普通高等教育"十五"国家级规划教材辅导丛书

张艳 孙玉华 刘杰民 编著

概率论及试验统计

（第二版）

金牌辅导

章节要点
难点解析
习题详解
活学活用

中国建材工业出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材辅导丛书

概率论及试验统计(第二版)
金 牌 辅 导

张艳　孙玉华　刘杰民　编著

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论及试验统计(第二版)金牌辅导/张艳,孙玉华,刘杰民编著.—北京:中国建材工业出版社,2006.4
(普通高等教育"十五"国家级规划教材辅导丛书)
ISBN 7-80227-032-4

Ⅰ.概… Ⅱ.①张… ②孙… ③刘… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②试验统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第014765号

内 容 提 要

本书是根据普通高等教育"十五"国家级规划教材的教学基本要求,作为概率论及试验统计的辅助教材而编写的,内容包括随机事件的概率、随机变量的分布与数字特征等基础理论知识及常用的试验统计分析方法.每一章均在简要总结基本内容的基础上,通过典型例题的分析,介绍概率论及试验统计解题技巧.每一章都附有《概率论及试验统计(第二版)》教材的习题解答和活学活用的例题.

本书可作为高等学校本科的辅助教材,也可作为考研复习的参考用书.

概率论及试验统计(第二版)金牌辅导
张艳 孙玉华 刘杰民 编著
出版发行:中国建材工业出版社
地 址:北京市西城区车公庄大街6号
邮 编:100044
经 销:全国各地新华书店
印 刷:北京鑫正大印刷有限公司
开 本:850mm×1168mm 1/32
印 张:13
字 数:336千字
版 次:2006年4月第一版
印 次:2006年4月第一次
定 价:20.00元

网上书店:www.ecool100.com
本书如出现印装质量问题,由我社发行部负责调换.联系电话:(010)88386906

前　言

《概率论及试验统计(第二版)金牌辅导》是一本学习与复习“概率论及试验统计”的辅导教材.该书是根据普通高等教育“十五”国家级规划教材《概率论及试验统计(第二版)》的内容,按九章编写.每一章包括四部分内容:

一、章节要点;

二、难点解析;

三、习题详解;

四、活学活用.

每一章的章节要点是对教材中该章内容的总结;难点解析部分大多选自概率统计中的典型例题,通过对典型例题的分析,介绍概率论及试验统计中的基本解题方法及解题技巧;习题详解给出了“十五”国家级规划教材《概率论及试验统计(第二版)》全部练习与习题的详尽题解,便于读者学习教材时分析、对照和检查;活学活用中所介绍的例题多是考查应用所学知识解决实际问题的能力.

本书是编著者根据多年的教学经验,依据对课程内容的研究与理解,并在综合分析学生认识规律的基础上编写的.

本书的编写工作得到了中国建材工业出版社有关同志的大力支持,她们为全书的编审作出了大量出色的工作,这里向她们表示衷心的感谢.

限于编者水平及撰稿时间仓促,对书中的疏漏及错误,敬请读者批评指正.

编者

2006年1月

目　　录

第一章　随机事件的概率

【章节要点】

一、随机试验与随机事件

1. 随机试验:满足下列条件的试验:

(1)试验可以在相同的条件下重复进行多次,结果不一定相同;

(2)试验前能知道一切可能出现的试验结果,却不能预知哪一个结果会出现.

2. 样本空间:在某一随机试验中由可能出现的全部试验结果所组成的集合.

3. 随机事件:在随机试验中,可能出现,也可能不出现的某一件事情,称为随机事件.如果某一事件只与样本空间的一个元素相对应,称为基本事件,必然出现的事件称为必然事件,用 Ω 表示.不可能出现的事件称为不可能事件,用 $\varnothing$ 表示.

4. 随机事件的关系及运算

(1)包含与相等:如果 A 出现必然导致 B 出现,则称 B 包含 A,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,如果 $A\subset B$ 并且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等.记作 $A=B$.

