高中数学

知识元与问题活性化设计④

GAOZHONGSHUXUEZHISHIYUANYUWENTIHUOXINGHUASHEJI

总 主 编　蒋志萍
本册主编　曹贤鸣　许兴铭

杭州出版社
HANGZHOU PUBLISHING HOUSE

顾　问：吴晓红 博士
总主编：蒋志萍

高中数学

知识元与问题活性化设计④

本册主编：曹贤鸣　许兴铭

本册编委：曹贤鸣　许兴铭　余建新　张耀光

杭州出版社
HANGZHOU PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

高中数学知识元与问题活性化设计．4 / 蒋志萍主编．
杭州：杭州出版社， 2006.7
ISBN 7-80633-881-0

Ⅰ．高．．． Ⅱ．蒋．．． Ⅲ．数学课—高中—教学参考
资料 Ⅳ．G634．603
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 071112 号

高中数学知识元与问题活性化设计④

蒋志萍 主编

责任编辑 杨清华
封面设计 祁睿一
出版发行 杭州出版社(杭州市曙光路 133 号)
电话：(0571)87997719 邮编：310007
印　　刷 浦江华鑫印务有限公司
经　　销 新华书店
开　　本 787×1092 1/16
字　　数 1614 千
印　　张 63
版　　次 2006 年 7 月第 1 版
2006 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 7-80633-881-0 / G·503
定　　价 85.00 元(全五册)

前　言

《高中数学知识元与问题活性化设计》是为广大教师和学生提供全面的有关知识元的教与学的参考资料，每个知识元（即建立在数学教材知识系统上的又具有相互独立性的知识小单元）由**知识元的详解**以及与其相对应的**知识元的问题**设计两大版块组成。内容具有“新”“活”“实”三大特点。

“知识元的详解”是指对每一个知识元从数学知识的解剖和知识在问题解决中的应用这两个层面列出这个知识元所包含的详细内容。“知识元的详解”既可以帮助学生从本质层面上系统地重新梳理所学知识，又可以引导学生从策略和技巧上透彻地分析和解决问题；同时，可作为教师常规备课的资料，也可作为教师进行教材研究的切入点。

“知识元的问题设计”包括典型例题和精化习题。“典型例题”包含了提示、问题解答、变形挑战、思考题、形态规律（即为问题形态和解题规律）、小结与反思等栏目。“典型例题”选自最基本的问题形态，通过不断地变形与挑战使问题形成了由点及线、由浅入深的问题链，从内容和方法上体现联系性、思想性和应用性，真正反映了问题的活性化设计。“精化习题”其题型具有科学性、新颖性，力求体现新课程的基本理念，让学生经历习题的探究过程，拓宽思维空间，提高解题能力。

《高中数学知识元与问题活性化设计》系列丛书是《构建活性化数学知识要素系统的研究与实践》这个课题的研究成果之一，有关活性化数学知识要素系统（KAYFT）的更详细信息可以参见 www.kayft.com（kayft 系统）。这套书与 kayft 系统结合使用效果更佳。

本丛书的编写、出版是团队共同努力的成果，尽管我们在成书过程中，本着近乎苛刻的态度，题题推敲，层层把关，但也难免有疏忽和纰漏之处，敬请广大师生批评指正。编写中参考书目甚多，在此不一一列举，谨表歉意。

在本书编审过程中得到了丁勇、楼飞华、金涵龙、徐礼生等老师的帮助，在此表示衷心的感谢！

蒋志萍
2006 年 7 月于杭州

课辅(KAYFT)学习系统简介

www.kayft.com 课辅数学学习系统由杭州奥龙软件公司组织国内外博士、教授、高级软件工程师、全国著名数学教育家、数学解题专家及庞大的优秀教师队伍联合开发，该系统已在中国和美国申请专利。课辅(KAYFT)系统是一套兼具活性化和个性化的知识学习系统，为老师、学生提供了一个交互式网络平台。课辅(KAYFT)系统提供着最优秀的网状教育资源，使学生拥有适合自己学习目标、学习强度、学习进程的完全个性化的学习模式，同时向老师提供最实用的试卷编辑功能，可以自主设置题目数量、难度、考察范围、测试要点等快速生成一套近乎完美的试卷。

