第一章

函　　数

☞ 仔细阅读配套学习与考试指导中的考试内容与考试要求(P1),了解本章内容。

§1.1 预备知识

一、绝对值

绝对值及其性质是学习高等数学时常用的基础知识.

定义 1.1.1 实数 x 的绝对值记为 $|x|$,定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义是:$|x|$ 表示数轴上点 x(点 x 可以在原点的右边或左边)与原点之间的距离.

$|x|$是非负实数.

绝对值及其运算有以下常用性质：

(1) $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$.

(2)设 $a>0$,则$|x|<a$ 与$-a<x<a$ 等价.

(3)设 $b>0$,则$|x|>b$ 与 $x<-b$ 或 $x>b$ 等价.

(4)$|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

(5)$|x-y|\geqslant|x|-|y|$.

(6)$|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.

(7)当 $y\neq0$ 时,$\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$.

二、区间

区间是实数集合的简便表达方式.

设 a、b 为实数,且 $a<b$.

(1)满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合,称为以 a、b 为端点的开区间,记作(a,b).

(2)满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合,称为以 a、b 为端点的闭区间,记作$[a,b]$.

(3)满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的实数 x 的集合,称为以 a、b 为端点的半开区间,记作$(a,b]$或$[a,b)$,分别可称为左开右闭或左闭右开的半开区间.

(4)满足不等式 $a<x$ 或 $a\leqslant x$ 的实数 x 的集合,分别记作$(a,+\infty)$或$[a,+\infty)$,称为半无限区间.

(5)满足不等式 $x<b$ 或 $x\leqslant b$ 的实数 x 的集合,分别记作$(-\infty,b)$或$(-\infty,b]$,称为半无限区间.

(6)全体实数的集合记为$(-\infty,+\infty)$,称为无限区间.

前三类区间为有限区间. 有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$,称为区间的长.

三、邻域

设 x_0 是定实数,$\delta>0$ 是正实数,满足不等式$|x-x_0|<\delta$ 的实数 x 的集合,称

为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$. x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

由绝对值的性质，$|x-x_0|<\delta$ 等价于 $-\delta<x-x_0<\delta$，即 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$，因此 $U(x_0,\delta)$ 是数轴上以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间，即 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

如 $|x-1|<\frac{1}{10}$ 就是以点 $x_0=1$ 为中心，以 $\delta=\frac{1}{10}$ 为半径的邻域，也就是开区间 $(0.9,1.1)$.

满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的实数 x 的集合，称为点 x_0 的 δ 空心邻域，记作 $\hat{U}(x_0,\delta)$. 满足 $0<|x-x_0|$ 时表明 $x\neq x_0$，所以在 $U(x_0,\delta)$ 中挖去中心 x_0 就得 $\hat{U}(x_0,\delta)$. $\hat{U}(x_0,\delta)$ 可表为

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

如 $0<|x-1|<\frac{1}{10}$ 就是以点 $x_0=1$ 为中心，以 $\delta=\frac{1}{10}$ 为半径的空心邻域 $(0.9,1)\cup(1,1.1)$.

【附记】 在高等数学中，$\delta>0$ 应理解为绝对值要多小就多小的正数，由此可知，若 $x\in\hat{U}(x_0,\delta)$，则实数 x 是无限接近 x_0 的值.

§1.2 函数

函数是刻画客观世界数量关系的基本概念.

一、函数概念

1. 函数定义

定义 1.2.1 设 D 是非空实数集合，对每一个 $x\in D$，若在某个法则 f 下，总有惟一确定的实数 y 与之对应，则称这个法则 f 为定义在 D 上的函数，或称变量 y 是变量 x 的函数. 记作

$$y=f(x),\qquad x\in D$$

x 称为自变量，y 称为因变量. 集合 D 称为函数的定义域，可记作 $D(f)$.

对于 $x_0 \in D(f)$，对应的 y 值记作 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y(x_0)$，称为对应于自变量值 x_0 的函数值. 当 x 取遍 D 中一切可取值时，对应函数值的集合称为函数的值域记作 $Z(f)$.