(2)事件的并(和):A 与 B 至少有一个出现所构成的事件称为 A 与 B 的并(或和),记作 $A\cup B$.

(3)事件的交(积):A 与 B 都出现所构成的事件称为 A 与 B 的交(或积),记作 AB 或 $A\cap B$.

(4)不相容事件:如果 A 与 B 不可能都出现,则称 A 与 B 不相

容(或互斥).即满足 $AB=\varnothing$.如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件 A_i 与 A_j 不相容,即当 $i\neq j$ 时,$A_iA_j=\varnothing$,称这个事件组是互不相容的.如果此时还满足 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一个完备事件组.

(5)对立事件:A 不出现所构成的事件称为 A 的对立事件,记作 $\overline{A}$.A 与 $\overline{A}$ 满足 $A\overline{A}=\varnothing$,$A\cup\overline{A}=\Omega$.

(6)两事件的差:A 出现而 B 不出现所构成的事件称为它们的差,记作 $A-B$,$A-B=A\overline{B}$.

(7)关系及运算的性质

①包含关系具有传递性,相等关系也具有传递性,即:

$$若\ A\subset B,B\subset C,则\ A\subset C;$$

$$若\ A=B,B=C,则\ A=C.$$

②事件的并满足交换律与结合律,即:

$$A\cup B=B\cup A;$$

$$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$$

③事件的交满足交换律、结合律与分配律,即:

$$AB=BA;$$

$$ABC=(AB)C=A(BC);$$

$$A(B\cup C)=AB\cup AC.$$

④对偶定律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$,$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

$$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C},\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C};$$

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A_1}\ \overline{A_2}\cdots\overline{A_n},\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}.$$

二、随机事件的概率

1.古典概率:如果随机试验的样本空间中基本事件的总数为有限数 n 并且各个基本事件出现的可能性相等,而事件 A 包含其中的 r 个基本事件,则定义 A 的概率 $P(A)=\dfrac{r}{n}$,称为古典概率.

2.几何概率:如果随机试验的样本空间中有无限多个基本事

件，且它们出现的可能性相同，将各个基本事件看作区域 G 中的一个点，那么 $A=\{$在 G 中任取一点恰好在 g 内$\}$时，定义 $P(A)=\dfrac{g\text{ 的测度}}{G\text{ 的测度}}$，称为几何概率.

3. 概率的公理化定义：

若函数 $P(A)$的定义域是样本空间 Ω 的全部子集所组成的集合，且 $P(A)$满足：

公理 1　$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

公理 2　$P(\varnothing)=0, P(\Omega)=1$；

公理 3　对于互不相容的可数多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots,$$

称函数 $P(A)$为事件 A 的概率.

三、概率的计算公式

1. 加法公式

(1)若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

(2)若 A 与 B 不相容，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

(3)$P(A)=1-P(\overline{A})$.

(4)若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

(5)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

2. 条件概率与乘法公式

(1)如果已知 $P(A),P(B)$及 $P(AB)$，且 $P(A)>0,P(B)>0$，则

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)},P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

(2)当 $P(A)>0$ 时，$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$；

当 $P(B)>0$ 时，$P(AB)=P(B)P(A|B)$.

3. 全概率公式

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

4. Bayes 公式

若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，则

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}.$$

四、事件的相互独立性

1. 两个事件相互独立：当 $P(AB)=P(A)P(B)$ 时，称事件 A 与 B 相互独立.

2. 若 A、B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

3. 两两独立：对于事件 A,B 与 C，当 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$ 时，称 A,B,C 两两独立.

4. 相互独立：当 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，并且 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 时，称 A，B，C 相互独立.

5. 二项概率公式：

若以 $P_n(k)$ 表示某事件 A 在 n 次重复独立试验中出现 k 次的概率，则

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\qquad(k=0,1,2,\cdots,n),$$

此公式称为二项概率公式.

6. Poisson 公式：

当 n 很大，p 很小，$\lambda=np$ 时，$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$，记

$$P_\lambda(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (k=0,1,2,\cdots),$$

称为 Poisson 公式.

