、热学、电磁学、振动与波动、波动光学、狭义相对论、量子物理等内容。各章又分为知识点总结、疑难点剖析、典型题举例、综合能力题等部分。全书共收集500多道典型例题，并给出了较为详尽的解答。本书还编写了综合能力题，以帮助学生更好地掌握物理学的基本概念、基本规律和方法，学会科学地思维，培养探索、创新精神。

本书可作为理工科大学生学习大学物理课程的教学参考书，也可供报考研究生的学生使用和各类高等院校从事物理教学的教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理疑难点剖析与综合能力培养 / 魏英智，郭铁梁，孙晓楠编著.
—成都：电子科技大学出版社，2006.3
(21世纪高等教育系列教材)
ISBN 7-81114-080-2

Ⅰ.大… Ⅱ.①魏…②郭…③孙… Ⅲ.物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.04

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第020523号

21世纪高等教育系列教材

大学物理疑难点剖析与综合能力培养

魏英智　郭铁梁　孙晓楠　编著

出　　版　电子科技大学出版社(成都市建设北路二段四号　邮编610054)
责任编辑　张致强
发　　行　新华书店
印　　刷　安徽蚌埠市广达印务有限公司
开　　本　787×1 092mm　1/16　**印张**　14.25　**字数**　368千字
版　　次　2006年3月第一版
印　　次　2006年3月第一次印刷
书　　号　ISBN 7-81114-080-2 / O·4
印　　数　1—5000册
定　　价　21.00元

前　言

目前，对人才的培养，都十分重视素质的提高，注重培养学生发现问题、分析问题和解决问题的能力，特别是如何提高学生的创新能力。为了适应这种新形势，人们不断进行教学内容、教学方法和教学手段的改革。而在这其中，教学内容的改革最为活跃。针对传统教学内容中的不足，补充一些能提高学生综合素质的内容，显得至关重要。而物理学在培养学生综合能力方面，又起着举足轻重的作用，它是一门重要的基础科学，是整个自然科学的基础和当代高新技术发展的基础，因此，在培养学生创新意识和科学素质中具有重要的地位。

我们根据国家教育部大学物理课程指导委员会对普通物理课程的基本要求，结合在物理教学中长期积累的经验编写了这本《大学物理疑难点剖析与综合能力培养》。除了注重对基本概念、基本规律和方法的归纳总结之外，还对教学中的一些疑难点进行了详细剖析。特别是在选择典型例题和习题方面，着重选一些从生产实际中提炼出的理想模型，在培养学生分析能力和计算能力的同时，又能使学生认识各种物理规律在实际应用中的价值。其中，每章都附有综合能力题，这些题大多数是实际生活、生产中的真空问题，学生在解这些问题时，完全可以自己去近似或定性建立模型，充分发挥各自的想象力和创造力，这将能大大地提高学生解决实际问题的能力。

考虑到各个层面学生对大学物理的需求不同，我们还选择了一些十分基本的例题和习题，力图帮助学生建立起清晰的物理图像、理清解题思路、掌握解题中的物理方法和数学方法。同时，还在深度和广度上做了考虑，使本书既可作为理工科大学生学习大学物理的参考书，也可供专科生和物理教师参考。

本书由黑龙江科技学院魏英智、郭铁梁、孙晓楠编著，其中郭铁梁编写了第 1 ～ 6 章，魏英智编写了第 7 ～ 12 章、第 15 章，孙晓楠编写了第 13 章、第 14 章、第 16 ～ 18 章，在本书的编写过程中，哈尔滨工程大学孙秋华教授、东北林业大学马永轩副教授给予了指导并提出了许多宝贵意见。全书由黑龙江科技学院赵志洲教授负责统稿并最终定稿。

编著此书，是一种尝试，希望读者能从中受益。由于编著者水平有限，难免有疏漏和不足之处，恳请广大读者提出宝贵意见，以便我们今后进一步改进。

编著者

2006.1

目　　录

第一章　质点运动学

一、知识点总结

1. 质点运动的描述

(1) 位置矢量：$\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$

(2) 位移矢量：$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$

(3) 速度矢量：
$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$
$$= v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$$