由函数定义可知，定义域和对应法则是决定两个变量间的函数关系的要素. 对应法则的内容由值域体现. 从而，判明两个函数是否相同的条件是：**定义域与值域完全相同**.

☞请阅读光盘"重点概念"中的函数，系统了解该概念。

例 1.2.1 判明 $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ 与 $g(x)=x$ 是否相同函数.

解 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；$g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 由于定义域不同，所以不是相同函数.

例 1.2.2 判明 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$ 是否相同函数.

解 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$；$g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

$f(x)$ 的值域是 $[0,+\infty)$；$g(x)$ 的值域是 $(-\infty,+\infty)$.

由于值域不同，所以不是相同函数.

例 1.2.3 判明 $f(x)=\sqrt[3]{x^3}$ 与 $g(x)=x$ 是否相同函数.

解 $D(f)=(-\infty,+\infty)$，$D(g)=(-\infty,+\infty)$；

$Z(f)=(-\infty,+\infty)$，$Z(g)=(-\infty,+\infty)$.

由于定义域与值域完全相同，所以是相同函数.

2. 函数的定义域

使对应法则有意义的非空集合 D 是函数 $y=f(x)$ 的定义域. 在数学问题中，对应法则就是运算法则，因此，定义域依运算法则得到满足而确定.

例 1.2.4 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-x}}{\log_2(x+4)}$ 的定义域.

解 x 的取值应满足

$$\begin{cases} 3-x\geqslant 0 \\ x+4>0 \\ x+4\neq 1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x\leqslant 3 \\ x>-4 \\ x\neq -3 \end{cases}$$

故

$$D(f)=(-4,-3)\cup(-3,3]$$

例 1.2.5 设函数 $f(x)$ 的定义域为区间 $[0,1]$，求 $f(\ln x)$ 的定义域.

解 由题设，$f(\ln x)$ 的定域应由 $0\leqslant \ln x\leqslant 1$ 解出，即 $e^0\leqslant x\leqslant e^1$，$1\leqslant x\leqslant e$. 故所求为 $[1,e]$.

3. 函数值 $f(x_0)$

$f(x_0)$ 是自变量 x 取值 x_0 在法则 f 作用下的结果，称为与 x_0 对应的函数值. 依此概念，欲求 $f(x_0)$，只需用 x_0 替换 $f(x)$ 表达式中的 x. 在此概念下，对 x_0 并没有限制，只要 $x_0\in D(f)$.

例 1.2.6 设 $f(x)=x^2+1$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(y^2)$，$f(x-1)$，$f[f(x)]$.

解

$$f(-2)=(-2)^2+1=5$$
$$f(0)=0^2+1=1$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{5}{4}$$
$$f(y^2)=(y^2)^2+1=y^4+1$$
$$f(x-1)=(x-1)^2+1=x^2-2x+2$$
$$f[f(x)]=[f(x)]^2+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$$

例 1.2.7 设 $f(x+1)=x^2+3x-2$，求 $f(x)$.

解 〈方法一〉

$$\begin{aligned}f(x+1)&=x^2+2x+1+x+1-4\\&=(x+1)^2+(x+1)-4\end{aligned}$$

$$f(x)=x^2+x-4$$

〈方法二〉 令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，一并代入题设等式，有

$$\begin{aligned}f(t)&=(t-1)^2+3(t-1)-2\\&=t^2-2t+1+3t-3-2\\&=t^2+t-4\end{aligned}$$

$$f(x)=x^2+x-4$$

4. 函数的图形

设有函数 $y=f(x)$，$x\in D(f)$，由自变量 x 值与对应函数值 y 可构成有序二维数组 (x_i,y_i) $(i=1,2,3,\cdots)$，以 (x_i,y_i) 为平面点的坐标，可确定平面点集，即平面

曲线. 于是函数 $y=f(x)$ 与平面曲线一一对应.

二、函数的几种简单性态

1. 函数的单调性

定义 1.2.2 设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 有定义,任取 $x_1<x_2\in(a,b)$.

(1)若 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 单调增加.

(2)若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 单调减少.