【难点解析】

一、利用古典概率与加法公式计算概率

注意:

1. 利用古典概率 $P(A)=\frac{r}{n}$ 求解时,先判断样本空间是否包含有限个基本事件,每个基本事件发生的可能性是否相同.

2. 求解“至少存在一个”的问题,用对立事件求解.

例 1 把甲、乙、丙三位学生依次随机地分配到 5 间宿舍中去,假定每间宿舍最多可住 8 人,那么这三位学生住在不同宿舍的概率是______.

解 由于每间宿舍最多可住 8 人,而目前只有 3 人分配宿舍,实际上每间宿舍可看成是不限人数的.那么将 3 人随机分配到 5 间宿舍,基本事件的总数 $n=5^3$,且各基本事件出现的可能性相等.而三位学生住在不同宿舍所包含的基本事件数 P_5^3,故三位学生住在不同宿舍的概率是

$$P=\frac{r}{n}=\frac{P_5^3}{5^3}=\frac{12}{25}=0.48.$$

例 2 设事件 A,B 是两个不相容事件,$P(A)=p,P(B)=q$,则 $P(AB)=$______,$P(A\cup B)=$______,$P(A\cup\overline{B})=$______,$P(A\cap\overline{B})=$______,$P(\overline{A}\cup\overline{B})=$______,$P(\overline{A}\cap\overline{B})=$______.

解 由于 A,B 是不相容的,即 $AB=\varnothing$,故 $P(AB)=0$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=p+q;$$

$$\begin{aligned}P(A\cup\overline{B})&=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})\\&=p+1-P(B)-P(A-B)\\&=p+1-q-P(A-AB)\end{aligned}$$

$$=p+1-q-P(A)+P(AB)$$
$$=1-q;$$
$$P(A\cap\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=p;$$
$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}})=1-P(AB)=1;$$
$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-(p+q).$$

例 3　n 张奖券中含有 m 张有奖的，k 个人购买，每人一张，其中至少有一人中奖的概率为　　　　（　　）

(A)$\frac{m}{C_n^k}$；(B)$\sum\limits_{r=1}^{k}\frac{C_m^r}{C_m^n}$；(C)$\frac{C_m^1\cdot C_{n-m}^{k-1}}{C_n^k}$；(D)$1-\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$.

解　要求至少有一次中奖的概率，可先求对立事件的概率.

令 $A=\{$没有一个人中奖$\}$，则

一共 n 张奖券，k 个人购买，每人一张，基本事件总数为 C_n^k.

n 张奖券中有 m 张有奖的，$n-m$ 张没奖的，事件 A 包含的基本事件数为 C_{n-m}^k，

故　$P(A)=\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$，

至少有一人中奖的概率为 $1-P(A)=1-\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$.

答案为(D).

例 4　从一副扑克牌中任取 5 张，求下列事件的概率.

①5 张牌有同一花色；

②3 张牌有同一点数，另 2 张牌也有相同的另一点数；

③5 张牌中有 2 个不同的对(没有 3 张牌点数相同)；

④有 4 张牌点数相同.

解　①可设想为先从 4 种花色中取出一种，再从这花色的 13 张牌中取出 5 张牌，则所求的 5 张牌有同一花色的概率为

$$\frac{C_4^1\cdot C_{13}^5}{C_{52}^5}=\frac{33}{166\ 600}=0.001\ 98.$$

②可设想为先从 13 种点数中取一种，再从这一点数的 4 张牌

中取3张，然后从余下的12种点数中再取一种，并从这一点数的4张牌中取2张，因此所求事件的概率为

$$\frac{C_{13}^{1}C_{4}^{3}C_{12}^{1}C_{4}^{2}}{C_{52}^{5}}=\frac{6}{4165}=0.001\ 44.$$

③可设想先从13种点数中取出2种，再从有这2种点数的各4张牌中各取2张，然后从余下的44张牌中取出1张，因此所求概率为

$$\frac{C_{13}^{2}C_{4}^{2}C_{4}^{2}C_{44}^{1}}{C_{52}^{5}}=\frac{198}{4165}=0.047\ 54.$$