(4) 加速度矢量：
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$
$$= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$
$$= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$
$$= a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

注：以上物理量为矢量，应按矢量运算法则进行计算。

2. 几种常见的运动

(1) 匀变速直线运动：
$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

(2) 斜抛运动(见图 1-1)：
$$a_x = 0,\ \boldsymbol{a} = a_y\boldsymbol{j} = -g\boldsymbol{j}$$
$$v_x = v_0\cos\alpha,\ v_y = v_0\sin\alpha - gt$$
$$x = v_0 t\cos\alpha,\ y = v_0 t\sin\alpha = \frac{1}{2}gt^2$$
$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$
$$= (v_0 t\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j}$$

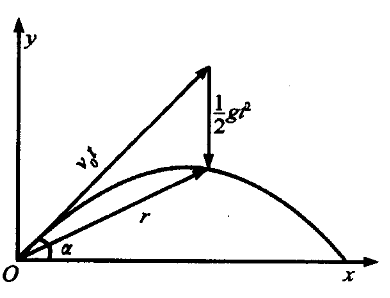


图 1-1

(3) 圆周运动：

角速度：$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

角加速度：$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

加速度：$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$

法向加速度：$a_{\mathrm{n}} = \omega^2 r = \dfrac{v^2}{r}$　（法向加速度由速度方向发生变化引起）

切向加速度：$a_{\mathrm{t}} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\alpha$　（切向加速度由速度大小发生变化引起）

(4) 相对运动：$\boldsymbol{v}_{绝对} = \boldsymbol{v}_{相对} + \boldsymbol{v}_{牵连}$

3. 运动学的两类问题

(1) 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_0$，求运动方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$—— 积分。

(2) 已知运动方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$，求 $\boldsymbol{v}(t)$、$\boldsymbol{a}(t)$—— 求导。

二、疑难点剖析

疑难点 1　$|\Delta\boldsymbol{r}|$ 与 Δr、$|\Delta\boldsymbol{v}|$ 与 Δv 各有何区别？

解析　如图 1-2 所示，$|\Delta\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$，$\Delta r = r_2 - r_1$，$|\Delta\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1|$，$\Delta v = v_2 - v_1$，即在一般情况下，得

$$|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta r,\ |\Delta\boldsymbol{v}| \neq \Delta v$$

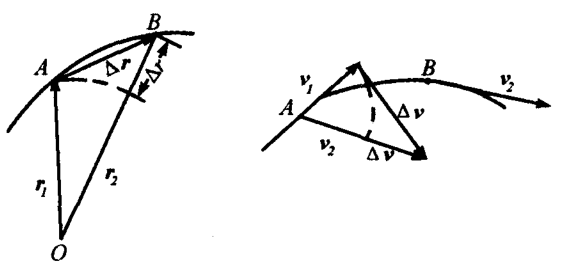


图 1-2

疑难点 2　设质点运动方程为 $x = x(t)$，$y = y(t)$，在计算质点速度和加速度时，有人先求出 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，然后根据 $v = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 及 $a = \dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$ 而求得结果，这样做是否正确？

解析　速度的定义式为 $\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

速度的大小　$v = \dfrac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$

由上题可知，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| \neq \mathrm{d}r$，所以不可用式 $v = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 和 $a = \dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$ 来求速度和加速度。

正确的解法是用矢量运算法则进行计算，即

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j},\ v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j},\ a = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$$

疑难点 3　平均速度与平均速率、瞬时速度与瞬时速率有何区别？

解析　平均速度定义式 $\overline{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$，表示位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 在 Δt 时间内的平均变化率。平均速率定义式 $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$，表示路程 Δs 在 Δt 时间内的平均变化率。在一般情况下，位移的大小与路程并不相等，即 $|\Delta \boldsymbol{r}| \neq \Delta s$，所以 $|\overline{\boldsymbol{v}}| \neq \bar{v}$。但也有特殊情况：