课辅(KAYFT)系统除拥有数学学习系统外，还拥有一个新课程资源系统。新课程资源系统提供中学数学资源的下载服务，其中包括教案、课件、试卷、专题、论文、素材、竞赛、视频及资讯等九大栏目内容。内容丰富的新课程资源系统无疑将是师生查找教学资源的最好选择。

为教师、学生提供更多、更好的数学资源这是 KAYFT 的宗旨。

网址：www.kayft.com

客服电话：0571-88396667

E-mail：kayft@aolongsoft.com.

编者的话

本丛书依据普通高中数学课程标准，配合人教版普通高中课程标准使用(实验)教材(数学A版)而编写的导学丛书。编者以学生的具体学情为出发点，以基本问题为突破口，设计一组有内在联系的问题链，通过一题多变来揭示数学概念的内涵，挖掘数学问题的基本形态与规律，提炼数学思想方法，进一步提高学生的数学素养，以体现新教材、新课程所倡导的问题性、联系性、应用性。

丛书设置了以下几个部分：

1. 课程要求

首先通过课程要求与高考要求的对比，来把握本节学习的要求；再通过考题欣赏了解高考的动态。需要说明的是，本册中的高考要求暂沿用原教材的高考要求，新增内容的高考要求摘自海南省07年新高考数学科高考考试说明。

2. 知识元

通过知识元的学习来梳理基本知识与基本问题、掌握数学思想与基本方法、解析重难点与疑惑点。其中关于形态规律的描述有两个层面，在知识元、小结与复习中的描述比较抽象，而在典型例题和变形挑战题中的描述则比较具体。

3. 典型例题

该部分以例题为出发点，引出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，通过提示概要引导学生的思考和探索活动，通过问题解答、变形与挑战、思考题、小结与反思，让学生经历观察、猜测、推理、反思等理性思维的基本过程，形成一个主题明确的有内在联系的问题链，实现由知识到能力的提升。

4. 精化习题

该部分的习题分A、B两组，其中B组要求较高。所选习题突出基础性、典型性、科学性和新颖性，力求体现新课程的基本理念，紧密联系生活实际，突出自主探究，注重激发兴趣，开发智力，着力培养学生学习数学的能力。

5. 拓展与提高

根据教材内容和高考趋向灵活地设置了该部分内容，这一部分内容对所学的重点问题进行适当的拓展，对热点问题进行必要的提高，供学有余力的同学阅读自学，以拓宽同学们的数学视野，进一步提高数学学习能力。

6. 小结与复习

每章后配小结与复习，通过典型例题着重复习本章节的重点知识、基本问题和基本的思想方法，并在知识网络的结构下概括本章节基本的形态规律。

另外，典型例题、变形与挑战和精化习题中有一些题目的要求较高，已用加星的方式注明，供同学们欣赏或学有余力的同学探究。

编者

2006年7月22日

目　录

第一章　三角函数

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任意角

知识元

知识点注释与详解

1. 任意角的概念.

角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形.其中初始位置叫做角的始边,终止位置叫做角的终边.

由于角是一条射线绕着端点旋转而成的，所以它可以绕端点按逆时针方向旋转，也可以绕端点按顺时针方向旋转.因此规定:按逆时针方向旋转形成的角叫做正角(positive angle);按顺时针方向旋转形成的角叫做负角(negative angle);如果一条射线没有作任何旋转,称它形成了一个零角(zero angle).

课程要求

了解任意角的概念

高考要求

理解任意角的概念

考题欣赏

(05 年全国Ⅲ)已知 α 为第三象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是(　　)

A. 第一或第二象限

B. 第二或第三象限

C. 第一或第三象限

D. 第二或第四象限

我们把所有的正角、负角以及零角统称为任意角(any angle).

