普通高等教育“十一五”规划教材

PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

（高职高专教育）

GAODENG SHUXUE
DABIAO JIAOCHENG

高等数学达标教程

马智杰 主编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

普通高等教育"十一五"规划教材 （高职高专教育）
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

GAODENG SHUXUE DABIAO JIAOCHENG

高等数学达标教程

主　编　马智杰
副主编　徐　琮　余　力
编　写　王建平　田　壤　张新绒
　　　　李　军　刘　清
主　审　谢力之

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十一五”规划教材（高职高专教育）。在认真分析总结了全国其他院校编写的同类高等数学学习辅导书的基础上，结合高职高专教育的特点和现状，依据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，我们精心编写了这本《高等数学达标教程》。内容包括函数、极限与连续、导数与微分、一元函数微分学的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、多元函数积分学及其应用、级数等。

本书每一章均分为四大部分：第一部分为基本内容与基本要求；第二部分为达标训练；第三部分为辨析解答；第四部分为自我评价。达标训练部分由思考题、是非题、填空题、选择题、计算题、解答题、证明题及实训题构成。题型全面，层次分明，通过有目标、有计划地系统练习，让读者既理解了概念，巩固了知识，又能培养能力，学会应用。本书还有一大特色是每章首页配有一幅知识网络图，作为模型，有助于训练思维，提升技能；作为结构，有助于将知识化整为零，化零为整。

本书可以与高等数学高职高专教材配套使用，也可以作为高等数学学习参考书独立使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学达标教程/马智杰主编．—北京：中国电力出版社，2006.7

普通高等教育“十一五”规划教材．高职高专教育

ISBN 7-5083-4509-6

Ⅰ．高…　Ⅱ．马…　Ⅲ．高等数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 072265 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路 6 号　100044　http://jc.cepp.com.cn）

北京同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2006 年 8 月第一版　2006 年 8 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米　16 开本　15.75 印张　382 千字

印数 0001—3000 册　定价 **23.80** 元

前　言

为贯彻落实教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》和《教育部关于以就业为导向深化高等职业教育改革的若干意见》的精神，加强教材建设，确保教材质量，中国电力教育协会组织制订了普通高等教育"十一五"教材规划。该规划强调适应不同层次、不同类型院校，满足学科发展和人才培养的需求，坚持专业基础课教材与教学急需的专业教材并重、新编与修订相结合。本书为新编教材。

高等数学是学习专业课的基础和必要工具，对培养提升学生的各种素质有着不可替代的重要作用。因此高等数学是高等院校各专业的一门重要的必修课。

在认真分析总结了全国其他院校编写的同类高等数学学习辅导书的基础上，结合高职高专教育的特点和现状，依据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，我们精心编写了这本《高等数学达标教程》。

本书每一章均分为四大部分：第一部分为基本内容与基本要求；第二部分为达标训练；第三部分为辨析解答；第四部分为自我评价。

基本内容部分分为基本概念、基本结论和基本方法三块。主要是帮助学生归类小结，理清头绪，以便于理解记忆，掌握要点。

达标训练部分由思考题、是非题、填空题、选择题、计算题、解答题、证明题及实训题构成。题型全面，层次分明，通过有目标、有计划地系统练习，让读者既能理解概念，巩固知识，又能培养能力，学会应用。

辨析解答部分是对达标训练题的分析解答，既是参考答案，又是解题指导。

自我评价部分为一张自我评价表，可以按照"评价标准"，根据学习、训练情况进行自我评价、自我激励，进而推动学习、促进发展。

本书还有一大特色，就是每章首页配有一幅知识网络图，作为模型，有助于训练思维，提升技能；作为结构，有助于将知识化整为零，化零为整。

参加本书编写的有陕西航空职业技术学院的马智杰、徐琮、王建平等副教授，以及陕西理工学院的田壤副教授。

陕西理工学院的谢力之教授审阅了本书的全部初稿，提出了不少宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

本书在编排过程中，得到了中国电力出版社及陕西航空职业技术学院各级领导和部分老师的大力支持，也在此表示诚挚的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免有不足和错误之处，恳请同仁和读者指正。

编　者

二〇〇六年元月

目　　录

第一章　函　　数

17 世纪，笛卡尔把变量引入数学，使数学由研究常数进一步发展到研究变数，从而产生了函数.

函数是刻画某一运动过程中变量间相互依存关系的数学模型，其基本思想是通过一个量求知另一个量，例如通过圆的半径求周长或通过圆的周长求半径等.