(1) 当质点做单向直线运动时，$|\Delta \boldsymbol{r}| = \Delta s$，所以 $|\overline{\boldsymbol{v}}| = \bar{v}$。

(2) 当 $\Delta t \to 0$ 时，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$，而瞬时速度定义式 $\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，瞬时速率定义式 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，由此可见，$|\boldsymbol{v}| = v$，即瞬时速度的大小是瞬时速率。

疑难点 4　描述质点加速度的物理量 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$、$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$、$\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$ 有何区别？

解析　$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 表示总加速度。

$a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 表示总加速度在轨迹切线方向的投影，也称切向加速度。

$a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$ 表示加速度在 x 轴上的投影。

疑难点 5　如图 1-3 所示，湖中有一小船，有人在湖边一定高度的岸上以匀速率 v_0 收绳子，小船即向岸边靠拢，不考虑水流速度，试分析小船做何种运动。

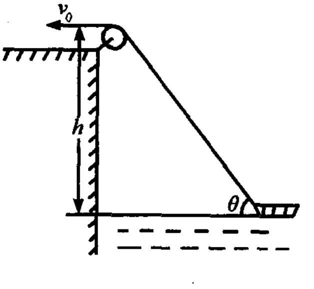


图 1-3

解析　有人认为以速率 v_0 收绳，则绳上各点速率都应是 v_0，所以船头的速率也是 v_0，而且运动方向沿着绳，则船沿水面运动的速度 v 是 v_0 的水平分量，即 $v = v_0\cos\theta$，这个结论是否正确呢？

首先我们来讨论绳上各点速率是否都是 v_0。如图 1-4 所示，取绳上任意两点 A、B，以速率 v_0 收绳，当船前移了 Δx 时，绳缩短了 Δr，此时绳上的 A 点移动到 A' 点，B 点移动到 B' 点，在相同的时间内，A 点与 B 点的位移不同，所以 A、B 点的速度不同。这是因为绳上的各点既要沿绳方向以速率 v_0 运动，又要绕 O 点转动，是两种运动的合成，所以绳上各点的速度不同，而且不等于 v_0，v_0 只是绳缩短的速率，即矢径大小的变化率 $v_0 = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，而不是绳上各点的速率，即 $v_0 \neq \left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$。

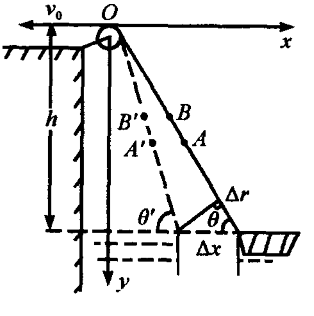


图 1-4

由于绳上各点速率不同，则与船相连的绳尾的速率亦即船头的速率不是 v_0，所以 $v = v_0\cos\theta$ 这个结论是不正确的。

船的移动速度及加速度有以下几种解法：

方法一：如图 1-4 所示：

因为
$$\frac{|\Delta r|}{|\Delta x|} = \cos\theta$$

所以
$$|\Delta x| = \frac{|\Delta r|}{\cos\theta}$$

$$\frac{|\mathrm{d}x|}{\mathrm{d}t}=\frac{|\mathrm{d}r|}{\cos\theta\mathrm{d}t},\ |v|=\frac{|v_0|}{\cos\theta}$$

因为
$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

所以
$$v=-\frac{v_0\sqrt{x^2+h^2}}{x}\quad（负号表示\boldsymbol{v}与x正方向相反）$$

所以
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}\right)$$
$$=v_0\frac{h^2}{x^2\sqrt{x^2+h^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_0^2h^2}{x^3}$$

负号表示 $\boldsymbol{a}$ 的方向与 x 正方向相反，但船运动的速度 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，所以船加速靠岸。