2. 象限角、轴线角.

(1)象限角、轴线角的概念:

在直角坐标系内讨论角时,要使角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的正半轴重合.

如果一个角的终边(除端点外)在第几象限，那么就称这个角是第几象限角(quadrant angle).如果角的终边落在坐标轴上,就称这个角为轴线角,这样的角不属于任何一个象限.

(2)象限角的集合表示:

第一象限角的集合为$\{x|k\cdot360°<x<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$;

第二象限角的集合为$\{x|k\cdot360°+90°<x<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$;

第三象限角的集合为$\{x|k\cdot360°+180°<x<k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$;

第四象限角的集合为$\{x|k\cdot360°+270°<x<k\cdot360°+360°,k\in\mathbf{Z}\}$;

3. 终边相同的角.

任意一个角唯一确定一条终边(原点出发的射线);反之,任意一条终边对应的角不唯一,有无数多个角.一个角,每增加或减少 360°,终边又回到原来的位置.因此:

所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合:$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

形态规律

1. 判断某任意角 α 是第几象限角，其方法有：

(1)作出这个角的终边，视终边所在的象限来确定角 α 为第几象限角.

(2)把角 α 表示为：$\alpha=k\cdot360^\circ+\alpha'$（其中 $k\in\mathbf{Z}$，$0^\circ\leqslant\alpha'<360^\circ$），利用角 α' 的终边所在的象限，来确定与之具有相同终边的角 α 为第几象限角.在寻找 k 和 α' 时，可由角 α 除以 360°，得到的商数为 k，余数为 α'，对不合要求的 α'，可通过适当调整 k 的值.

2. 求一定约束条件下与角 α 有相同终边的角. 先写出与角 α 终边相同的所有角 $\beta=k\cdot360^\circ+\alpha(k\in\mathbf{Z})$，然后根据 k 的取值找出符合条件的角.

重点、难点及注意点

1. 重点：将 0° 到 360° 的角的概念推广到任意角.

2. 难点：角的概念的推广；终边相同的角的表示.

3. 注意点：

(1)注意区分锐角、小于 90° 的角、第一象限角和 0° 到 90° 之间的角.锐角是指 $0^\circ<\alpha<90^\circ$ 的角；0° 到 90° 之间的角是指 $0^\circ\leqslant\alpha<90^\circ$ 的角；第一象限角是指在 $k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+90^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$ 范围内的角；小于 90° 的角除了锐角还包括 0° 角和负角.

(2)角的顶点不与坐标原点重合，或角的始边不与 x 轴非负半轴重合时，不能判断这个角是哪个象限角，也不能称作象限角.

(3)相等的角的终边一定重合，终边重合的两个角不一定相等.

(4)本节内容中，要注意数形结合、分类讨论的思想和方法的运用.

典型例题

例 1 下列各角是第几象限角？(1)$1208^\circ12'$；(2)-1900°.

解：(1)由 $1208^\circ12'=3\times360^\circ+128^\circ12'$ 知，角 $1208^\circ12'$ 与角 $128^\circ12'$ 的终边相同，因为 $128^\circ12'$ 是第二象限角，所以 $1208^\circ12'$ 是第二象限角.

(2) 由 $-1900^\circ=-6\times360^\circ+260^\circ$ 知，角 -1900° 与角 260° 的终边相同，因为 260° 是第三象限角，所以 -1900° 是第三象限角.