④可设想先从13种点数中取出一种，这一点数的4张牌都取出，然后从余下的48张牌中取一张，因此所求概率为

$$\frac{C_{13}^{1}C_{48}^{1}}{C_{52}^{5}}=\frac{1}{4165}=0.000\ 24.$$

例5　掷 n 粒骰子，得最小点数为2的概率是多少？

解　令 $A=\{$最小的点数$\geqslant 2\}$，$B=\{$最小的点数$\geqslant 3\}$，则

$A-B=\{$最小的点数为2$\}$，且 $A\supset B$.

而事件 A 即点数1不出现．因此 $P(A)=\dfrac{5^n}{6^n}$，

事件 B 即点数1，2都不出现．因此 $P(B)=\dfrac{4^n}{6^n}$.

故 $P(A-B)=P(A)-P(B)=\dfrac{5^n-4^n}{6^n}$.

例6　某教研室共有10名教师，其中7名男教师，现该教研室要任选3名为优秀教师，问3名教师中至少有1名女教师的概率是多少？

解　设 $A=\{$3名优秀教师中至少有1名女教师$\}$，

$A_i=\{$3名优秀教师中恰有 i 名女教师$\}(i=1,2,3)$，

则 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$，且 A_1,A_2,A_3 互不相容．

由加法公式得

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

$$= \frac{C_3^1 C_7^2}{C_{10}^3} + \frac{C_3^2 C_7^1}{C_{10}^3} + \frac{C_3^3 C_7^0}{C_{10}^3}$$
$$= 0.71.$$

另解　$P(A) = 1 - P(\overline{A})$，其中 $\overline{A} = \{3$ 个优秀教师全是男的$\}$，

故　$P(A) = 1 - \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = 0.71.$

二、利用条件概率与乘法公式计算概率

解这类型题的关键是区分求 $P(B|A)$ 还是 $P(AB)$. 凡涉及事件 A 与 B“同时”发生的用 $P(AB)$，凡有“先后”关系、“主次”关系的用 $P(B|A)$.

当用古典概率计算 $P(AB)$，AB 包含的基本事件数不易计算时，考虑用乘法公式.

例 1　已知 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.4$，且 $A \subset B$，则 $P(B|A)=$ ______.

解　$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$，

由于　$A \subset B$，故 $P(AB) = P(B) = 0.4$，

所以　$P(B|A) = \frac{0.4}{0.4} = 1.$

例 2　一批零件 100 个，其中 10 件是次品，每次从其中任取一个，取出的不再放回，如果我们设事件 A_1 表示第一次取出的是次品，事件 A_2 表示第二次取出的是次品，事件 A_3 表示第三次取出的是合格品，则

①$P(A_1) =$ ______；

②$P(A_2|A_1) =$ ______；

③$P(A_1A_2) =$ ______；

④$P(A_3|A_1A_2) =$ ______；

⑤$P(A_1A_2A_3) =$ ______.

解 显然 $P(A_1)=\frac{r}{n}=\frac{10}{100}=0.1$,

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)},P(A_1A_2)=\frac{10\times 9}{100\times 99}=\frac{1}{110},$$

故 $P(A_2|A_1)=\frac{\frac{1}{110}}{0.1}=\frac{1}{11}$.

求 $P(A_3|A_1A_2)$时,考虑 A_1A_2 已经发生了,所以第三次取产品时,总产品为 98 件,其中的次品数为 $10-2=8$ 件.合格品是 90 件.故

$$P(A_3|A_1A_2)=\frac{90}{98}=\frac{45}{49};$$

$$\begin{aligned}P(A_1A_2A_3)&=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\\&=\frac{1}{10}\times\frac{1}{11}\times\frac{45}{49}\\&=0.0084.\end{aligned}$$

例 3 如果 $P(B)>0,P[(A_1\cup A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)$.则( )成立.