方法二：根据速度的定义式，得

船的速度为 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}$，$v_y=0$　（y 方向没有位移）

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ x=\sqrt{r^2-h^2}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{r^2-h^2}=\frac{r}{\sqrt{r^2-h^2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

因绳子变短，故 $v_0=-\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，代入上式得

$$v=-\frac{r}{\sqrt{r^2-h^2}}v_0=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0$$

a 的解法同上。

方法三：根据 v_0 的物理意义，得

$$v_0=-\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{x^2+h^2}$$
$$=-\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}v$$

所以
$$v=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0$$

疑难点 6　下雨时，有人坐在车内观察车外雨点的运动，试说明在下列情形中他所观察到的结果。（假设雨点相对于地面是匀速直线落下的）

(a) 车是静止的。

(b) 车以匀速沿水平轨道运动。

(c) 车以匀加速沿水平轨道运动。

(d) 车以匀速率做圆周运动。

解析

(a) 车是静止的，车内观察者看到雨点垂直匀速落下。

(b) 若车以 v 匀速水平运动，观察者以车为参照物，看到雨点参与两个运动，水平方向匀速直线运动和竖直方向的匀速直线运动，运动方程分别为 $x=vt$，$y=ut$，u 为雨滴下落速度，则雨滴运动轨迹为 $y=\frac{u}{v}x$，为斜直线。

(c) 若车以匀加速 a 沿水平方向运动，其运动方程为 $x=\dfrac{1}{2}at^2$，$y=u\,t$，则其轨迹为 $x=\dfrac{a}{2u^2}y^2$，为一抛物线。

(d) 若车以匀速率 v 做圆周运动，雨滴运动方程为 $y=u\,t$，$x^2+z^2=R^2$，即雨滴向下落的同时做圆周运动，则其轨迹为螺旋线。

疑难点 7　如图 1-5 所示，质点做曲线运动，质点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 是恒矢量($\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}$)，试问质点是否能做匀变速率运动？为什么？

解析　质点若做匀变速率运动，其切向加速度大小 a_t 必为常数，即 $a_{t1}=a_{t2}=a_{t3}$，现在虽然$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3$，但由于总加速度与轨道各处的切线间夹角不同，使得总加速度在各处切线方向的投影并不相等，即 $a_{t1}\neq a_{t2}\neq a_{t3}$，故该质点不做匀变速率运动。

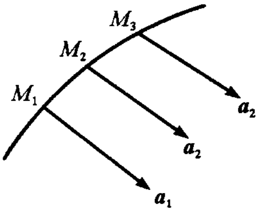


图 1-5

三、典型题举例

例 1　一质点在 xOy 平面内运动，运动方程为 $x=2t$ 和 $y=19-2t^2$，则其中第二秒内质点的平均速度的大小及第二秒末瞬时速度的大小为多少？

解　平均速度定义式

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

则

$$|\bar{\boldsymbol{v}}|=\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|$$

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

第二秒内位移

$$\begin{aligned}|\Delta\boldsymbol{r}|&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\&=\sqrt{(2\times2-2\times1)^2+(19-2\times2^2-19+2\times1^2)^2}\\&=6.32(\text{m})\end{aligned}$$

$$|\bar{\boldsymbol{v}}|=\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{|\Delta t|}=\frac{6.32}{1}=6.32(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$

$$v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{2^2+(-4t)^2}$$

代入 $t=2\text{s}$，则

瞬时速度　$$v=\sqrt{4+64}=8.25(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

例 2　有一质点沿 x 轴做直线运动，t 时刻的坐标为 $x=4.5t^2-2t^3$(SI)，试求：

(1) 第 2s 内的平均速度；

(2) 第 2s 末的瞬时速度；

(3) 第 2s 内的路程。

解 (1)

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=-0.5(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$$

(2)