提示概要

在 $0^\circ\sim360^\circ$ 内找出与所给角终边相同的角，通过在 $0^\circ\sim360^\circ$ 内的角的判断确定所求角是第几象限角

问题形态

象限角的判断

技巧方法

将所给角除以 360° 得到的余数，就是与这个角在 $0^\circ\sim360^\circ$ 内找出与所给角终边相同的角（如果是负数得再加上 360°）

变形与挑战 1

在 $-1080^\circ\sim-360^\circ$ 之间与 -1900° 这两个角终边相同的角有哪些？你能求出来吗？

解：由于与角 -1900° 终边相同的角为 $k\cdot360^\circ-1900^\circ(k\in\mathbf{Z})$，所以要使 $-1080^\circ<k\cdot360^\circ-1900^\circ<-360^\circ(k\in\mathbf{Z})$ 成立，只要使 $\frac{41}{18}<k<\frac{77}{18}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $k=3,4$.将

提示概要

写出所有与所给角的终边相同的角，选取适当 k 的值进而求角

问题形态

终边相同的角的求法

k 代入得在$-1080°\sim-360°$之间，与$-1900°$终边相同的角为$-820°$和$-460°$.

技巧方法

赋值法估算、或解不等式求 k 的值

变形与挑战 2

如果角 α 的终边经过点 $P(-1,-\sqrt{3})$，能否求出角 α 的集合 A；A 中在$-1080°\sim-360°$之间的角又有哪些？

解：在 $0°\sim360°$之间，终边经过点 $P(-1,-\sqrt{3})$的角为 $240°$. 所以角 α 的集合是 $A=\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+240°, k\in\mathbf{Z}\}$.

A 中在$-1080°\sim-360°$之间的角是$-840°$和$-480°$.

提示概要

结合图形确定在 $0°\sim360°$ 内满足条件的角，求出 A 后选取 k 的值求角

问题形态

终边相同的角的求法

技巧方法

数形结合

思考题

如果角 α 的终边在经过点 $P(-1,-\sqrt{3})$的一条直线上，你能求出角 α 的集合吗？

小结与反思

判断一个角是哪个象限角，通常先写出与这个角终边相同的所有角 $\alpha=k\cdot360°+\alpha'$（其中 $k\in\mathbf{Z}, 0°\leqslant\alpha'<360°$），通过角 α'所在的象限来确定与之具有相同终边的角 α 为第几象限角.在寻找 k 和 α'时，可由角 α 除以 $360°$，得到的商数为 k、余数为 α'，对不合要求的 α'，可通过适当调整 k 的值（保证 $k\in\mathbf{Z}, 0°\leqslant\alpha'<360°$）.

在一定约束条件下求角 α 终边相同的角时，先写出与角 α 终边相同的所有角 $\beta=k\cdot360°+\alpha(k\in\mathbf{Z})$，根据约束条件列出不等式，解不等式求得 k 的值，然后根据 k 的取值找出所要求的角. 或者对表示式进行适当变形，然后用赋值法估算.

提示概要

在直角坐标系中画出 α 的角，进而画出$-\alpha$，$\pi+\alpha$ 和 $\pi-\alpha$ 的角，利用图象判断之

问题形态

象限角的判断

技巧方法

数形结合

例 2 如果 α 是第二象限角，试判断$-\alpha$，$\pi+\alpha$ 和 $\pi-\alpha$ 分别是第几象限角.

解：在直角坐标系中画出角 α 的终边，然后画出$-\alpha$，$\pi+\alpha$ 和 $\pi-\alpha$ 的角的终边，可知$-\alpha$ 是第三象限角；$\pi+\alpha$ 是第四象限角；$\pi-\alpha$ 是第一象限角.

变形与挑战 1

若 α 是第一象限角，那么 2α 是第几象限角？

解：由 α 是第一象限角，得 $k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $2k\cdot360°<2\alpha<2k\cdot360°+180°$，$k\in\mathbf{Z}$.

故 2α 是第一、第二象限角或终边落在 y 轴的非负半轴上.

提示概要

利用终边相同的角的表达式写出 α 的范围，然后计算 2α 的范围，并依角的范围来确定角所在的象限

问题形态

象限角的判断

技巧方法

根据角的范围来确定角所在的象限

变形与挑战 2

若 α 是第一象限角，那么 $\frac{\alpha}{2}$ 又是第几象限角？

技巧方法
分类讨论

解：由 α 是第一象限角，得 $k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+90^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$. 所以 $k\cdot180^\circ<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180^\circ+45^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$.