(A) $P(A_1+A_2)=0$;

(B) $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$;

(C) $P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$;

(D) $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$.

解
$$\begin{aligned}P[(A_1\cup A_2)|B]&=\frac{P[(A_1\cup A_2)B]}{P(B)}\\&=\frac{P(A_1B\cup A_2B)}{P(B)}\\&=P(A_1|B)+P(A_2|B)\\&=\frac{P(A_1B)+P(A_2B)}{P(B)},\end{aligned}$$

故 $P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$.

答案为(C).

例 4 已知 $P(A)=0.3,P(B)=0.4,P(A|B)=0.5$,试求

$P(B|A), P(B|A+B), P(\overline{A}+\overline{B}|A+B)$.

解 由乘法公式 $P(AB)=P(A|B)P(B)=0.5\times 0.4=0.2$,

因此 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.2}{0.3}=\dfrac{2}{3}$;

$$P(B|A+B)=\frac{P[B(A+B)]}{P(A+B)}=\frac{P(B)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$
$$=\frac{0.4}{0.3+0.4-0.2}=\frac{4}{5}.$$

又因为 $AB\subset A+B$,所以 $AB(A+B)=AB$,从而

$$P(\overline{A}+\overline{B}|A+B)=P(\overline{AB}|A+B)=1-P(AB|A+B)$$
$$=1-\frac{P(AB)}{P(A+B)}=1-\frac{0.2}{0.5}=\frac{3}{5}.$$

三、利用全概率公式及 Bayes 公式计算概率

此二公式是计算复杂事件概率的有效方法.而应用时的关键是找出试验的一个完备事件组,在一次试验中,这组事件中有且仅有一个事件发生,因此,任一事件 A 能且只能与其中一个同时发生.直观地说,我们把 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的每一个都可看作导致事件 B 发生的“原因”,而把 B 看作结果.Bayes 公式是在已知结果发生的条件下来找各“原因”发生的概率大小的,也就是求条件概率 $P(A_i|B)$.

例 1 设同一年级有两个班:一班 50 名学生,其中 10 名女生;二班 30 名学生,其中 18 名女生.在两班中任选一个班,然后从中先后挑选两名学生,试求:

①先选出的是女生的概率;

②在已知先选出的是女生的条件下,后选出的学生也是女生的概率.

解 ①设 $A_i=\{$被选到的班是第 i 班$\}(i=1,2)$,

$B_j=\{$第 j 次选出的是女生$\}(j=1,2)$.

由题意可得

$$P(A_1)=\frac{1}{2},P(A_2)=\frac{1}{2};$$

$$P(B_1|A_1)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5},P(B_1|A_2)=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}.$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B_1)&=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\\&=\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

②由条件概率的定义有

$$P(B_2|B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)},$$

又根据全概率公式,有

$$\begin{aligned}P(B_1B_2)&=P(A_1)P(B_1B_2|A_1)+P(A_2)P(B_1B_2|A_2)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{10\times9}{50\times49}+\frac{1}{2}\cdot\frac{18\times17}{30\times29}\\&\approx0.194\,2.\end{aligned}$$

所以 $\quad P(B_2|B_1)=\dfrac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\dfrac{0.1942}{0.4}\approx0.486.$

例 2 对以往数据分析结果表明,当机器调整得良好时,产品的合格率为 98%,而当机器发生某种故障时,其合格率为 55%.每天早上机器开动时,机器调整良好的概率为 95%.试求已知某日早上第一件产品是合格品时,机器调整得良好的概率是多少?

解 设 $A=\{$机器调整良好$\}$,$B=\{$产品合格$\}$.

由题设可知 $\quad P(B|A)=0.98,P(B|\overline{A})=0.55,$

$$P(A)=0.95,P(\overline{A})=0.05.$$

由 Bayes 公式得

$$\begin{aligned}P(A|B)&=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}\\&=\frac{0.98\times0.95}{0.98\times0.95+0.55\times0.05}\\&=0.97.\end{aligned}$$