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=9t-6t^2$$

$t = 2$ s代入，得　　$v = -6(\mathrm{m/s})$

(3)　　$s = |x(1.5) - x(1)| + |x(2) - x(1.5)| = 2.25\mathrm{m}$

例 3　一质点沿 x 轴运动，其加速度 $a = 4t$，已知 $t = 0$ 时，质点位于 $x_0 = 10$ m 处，初速度 $v_0 = 0$，试求其位置和时间的关系式。

解
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 4t,\ \mathrm{d}v = 4t\mathrm{d}t$$
$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t 4t\mathrm{d}t,\ v = 2t^2$$
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t^2,\ \int_{10}^x \mathrm{d}x = \int_0^t 2t^2\mathrm{d}t$$
$$x = \frac{2}{3}t^3 + 10$$

例 4　一物体悬挂在弹簧上做竖直振动，其加速度 $a = -ky$，式中 k 为常量，y_0 是以平衡位置为原点所测得的坐标，假定振动的物体在坐标 y_0 处的速度为 v_0，试求速度 v 与坐标 y 的函数关系式。

解
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$
又
$$a = -ky$$
$$-ky = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$
所以
$$\int -ky\mathrm{d}y = \int v\mathrm{d}v,\ -\frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}v^2 + C$$
已知 $y = y_0$、$v = v_0$，则
$$C = -\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{2}ky_0^2$$
所以
$$v^2 = v_0^2 + k(y_0^2 - y^2)$$

例 5　一艘正在沿直线行驶的电艇，在发动机关闭后，其加速度与速度方向相反，大小与速度平方成正比，即 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}z = -kv^2$，式中 k 为正的常数，试证明电艇在关闭发动机后又行驶 x 距离时的速度 $v = v_0\mathrm{e}^{-kx}$，其中 v_0 是发动机关闭时的速度。

证明
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -kv^2$$
所以
$$\int_{v_0}^v \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int_0^x -k\mathrm{d}x,\ \ln\frac{v}{v_0} = -kx$$
所以
$$v = v_0\mathrm{e}^{-kx}$$

例 6　一质点沿半径为 0.1 m 的圆周运动，其角位移 θ 随时间 t 的变化规律是 $\theta = 2 + 4t^2$(SI)。试求第二秒末的角速度、角加速度、切向加速度、法向加速度及总加速度。

解　运动方程 $\theta = 2 + 4t^2$，则 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 8t$，角加速度 $\alpha = 8\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$。

当 $t = 2\mathrm{s}$、$\omega = 16\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ 时

切向加速度 $a_t = r\alpha = 0.8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，法向加速度 $a_n = \omega^2 r = 16^2 \times 0.1 = 25.6\ (\mathrm{m\cdot s^{-2}})$

总加速度
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = 25.61\ (\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

例 7　河水自西向东流动，速度为 10 km·h^{-1}，一轮船在水中航行，船相对于河水的航向为北偏西 30°，相对于河水的航速为 20 km·h^{-1}，此时风向为正西，风速为 10 km·h^{-1}，试求在船上观察

到的烟囱冒出的烟缕的飘向(设烟离开烟囱后很快就获得与风相同的速度)。

解　将水、风、船、地球分别用 w、f、s、e 表示，则水一地、风一船、风一地和船一地间的相对速度分别为$\boldsymbol{v}_{we}$、$\boldsymbol{v}_{fs}$、$\boldsymbol{v}_{fe}$、$\boldsymbol{v}_{se}$。已知：$\boldsymbol{v}_{we} = 10\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$，正东方向；$\boldsymbol{v}_{sw} = 20\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$，北偏西 30° 方向；$\boldsymbol{v}_{fe} = 10\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$，正西方向。求风(烟)对船的速度$\boldsymbol{v}_{fs}$。