当 k 为偶数时，不妨设 $k=2m$，有 $m\cdot360^\circ<\frac{\alpha}{2}<m\cdot360^\circ+45^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$，此时 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限角；当 k 为奇数时，设 $k=2m+1$，有 $m\cdot360^\circ+180^\circ<\frac{\alpha}{2}<m\cdot360^\circ+225^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$，此时 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角.

故当 α 是第一象限角时，$\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角.

思考题

若 α 是第二、第三或第四象限角，那么 2α，$\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角？

小结与反思

判断一个角是第几象限角时，要把 $k\cdot180^\circ$凑成 360°的整数倍，所以要对 k 的奇偶性进行分类讨论. 通过对"角 α 所在象限与角 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限的关系"的探究，掌握并能借助直角坐标系熟记这种对应关系.

精化习题

A 组

1. 下列命题正确的是　　（　　）
   A. 终边相同的角相等　　B. 第一象限的角都是锐角
   C. 小于 90°的角不一定是锐角　　D. 第二象限的角比第一象限的角大
2. 给出下列四个命题：(1) -15°是第四象限角；(2) 185°是第三象限角；(3) 475°是第二象限角；(4) -350°是第一象限角. 其中正确的个数为　　（　　）
   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4
3. 若角 2α 的终边在 x 轴的上方，则 α 是　　（　　）
   A. 第一象限角　　B. 第一、二象限角　　C. 第一、三象限角　　D. 第一、四象限角
4. 在 $-720^\circ\sim-360^\circ$之间，与角 2331°终边相同的角是________.
5. 已知 α 是第一象限的角，则 $-\alpha$ 是第________象限的角；$180^\circ-\alpha$ 是第________象限的角；$2k\cdot180^\circ-\alpha$ 是第________象限的角；$k\cdot180^\circ+\alpha$ 是第________象限的角，其中 $k\in\mathbf{Z}$.
6. 求终边在直线 $y=x$ 上的角的集合.

B 组

7. 若 α、β 的终边关于 y 轴对称，则必有 ( )

A. $\alpha+\beta=90°$　　B. $\alpha+\beta=k\cdot360°+90°,(k\in\mathbf{Z})$

C. $\alpha+\beta=k\cdot360°,(k\in\mathbf{Z})$　　D. $\alpha+\beta=k\cdot360°+180°,(k\in\mathbf{Z})$

8. 若集合 $A=\{\alpha|k\cdot180°+30°<\alpha<k\cdot180°+90°\}(k\in\mathbf{Z})$，集合 $B=\{\beta|k\cdot360°-45°<\beta<k\cdot360°+45°\}(k\in\mathbf{Z})$，则 $A\cap B=$______.

9. 集合 $M=\{x|x=\frac{k}{2}\cdot180°+45°,(k\in\mathbf{Z})\}$，集合 $N=\{x|x=\frac{k}{4}\cdot180°,(k\in\mathbf{Z})\}$，那么集合 M 与集合 N 的关系怎样？

10. x 轴正方向上一点 A，以原点为圆心按逆时针方向做匀速圆周运动.已知点 A 每一分钟转过 $\theta(0°<\theta<180°)$ 角，2 分钟到达第三象限，14 分钟回到原来的位置，求 θ.

1.1.2 弧度制

知识元

课程要求

了解弧度制,并能进行弧度与角度的互化

高考要求

理解弧度的意义.能正确地进行弧度与角度的换算

考题欣赏

(02 年上海)若 α 是第四象限角,则 $\pi-\alpha$ 是(　　)

A. 第一象限角

B. 第二象限角

C. 第三象限角

D. 第四象限角

知识点注释与详解

1. 弧度制概念.

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做 1 弧度(radian)的角;用弧度作为单位来度量角的单位制叫做弧度制 (radian measure);在弧度制下,1 弧度记作 1rad,读作 1 弧度.

2. 弧度数.

正角的弧度数是一个正数. 负角的弧度数是一个负数,零角的弧度数是 0.如果半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l, 那么角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha|=\frac{l}{r}$.这里,α 的正负由角 α 的终边的旋转方向决定.