分别称 (a,b) 为 $f(x)$ 的单调增区间或单调减区间.

定义 1.2.3 若函数 $y=f(x)$ 在定义域单调增(或单调减),则称 $f(x)$ 为单调函数.

(a,b) 内单调增函数的图形是上升曲线(见图 1.2.1);单调减函数的图形是下降曲线(见图 1.2.2).

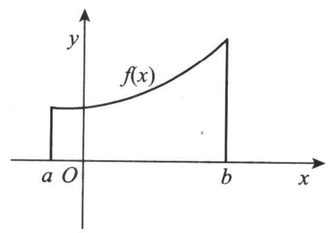

图 1.2.1

如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 单调减,在 $(0,+\infty)$ 单调增. 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 有增有减,不是单调函数.

再如 $y=x^3$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 单调增,是单调增函数.

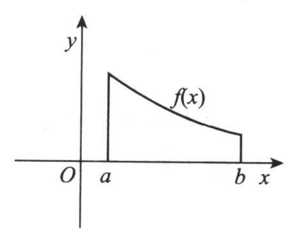

图 1.2.2

2. 函数的奇偶性

定义 1.2.4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-a,a)$ 有定义.

(1)若 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数.

(2)若 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

(3)若 $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$,则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数,若点 $(x,f(x))$ 在曲线 $y=f(x)$ 上,根据定义 1.2.3 点 $(-x,f(x))$ 也在曲线上,所以偶函数的图形关于 y 轴轴对称. 经类似的分析,可知奇函数的图形关于坐标原点中心对称.

如 $y=x^2$ 是偶函数. 因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$. 抛物线 $y=x^2$ 关于 y 轴轴对称(见图 1.2.3).

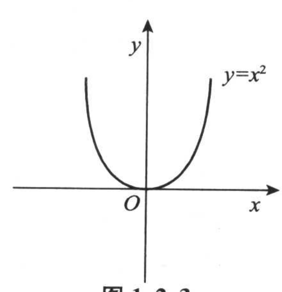

图 1.2.3

再如 $y=x^3$ 是奇函数. 因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3$

$=-f(x)$. 立方抛物线$y=x^3$关于坐标原点中心对称(见图 1.2.4).

又如 $y=x^3+1$ 是非奇非偶函数. 因为 $f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1=-(x^3-1)$,从而 $f(-x)\neq f(x)$且 $f(-x)\neq -f(x)$. 非奇非偶函数的图形没有关于坐标系的对称性(见图 1.2.5).

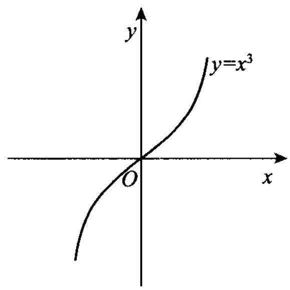

图 1.2.4

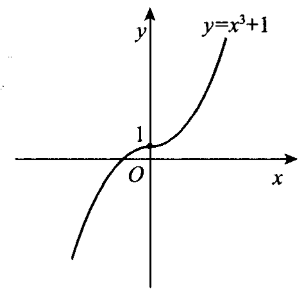

图 1.2.5

☞请阅读光盘"重点概念"中的<u>函数的奇偶数</u>,系统了解该概念。

3. 函数的周期性

定义 1.2.5 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有定义,若存在正数 $T>0$,使得

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$为周期函数。可使上式成立的最小的正数 T,称为周期函数的周期.

以 T 为周期的周期函数的图形对应 x 轴每隔 T 个单位重复出现.

如 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数. $y=\tan x$, $y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

☞请阅读光盘"重点概念"中的<u>函数的周期性</u>,系统了解该概念。

4. 函数的有界性

定义 1.2.6 设函数 $y=f(x)$在(a,b)有定义,如果存在正数 $M>0$,对一切 $x\in(a,b)$满足$|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在(a,b)有界. 如果可使不等式成立的 M 不存在,则称 $f(x)$在(a,b)无界.

若 $f(x)$在(a,b)有界,由于$|f(x)|\leqslant M$ 等价于$-M\leqslant f(x)\leqslant M$,这表明对应$(a,b)$,曲线 $y=f(x)$落于由直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 所构成的带形区域中.