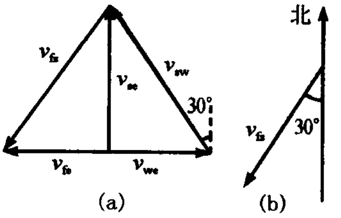


图 1-6

根据速度合成法则，$\boldsymbol{v}_{fs} = \boldsymbol{v}_{fe} - \boldsymbol{v}_{se}$，欲求$\boldsymbol{v}_{fs}$，应先求$\boldsymbol{v}_{se}$，$\boldsymbol{v}_{se} = \boldsymbol{v}_{sw} + \boldsymbol{v}_{we}$。根据已知条件，画矢量图 1-6，由图(a) 可得

$$v_{se} = 10\sqrt{3}\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

方向正北。

根据$\boldsymbol{v}_{fs} = \boldsymbol{v}_{fe} - \boldsymbol{v}_{se}$，画矢量图 1-6(b)，由图中可得

$$v_{fs} = 20\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

方向为南偏西 30°，此即为在船上观察的烟缕的飘向。

例 8　质点M在水平面内的运动轨迹如图 1-7 所示，OA 段为直线，AB、BC 段分别为不同半径的两个$\dfrac{1}{4}$圆周，设 $t = 0$ 时，M 在O点，已知运动方程为 $s = 30t + 5t^2$(SI)，求 $t = 2\mathrm{s}$ 时刻，质点 M 的切向加速度和法向加速度。

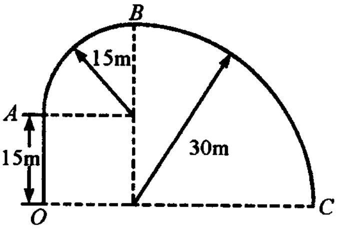


图 1-7

解　先求出 $t = 2\mathrm{s}$ 时质点在轨迹上位置，即

$$t = 2\mathrm{s},\ s = 80\mathrm{m} \qquad (在大圆上)$$

各瞬时质点的速率为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 30 + 10t$$

所以

$$t = 2\ \mathrm{s},\ v = 50\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

各瞬时质点的切向加速度和法向加速度为

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 10\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R},\ v = 50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},\ R = 30\mathrm{m} \qquad (大圆半径)$$

计算得，当 $t = 2\mathrm{s}$ 时

$$a_t = 10\mathrm{m \cdot s^{-2}},\quad a_n = 83.3\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

例 9　(1) 对在 xOy 平面内以原点 O 为圆心做匀速圆周运动的质点，试用半径 r、角速度 ω 和单位矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 表示其 t 时刻的位置矢量。已知在 $t = 0$ 时，$y = 0$，$x = r$，角速度 ω 如图 1-8 所示。

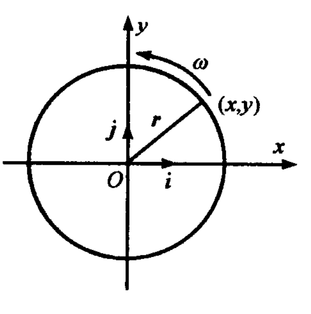


图 1-8

(2) 由(1) 导出速度 $\boldsymbol{v}$ 与加速度 $\boldsymbol{a}$ 的矢量表示式。

(3) 试证明加速度指向圆心。

解　(1) $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = r\cos\omega t\boldsymbol{i} - r\sin\omega t\boldsymbol{j}$

(2) $\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -r\omega\sin\omega t\boldsymbol{i} + r\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i} - r\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

(3) $\boldsymbol{a} = -\omega^2(r\cos\omega t\boldsymbol{i} + r\sin\omega t\boldsymbol{j}) = -\omega^2\boldsymbol{r}$

这说明 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 方向相反，即 $\boldsymbol{a}$ 指向圆心。

例 10　质点在重力场中做斜上抛运动，初速度的大小为 v_0，与水平方向成 α 角，求质点到达与抛出时同一高度时的切向加速度、法向加速度以及该时刻质点所在处质点轨迹的曲率半径（忽略空气阻力）。