3. 角度与弧度的互化.

(1)角度化为弧度:

$360°=2\pi\text{rad}, 180°=\pi\text{rad}, 1°=\frac{\pi}{180}\text{rad}\approx 0.01745\text{rad}$.

(2)弧度化为角度:

$2\pi\text{rad}=360°, \pi\text{rad}=180°, 1\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx 57.30°=57°18'$.

(3)特殊角的弧度数:

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

4. 弧度制下的弧长公式和扇形面积公式.

弧长公式 $l=\alpha\cdot r$;扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\alpha\cdot r^2$(其中 r 是圆的半径,α 是圆心角的弧度数).

形态规律

1. 角度与弧度的互化. 用 $180°=\pi\text{rad}$ 来进行特殊角的角度与弧度的互化.对于一般的角,由于 $1°=\frac{\pi}{180}\text{rad}\approx 0.01745\text{rad}, 1\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx 57.30°=57°18'$,所以角度与弧度互化时,有 $n°=\frac{n\pi}{180}\text{rad}, n\text{rad}=\left(\frac{180n}{\pi}\right)°$. 此外,也可以用计算器互化.

2. 求弧长和扇形面积. 利用弧度制下的弧长公式和扇形面积公式计算的一般步

骤是:(1)化角度为弧度;(2)利用公式求解.

3. 用弧度表示已知终边的角的集合或求该集合中的某些元素. 与角 α 终边相同的角的集合是 $S=\{\beta|\beta=\alpha+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$. 在一定约束条件下求与角 α 终边相同的角 β 时,可根据 k 的取值找出符合条件的角.

重点、难点及注意点

1. 重点:了解弧度制,并能正确进行弧度与角度的换算.

2. 难点:弧度的概念的理解.

3. 注意点:

(1)对于任何一个圆心角 α,所对弧长与半径的比是一个仅与角 α 的大小有关的常数,它不随半径的变化而变化,也就是以"弧度"或"角度"为单位的角的大小都是一个与半径大小无关的定值.

(2)弧度数是一个实数,弧度制的引入,使角的集合与实数集之间建立了一一对应的关系.

(3)用角度制与弧度制来度量零度角时,单位不同,但数量相同;对于其他非零的角度,单位不同,且数量也不同.

(4)在表示角的集合时,一定要使用统一的单位制,千万不能混用角度制与弧度制;也就是在一个式子中,要么统一用角度制表示角,要么统一用弧度制表示角.

(5)应用弧度制下的弧长公式和扇形面积公式时,要注意角度应该是所对圆心角的弧度数,若是用角度表示的一定要先化为弧度数后,才能代入公式求解.

(6)弧度制表示终边相同的角 $2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 时,$2k\pi$ 是 π 的偶数倍,而不是 π 的整数倍.

典型例题

例 1 1690°化为弧度后等于多少弧度? $\frac{8}{5}\pi$ 化为角度后等于多少度?

解:$1690°=1690\times\frac{\pi}{180}=\frac{169}{18}\pi$;

$\frac{8}{5}\pi=\frac{8}{5}\times180°=288°$.

提示概要

利用 $1°=\frac{\pi}{180}$ rad 和 πrad=180°进行互化

问题形态

弧度与角度相互转化

技巧方法

化归

变形与挑战 1

能否用弧度表示终边相同的角? 如 $\beta=1690°$.(1)把 β 写成 $2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$ 的形式;(2)写出在区间 $(-4\pi,2\pi)$ 内与角 β 终边相同的角.

解:(1)$1690°=1690\times\frac{\pi}{180}=\frac{169}{18}\pi=8\pi+\frac{25}{18}\pi$.