如在$(-\infty,+\infty)$上,$|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$,$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}$,$|\operatorname{arccot} x|<\pi$,$|\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2}$,$|\arccos x|\leqslant\pi$,因此这些函数均为有界函数.

☞请阅读光盘"重点概念"中的函数的有界性,系统了解该概念。

§1.3 反函数

定义 1.3.1 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $D(f)$,值域是 $Z(f)$. 若对每一个 $y\in Z(f)$,总有惟一确定且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应,其对应规则记作 f^{-1}. 这个定义在 $Z(f)$ 的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为直接函数 $y=f(x)$ 的反函数. 亦可称 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

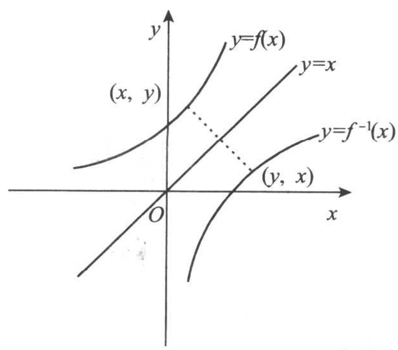

图 1.3.1

对函数 $y=f(x)$,x 是自变量,y 是因变量,$D(f)$ 是定义域,$Z(f)$ 是值域.

对函数 $x=f^{-1}(y)$,y 是自变量,x 是因变量,$Z(f)$ 是定义域,$D(f)$ 是值域.

由于在同一直角坐标系下,$y=f(x)$ 的图形和 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是同一条曲线,为从几何角度区分一对反函数,也因为习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,将直接函数 $y=f(x)$ 的反函数由 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称(见图 1.3.1).

☞请阅读光盘"重点概念"中的反函数,系统了解该概念。

例 1.3.1 求 $y=2x+1$ 的反函数.

解 由 $y=2x+1$,解 x,得

$$2x=y-1$$

$$x=\frac{y-1}{2}$$

将 x、y 互换,$y=2x+1$ 的反函数为:$y=\frac{x-1}{2}$(见图 1.3.2).

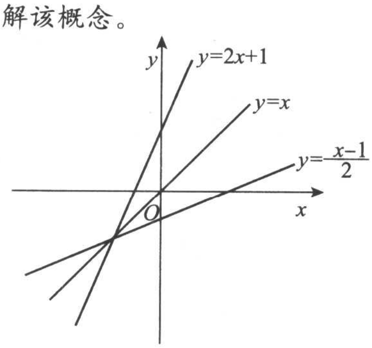

图 1.3.2

【附记】 并不是任何直接函数都存在反函数. 如 $y=x^2$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$内不存在反函数，由 $y=x^2$ 解 x，得 $x=\pm\sqrt{y}$，即与 y 对应的 x 不是惟一的，不可认为 x 是 y 的函数. 但若约定 $x\in(0,+\infty)$，则 $x=\sqrt{y}$是 $y=x^2$ 的反函数；若约定 $x\in(-\infty,0)$，则 $x=-\sqrt{y}$是 $y=x^2$ 的反函数. 由此可知：

(1)单调函数存在反函数，且反函数也是单调函数.

(2)非单调函数在其单调的子集合上存在反函数.

§1.4 复合函数

定义 1.4.1 设有函数 $y=f(u)$，定义域为 $D(f)$；又设函数 $u=\varphi(x)$，值域为 $Z(\varphi)$. 若 $Z(\varphi)\cap D(f)$非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$是由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$复合而得的复合函数. x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量。

☞请阅读光盘“重点概念”中的复合函数，系统了解该概念。

例 1.4.1 设 $u=\varphi(x)=1-x^2$，$y=f(u)=\sqrt{u}$. 讨论可否构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$.

解 对任意实数 x，$1-x^2\leqslant 1$，即 $Z(\varphi)=(-\infty,1]$. 而 $D(f)=[0,+\infty)$. 由于 $Z(\varphi)\cap D(f)=[0,1]$，为非空，所以 $y=f[\varphi(x)]=\sqrt{1-x^2}$是复合函数.