解　在抛体运动中，质点的总加速度 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}$，由于无阻力作用，所以落回到与抛出点同高度时质点的速度大小 $v=v_0$，其方向与水平方向夹角为 α，如图 1-9 所示。

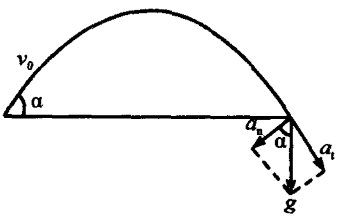


图 1-9

切向加速度　$a_t=g\sin\alpha$

法向加速度　$a_n=g\cos\alpha$

已知
$$a_n=\frac{v^2}{R}$$

所以
$$R=\frac{v^2}{a_n}=\frac{v_0^2}{g\cos\alpha}$$

例 11　一艘船以速率 u 驶向码头，另一艘船以速率 v 自码头离去，试证明当两船的距离最短时，两船与码头的距离之比为 $\dfrac{v+u\cos\alpha}{u+v\cos\alpha}$（设航路均为直线，$\alpha$ 为两直线的夹角）。

证明　设任一时刻船与码头的距离为 x、y，两船的距离为 l，如图 1-10 所示，A、B 为两船位置，P 为码头，则由图可得 $l^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha$，将该式对 t 求导，得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2(\cos\alpha)\ x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2(\cos\alpha)y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

将 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-u$、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v$ 代入上式，当两船距离 l 最短时，$\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=0$，则

$$0=-ux+vy-xv\cos\alpha+uy\cos\alpha$$
$$0=-x(u+v\cos\alpha)+y(v+u\cos\alpha)$$
$$\frac{x}{y}=\frac{v+u\cos\alpha}{u+v\cos\alpha}$$

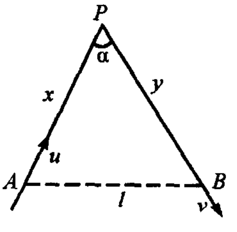


图 1-10

即当两船的距离最短时，两船与码头的距离之比为 $\dfrac{v+u\cos\alpha}{u+v\cos\alpha}$。

四、综合能力题

1. 某质点的运动方程为 $x=3t-5t^3+6$(SI)，则该质点做（　　）。

　A. 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向

　B. 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

　C. 变加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向

　D. 变加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

2. 以下五种运动形式中，$\boldsymbol{a}$ 保持不变的运动是（　　）。

　A. 单摆的运动　　B. 匀速率圆周运动　　C. 行星的椭圆轨道运动

　D. 抛体运动　　E. 圆锥摆运动

3. 质点沿半径为 R 的圆周做匀速率转动，每 t 秒转 1 圈，在 $2t$ 时间间隔中，其平均速度大小与平均速率大小分别为（　　）。

A. $\frac{2\pi R}{t}$, $\frac{2\pi R}{t}$　　B. 0, $\frac{2\pi R}{t}$　　C. 0, 0　　D. $\frac{2\pi R}{t}$, 0

4. 一质点在平面上做曲线运动，其速率 v 与路程 s 的关系为 $v=1+s^2$(SI)，则其切向加速度以路程 s 来表示的表达式为______。

5. 一质点从静止出发，沿半径 $R=3$ m 的圆周运动，切向加速度 $a_t=3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，当总加速度与半径成 45° 时，所经过的时间 $t=$ ______，在上述时间内质点经过的路程为______。

6. 小船从岸边 A 点出发渡河，如果它保持与河岸垂直向前划，则经过时间 t_1 到达对岸下游 C 点；如果小船以同样速率划行，但垂直于河岸横渡到正对岸 B 点，则需与 A、B 两点连成的直线成 α 角逆流划行，经过时间 t_2 到达 B 点，若 B、C 两点间距为 s，则

(1) 此河宽度 $L=$ ______；

(2) $\alpha=$ ______。

7. 一质点沿 x 轴运动，其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为 $a=2+6x^2$(SI)，如果质点在原点任意处的速度为零，试求质点在任意位置处的速度。