(2)与 β 终边相同的角为 $2k\pi+\frac{25}{18}\pi(k\in\mathbf{Z})$.由题设 k 取 0,-1,-2,所以在区间 $(-4\pi,2\pi)$ 内与角 β 终边

提示概要

先在 0 到 2π 之间求出与 β 终边相同的角,然后写出所有与角 β 终边相同的角,选取适当的 k 的值求角

问题形态

终边相同的角的求法

技巧方法

调理 k 的值求角

相同的角有$\frac{25}{18}\pi$，$-\frac{11}{18}\pi$和$-\frac{47}{18}\pi$.

变形与挑战 2

在角度制下我们已能指出一个角是第几象限角，而角(1)$\frac{27}{4}\pi$；(2)$\frac{13}{2}\pi$；(3)-10 是以弧度形式给出的，问能否用弧度来判断它们是第几象限角？

解：(1)因为$\frac{27}{4}\pi=6\pi+\frac{3}{4}\pi$，所以$\frac{27}{4}\pi$与$\frac{3}{4}\pi$的终边相同；故由$\frac{3}{4}\pi$是第二象限角知$\frac{27}{4}\pi$也是第二象限角.

(2)因为$\frac{13}{2}\pi=6\pi+\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{13}{2}\pi$与$\frac{\pi}{2}$的终边相同；又因为$\frac{\pi}{2}$是轴线角，因此，$\frac{13}{2}\pi$也是轴线角，它不属于任何象限.

(3) 由于$-4\pi<-10<-2\pi$，有$-10=-4\pi+(4\pi-10)$，所以-10与$(4\pi-10)$的终边相同，进一步$\frac{\pi}{2}<4\pi-10\approx2.56<\pi$，所以$4\pi-10$是第二象限角，因此$-10$也是第二象限角.

提示概要

先将已知角表示为$2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z},0\leqslant\alpha<2\pi)$，通过对$\alpha$角的判断来确定所求角是哪个象限角

问题形态

象限角的判断

技巧方法

依 $0\sim2\pi$ 内的终边相同的角来判断象限角

思考题

已知三角形的内角A，B，C满足$2B=C+A$，且最小角为$58°$，试用弧度表示该三角形的各个内角.

小结与反思

判断象限角的方法：对于含有π的弧度数表示的角，要先将它化为$2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$的形式，再根据角$\alpha$终边所在位置进行判断.对于不含有$\pi$的弧度数表示的角，用$\pi=3.14$来估算，化为$2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$形式后，再通过$\alpha$与$\frac{\pi}{2}$，$\pi$，$\frac{3\pi}{2}$大小比较，估算出角所在的象限.

例 2 在已知圆内，1rad 的圆心角所对的弦长为 2，求这个圆心角所对的弧长.

解：如图 1.1.2-1，由圆心O向弦AB作垂线，垂足为C，则C为AB的中点.$\angle AOB=1\text{rad}$，$AB=2$.

在$\text{Rt}\triangle AOC$中，$\angle AOC=\frac{1}{2}\text{rad}$，$AC=1$，

所以$R=|OA|=\frac{AC}{\sin\angle AOC}=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$.

因此所求弦长$\overset{\frown}{AB}=|\alpha|\cdot R=1\times\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$.

提示概要

先求出圆的半径，再利用弧长公式求解

问题形态

利用弧度制下的弧长公式求弧长问题

技巧方法

数形结合

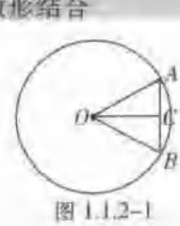

图 1.1.2-1

变形与挑战 1

已知弦长及圆心角能求出弧长，能否求有关面积问题？如：在半径为 6m 的圆内，求长度为 6 的弦和它所对的劣弧围成的弓形面积.

解：如图 1.1.2-2，$AB=6$，$OA=OB=6$，所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$. 得扇形 AOB 的面积

$S_{AOB}=\frac{1}{2}l\cdot R=\frac{1}{2}\alpha\cdot R^2=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times6^2=6\pi$.

图 1.1.2-2

又 $\triangle AOB$ 是正三角形. 有 $S_{AOB}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=9\sqrt{3}$. 因此弓形面积 $S=6\pi-9\sqrt{3}$.