例 1.4.2 设 $u=\varphi(x)=2+x^2$，$y=f(u)=\arcsin u$，讨论可否构成复合函数.

解 对任意实数 x，$2+x^2\geqslant 2$，即 $Z(\varphi)=[2,+\infty)$，而 $D(f)=[-1,1]$，由于 $Z(\varphi)\cap D(f)$为空集，所以 y 不是 x 的函数，即 $u=2+x^2$ 与 $y=\arcsin u$ 不可构成复合函数.

学会将一个表达式较复杂的函数看成是由若干个简单函数复合而得，是以后研究函数的相关问题的重要基础.

例 1.4.3 函数 $y=2^{\sin^2 x}$可看作由哪些简单函数复合而得?

解 所谓简单函数是指基本初等函数.

所给函数可看作是由 $y=2^u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 复合而得的复合函数.

【附记】 构成复合函数的中间变量可以不止一个，允许多重复合. 所谓“复合”就是依字母逐次代换.

§1.5 初等函数

一、基本初等函数

基本初等函数是指以下六类函数的全体.

(1)常数函数:$y=c$(c 是常数).

(2)幂函数:$y=x^{\mu}$(μ 是任意实数).

(3)指数函数:$y=a^{x}$($a>0,a\neq 1$),特殊地 $y=\mathrm{e}^{x}$.

(4)对数函数:$y=\log_a x$($a>0,a\neq 1$),特殊地 $y=\ln x$.

(5)三角函数:$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$.

(6)反三角函数:$y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\text{arccot}\, x$.

上述基本初等函数在中学时都已学过. 现就其定义域、简单性态,以及图形进行复习.

☞请阅读光盘“重点概念”中的初等函数,系统了解该概念。

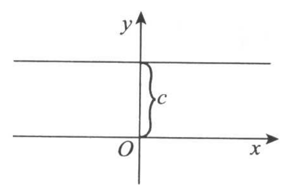

图 1.5.1

1. 常数函数 $y=c$(c 是常数)

定义域是$(-\infty,+\infty)$,是有界偶函数. 图形为平行于 x 轴,截距为 c 的直线(见图 1.5.1).

☞请演习光盘“模拟演示”中的常函数。

2. 幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 是实数)

定义域与 μ 有关. 但对任何实数 μ 均在$(0,+\infty)$有定义,且图形均过(1,1)点.

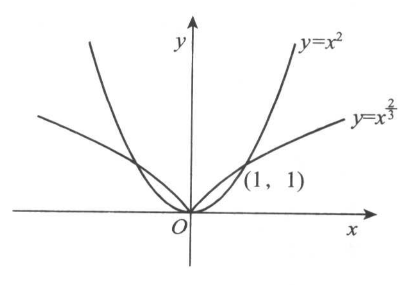

图 1.5.2

常用的有 $y=x^2$,$y=x^{\frac{2}{3}}$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,是无界偶函数,图形关于 y 轴对称(见图 1.5.2).

$y=x^3$、$y=x^{\frac{1}{3}}$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,是无界奇函数,图形关于坐标原点对称(见图 1.5.3).

$y=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，是无界奇函数，图形关于坐标原点对称（见图 1.5.4）.

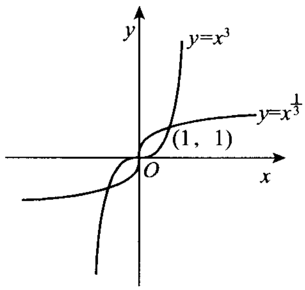

图 1.5.3

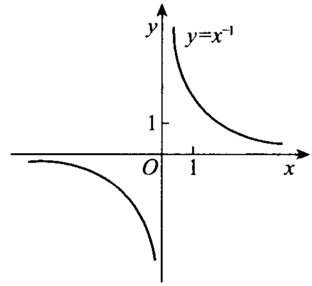

图 1.5.4

$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$，定义域为$[0,+\infty)$，图形无对称性（见图 1.5.5）.