8. 一质点沿螺旋线自外向内运动，如图 1-11 所示，已知其走过的弧长与时间的一次方成正比。试问该质点加速度的大小是越来越大，还是越来越小？

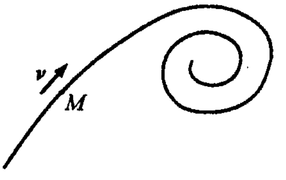


图 1-11

9. 一敞顶电梯以恒定速率 $v=10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 上升，当电梯离地面 $h=30$m 时，一小孩竖直向上抛出一球，球相对于电梯初速率 $v_0=20\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，试问：

(1) 从地面算起，球能达到的最大高度为多大？

(2) 抛出后经过多长时间再回到电梯上？

10. 假定无风时雨点匀速竖直下落，试问：

(1) 桶平放，在相同时间内无风与刮水平风，在哪一种情况进入桶中的雨水较多？

(2) 风速不变，沿什么方向放置桶接雨水最多？

11. (1) 人在阳光下背向阳光沿平坦的水平路面行走，人行走的速度为 v，则求人影的顶端在地面移动的速度。

(2) 如果人的高度为 h，夜间在路灯下沿平坦的水平路面背着路灯行走，灯离地面的高度为 H，人行走的速度为 v，求人影顶端移动的速度。

12. 在如图 1-12 所示的各种情形中，质点 M 做曲线运动，指出哪些运动是不可能的。

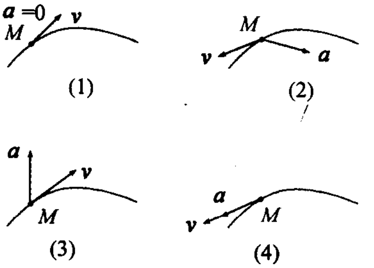


图 1-12

13. 描述质点加速度的物理量，$\frac{d\bar{v}}{dt}$、$\frac{dv}{dt}$、$\frac{dv_x}{dt}$ 有何不同？

第二章　牛顿定律

一、知识点总结

1. 牛顿运动定律

(1) 第一定律(惯性定律)：物体所受合外力 $\boldsymbol{F}=0$ 时，$\boldsymbol{v}$ 为恒矢量。

(2) 第二定律：$\boldsymbol{F}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}$，　$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$ 。

当物体速度远小于光速($v \ll c$)时，m 为常量，则

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$$

分量式：直角坐标系：$F_x=ma_x$，$F_y=ma_y$，$F_z=ma_z$。

自然坐标系：$F_t=ma_t$，$F_n=ma_n$。

注：$\boldsymbol{F}=\sum \boldsymbol{F}_i$，$F_x=\sum\limits_{i=1}^{N} F_{ix}$

(3) 第三定律：$\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$。

2. 几种常见的力

(1) 万有引力：

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

重力($\boldsymbol{P}$)：地球对地面附近物体的万有引力，即

$$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}$$

(2) 弹性力：物体因形变而产生欲使其恢复原来形状的力，如压力、绳的张力、弹簧的弹性力等。

(3) 摩擦力：

静摩擦力：

$$F_{\mathrm{fom}}=\mu_0 F_N$$

式中，F_{fom} 为最大静摩擦力，$0 \leqslant F_{\mathrm{fo}} \leqslant F_{\mathrm{fom}}$；$F_{\mathrm{fo}}$ 为静摩擦力。

滑动摩擦力：

$$F_f=\mu F_N$$

在一般情况下，$\mu_0=\mu$ 。

3. 惯性系、非惯性系

适用牛顿运动定律的参考系叫惯性参考系，反之就叫非惯性系。地球可近似地看成惯性系。

推论：相对于惯性系静止或做匀速直线运动的参考系都是惯性系。

伽利略相对性原理：在所有惯性系中，牛顿力学的规律都具有相同的形式。

4. 动力学的两类问题

(1) 已知物体受力，求运动状态或运动方程。