提示概要

先求扇形和三角形面积，再求弓形的面积

问题形态

弓形面积的计算

技巧方法

利用弧度制下扇形面积公式求解

变形与挑战 2

已知弦长及圆心角(二个条件)能求出弧长和有关面积问题. 反之，已知弧长和面积，能否求其他的？如：已知扇形的周长为 10，面积为 4，求扇形圆心角的弧度数.

解：设扇形的圆心角的弧度数为 $\theta(0<\theta<2\pi)$，弧长为 l，半径为 r.

由题意有 $\begin{cases}l+2r=10,\\ \frac{1}{2}lr=4,\end{cases}$ 求得 $\begin{cases}r=1,\\ l=8,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}r=4,\\ l=2.\end{cases}$

当 $r=1$，$l=8$ 时，$\theta=\frac{l}{r}=8\text{rad}$，舍去.

所以，当 $r=4$，$l=2$ 时，$\theta=\frac{l}{r}=\frac{1}{2}\text{rad}$.

提示概要

利用扇形的周长和面积建立等式，进而解方程求解

问题形态

圆心角的求法

技巧方法

分类讨论，解方程

思考题

涉及到弧长公式和扇形面积公式的元素有四个，因此，已知二个元素能求出另二个元素. 如果只给一个条件，能否求解有关最值问题？比如：已知扇形的周长为 20，当它的半径和圆心角取什么值时，才能使扇形的面积最大 ？最大面积是多少 ？

小结与反思

弧长公式 $l=|\alpha|\cdot r$，扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2$ 中涉及到半径 r、圆心角的弧度数 α、弧长 l 和扇形面积公式 S 这四个元素，利用方程思想可以“知二求二”. 像思考题是“知一”下求扇形面积的最值问题，一般策略是在弧度制下使问题转化为关于 r 为自变量的二次函数的最值问题：首先建立函数关系，再通过求函数最值的方法求解.

精化习题

A 组

1. 已知 α 是第二象限角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 的取值范围是 （　　）

A. $(0,\pi)$　　B. $(0,\frac{\pi}{2})$

C. $(2k\pi,2k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$　　D. $(k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{2})(k\in\mathbf{Z})$

2. 把$-495°$表示成$2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$的形式，其中使$|\alpha|$最小的$\alpha$值是　（　　）

A. $-\frac{3\pi}{4}$　　B. $-\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

3. 设集合$M=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=k\pi\pm\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，则$M$、$N$之间的关系是（　　）

A. $M\subseteq N$　　B. $M\supseteq N$　　C. $M=N$　　D. $M\neq N$

4. 凸四边形$ABCD$中，若$A:B:C:D=3:4:5:6$，则A、B、C、D四个角的弧度数分别是______.

5. 半径为2cm的轮子，每分钟旋转270弧度，轮子上一点在3秒内所转的弧长是______.

6. 已知扇形AOB的圆心角α为120°，半径为6，求扇形弧长及所含弓形的面积.

B组

7. 已知集合$A=\{x|k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，集合$B=\{x|4-x^2\geqslant 0\}$，则$A\cap B=$______.

8. (1)若两个角的差为1弧度，它们的和为1°，求这两个角的大小；

(2)已知扇形的周长为$C(C>0)$，当它的圆心角取什么值时，才能使扇形的面积最大？最大面积是多少？

9. 设动点P、Q在一个半径为4的圆上运动，若动点P、Q的初始位置都在点A，其中点P按逆时针方向每秒旋转$\frac{\pi}{3}$弧度，点Q按顺时针方向每秒旋转$\frac{\pi}{6}$弧度，求P、Q第一次相遇时所用的时间及P、Q点各走过的弧度数.

10. 设半径为12cm，弧长为8πcm的弧所对的圆心角为α，其中$0<\alpha<2\pi$，求出与角α终边相同的角的集合A；并判断集合A与集合$B=\{\alpha|\alpha=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\}$之间的关系.