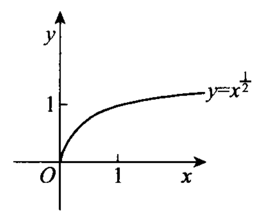

图 1.5.5

☞请演习光盘“模拟演示”中的幂函数。

3. 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$

定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$，图形均过点$(0,1)$。当 $a>1$ 时，为单调增函数；当 $0<a<1$ 时，为单调减函数（见图 1.5.6）.

☞请演习光盘“模拟演示”中的指数函数。

4. 对数函数 $y=\mathrm{log}a^x(a>0,a\neq1)$

定义域为$(0,+\infty)$，图形均过点$(1,0)$. 当 $a>1$ 时，为单调增函数；当 $0<a<1$ 时为单调减函数（见图 1.5.7）.

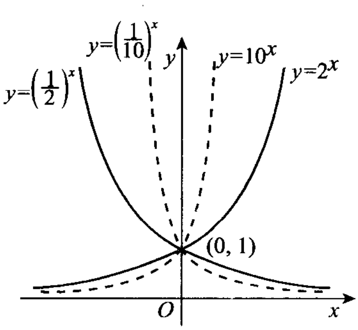

图 1.5.6

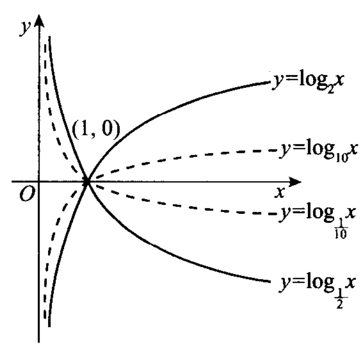

图 1.5.7

指数函数与对数函数互为反函数.

☞请演习光盘"模拟演示"中的对数函数。

5. 三角函数

三角函数有 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$. 重点掌握 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$. 其余三个可化为这三个来讨论,即 $\cot x=\dfrac{1}{\tan x}, \sec x=\dfrac{1}{\cos x}, \csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

$y=\sin x, y=\cos x$ 的定义域均为$(-\infty,+\infty)$,均以 2π 为周期. 因为 $|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$. 它们均是有界函数.

因为 $\sin(-x)=-\sin x$,所以 $y=\sin x$ 是奇函数.

因为 $\cos(-x)=\cos x$,所以 $y=\cos x$ 是偶函数.

$y=\sin x, y=\cos x$ 的图形见图 1.5.8.

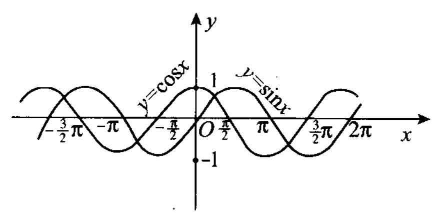

图 1.5.8

$y=\tan x$ 的定义域是 $x\neq(2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\cdots)$的实数集合. 以 π 为周期. 因为 $\tan(-x)=-\tan x$,所以是奇函数,是无界函数,在$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(k=0,\pm1,\cdots)$单调增(见图 1.5.9).

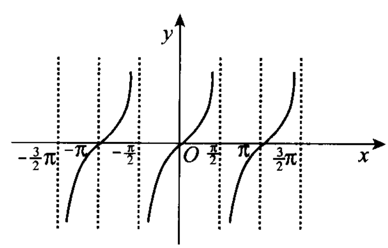

图 1.5.9

☞请演习光盘"模拟演示"中的三角函数。

6. 反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$ 的反函数,是 $y=\sin x$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$的子集合区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数的主值分支. 所以 $y=\arcsin x$ 的定义域是$[-1,1]$,主值值域是$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,是有界单调增奇函数(见图 1.5.10).

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域是$[-1,1]$,主值值域是$[0,\pi]$,是有界单调减函数(见图 1.5.11).

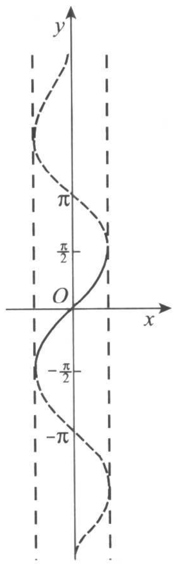

图 1.5.10

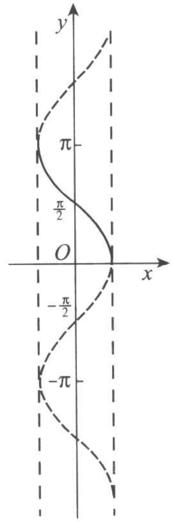

图 1.5.11

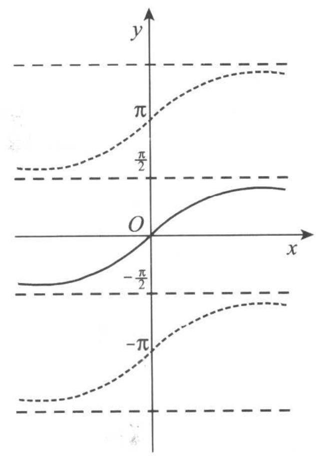

图 1.5.12

反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，主值值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，是有界单调增奇函数(见图 1.5.12).

☞请演习光盘“模拟演示”中的反三角函数。

二、初等函数

基本初等函数经有限次四则运算或有限次复合所构成的函数称为初等函数.

【附记】 本教材中除分段函数和变上限函数外均为初等函数.

§1.6 分段函数

如果两变量 x,y 的函数关系，对于定义域内自变量 x 的不同取值，对应法则不能用一个解析式表达，而要用两个或更多个解析式表达，这种函数称为分段

函数.

☞请阅读光盘"重点概念"中的分段函数,系统了解该概念。

如 $y=|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$ 就是定义在$(-\infty,+\infty)$的分段函数. 其图形见图 1.6.1.

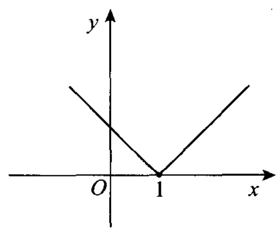

图 1.6.1

☞仔细阅读配套学习与考试指导中的释疑解难(P2～P7),加深对本章难点的理解。

仔细阅读配套学习与考试指导中的典型例题解析(P7～P13),掌握解题思路;在 30 分钟内完成光盘中本章的"即时练习",巩固所学知识;在 90 分钟内完成配套学习与考试指导中的综合练习(P13～P21),进一步提高解题技巧。

第二章

极限与连续

☞仔细阅读配套学习与考试指导中的考试内容与考试要求(P22～P23)，了解本章内容。

§2.1　数列的极限

一、数列及其性质

1. 数列

定义 2.1.1　按某种法则且可与自然数一一对应的一列数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \cdots$$

称为一个数列，记作$\{x_n\}$. 其中 x_n 称为数列的一般项. n 取自然数 1,2,3,…，称为项数.

☞请阅读光盘“重点概念”中的数列，系统了解该概念。

设 $x_n=2n$,则有 $2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots$

设 $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}$,则有 $\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{16},\cdots,(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n},\cdots$

设 $x_n=\frac{n+1}{n}$,则有 $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$

设 $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$,则有 $0,1,0,1,\cdots,\frac{1+(-1)^n}{2},\cdots$

设 $x_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$,则有 $0,1,0,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1+(-1)^n}{n},\cdots$

设 $x_n=n[1+(-1)^n]$,则有 $0,4,0,8,\cdots,n[1+(-1)^n],\cdots$

若项数 n 在平面直角坐标系的横轴上取值,以 n 为平面点的横坐标,以与 n 对应的 x_n 为平面点的纵坐标,则数列与平面点一一对应,即一个数列在几何上可表示为平面点群. 如数列 $x_n=2n$ 的几何图形。见图 2.1.1.

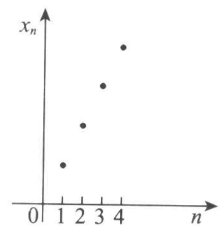

图 2.1.1

2. 数列的性质

性质 1 给定数列 $\{x_n\}$,若满足 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots$,则称数列 $\{x_n\}$ 为单调增数列;若满足 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant\cdots$,则称数列 $\{x_n\}$ 为单调减数列. 若数列既不是单调增的,也不是单调减的,则称为摆动数列.

如在前述各例中,例 $x_n=2n$ 为单调增数列. 例 $x_n=\frac{n+1}{n}$ 为单调减数列. 其余各例为摆动数列.

性质 2 给定数列 $\{x_n\}$,若存在正数 $M>0$,若对一切项数 n,恒有 $|x_n|\leqslant M$ 成立,则称 $\{x_n\}$ 为有界数列. 若使上述不等式成立的 M 不存在,则称 $\{x_n\}$ 为无界数列.

如前述例 $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}$,$x_n=\frac{n+1}{n}$,$x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$ 所论数列均为有界数列,其余各数列为无界数列.

二、数列的极限

在前述各数列中,当项数 n 逐渐增大时,数列各项的数值有着各自的变化趋势,对于不同的变化趋势,我们给出如下定义.

定义 2.1.2 给定数列 $\{x_n\}$,当项数 n 无限增大时(称为 n 趋向于无穷大,记作

$n\to\infty$)，x_n 的值趋向于惟一确定的常数 A，则称 A 为 $n\to\infty$ 时数列$\{x_n\}$的极限. 记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n\to A(n\to\infty)$$

如果 x_n 不趋向于惟一常数，则称$\{x_n\}$在 $n\to\infty$ 时没有极限.

☞请阅读光盘"重点概念"中的数列极限，系统了解该概念。

若 $n\to\infty$ 时，$x_n\to A$，则称数列$\{x_n\}$收敛，且收敛于 A；若 $n\to\infty$ 时，$\{x_n\}$没有极限，则称数列$\{x_n\}$发散.

观察前述各例中数列前若干项的值. 根据定义可知：当 $n\to\infty$ 时，$x_n=2n\to\infty$，数列发散. 当 $n\to\infty$ 时，$x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\to 0$，数列收敛，可表为：$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}=0$. 当 $n\to\infty$ 时，$x_n=\frac{n+1}{n}\to 1$，数列收敛，可表为：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$. 当 $n\to\infty$ 时，若 n 取到偶数 $2k$，则 $x_n\to 1$；若 n 取到奇数 $2k-1$，则 $x_n\to 0$，变化趋势不惟一，所以数列发散.

【附记】 (1) 当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to A$ 的含义是：对于无限增大的项数 n，对应的 x_n 的值与常数 A 的差的绝对值 $|x_n-A|$ 将无限减小. 如当 $n\to\infty$ 时，$x_n=\frac{n+1}{n}\to 1$. 由 $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\left|\frac{n+1-n}{n}\right|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}$ 可知，对于无限增大的 n，$\frac{1}{n}$ 将无限减小，所以当 $n\to\infty$ 时，$x_n=\frac{n+1}{n}$ 以 1 为极限.

由图 2.1.2 可看出，数列 $x_n=\frac{n+1}{n}$ 对应的点群，随着 n 的增大向右分布时，越来越接近水平直线 $y=1$. 这是收敛数列的几何图形特征.

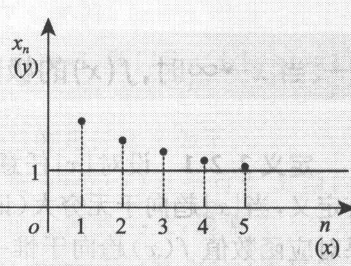

图 2.1.2

(2) 发散数列的变化趋势也不尽相同. 如果当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to\infty$，通常称之为无穷型发散. 在形式上可记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$. 如对数列 $x_n=2n$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}2n=\infty$. 如果当 $n\to\infty$ 时，x_n 趋向于不惟一的常数，通常称之为摆动型发散，这时在形式上没有极限记号. 如对数列 $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$，结论是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}$ 摆动不存在. 同理，数列 $x_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$ 和 $x_n=n[1+(-1)^n]$ 也均为摆动型发散数列.

☞请演习光盘"模拟演示"中的数列极限。