函数关系是微积分学研究的主要对象.

本章将主要学习和训练函数的相关知识.

第一节　基本内容与基本要求

一、基本内容

归类小结
掌握要点

问题	⇨	基本概念	+	基本结论	+	基本方法	⇨	应用
		1. 函数 2. 复合函数 3. 初等函数 4. 反函数 5. 分段函数 6. 隐函数		1. 六类基本初等函数的图像及性质 2. 有界函数、单调函数、周期函数和奇偶函数的特性		1. 函数的三种表示法 2. 求函数定义域的原则 3. 求反函数的步骤 4. 复合函数的分解		

(一) 基本概念

1. 函数

设 x 和 y 是一个过程中的两个变量，x 属于数集 D，如果对于每一个数 x，按照一定法则总有唯一确定的数值 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，数集 D 称为定义域，x 称为自变量，y 称为因变量，所有 y 形成的数集称为值域.

函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 就是 x 的取值范围，因变量 y 是由对应法则 f 唯一确定的，所以定义域和对应法则是函数的两个要素，或者说一个函数由定义域和对应法则唯一确定.

函数 $y=f(x)$ 也可以看作是由定义域 D 到值域 E 上的一个对应关系 $f: x \to y$ 或 $f: D \to E$，如图 1-1 所示.

2. 复合函数

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，如果 $\varphi(x)$ 的值至少有一个落在 $f(u)$ 的定义域之内，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数，其中 u 称为中间变量.

在复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 中，若 $y=f(u)$ 的定义域为 D_u，值域为 E_u，$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_x，值域为 E_x，则 $D_u \cap E_x \neq \varnothing$，如图 1-2 所示.

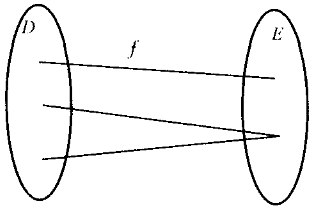


图 1 - 1

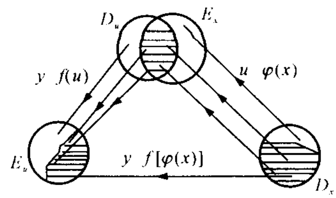


图 1 - 2

3. 初等函数

由基本初等函数（常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）经过有限次四则运算及有限次复合而构成的，且能够用一个表达式表示的函数，称为初等函数.

我们在微积分中研究的函数，绝大多数都是初等函数.

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为数集 D，值域为 E，如果反过来，对于 E 中的每一个数，都有 D 中唯一的一个数对应，则把 $y=f(x)$ 确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为其反函数. 习惯上记为 $y=f^{-1}(x)$.

函数存在反函数，则 x 与 y 一定是一一对应的，即 $y=f(x)$ 一定是单调函数.

原函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 是互为反函数的，它们的图形关于直线 $y=x$ 对称.

5. 分段函数

如果在自变量的不同取值范围内，函数表达式各不相同，则这样的函数称为分段函数.

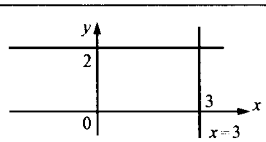
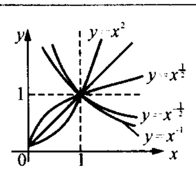
分段函数一般不是初等函数，但也有例外，如 $f(x)=\begin{cases}-x, x\leqslant 0\\ x, x>0\end{cases}$，即 $f(x)=\sqrt{x^2}$，就是一个初等函数.

6. 隐函数

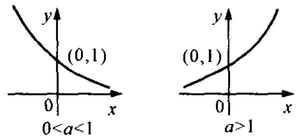
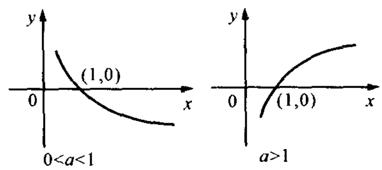
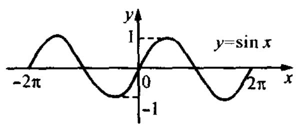
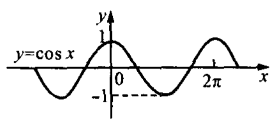
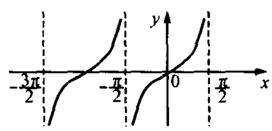
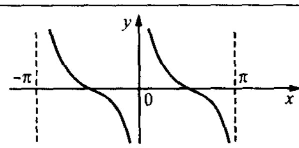
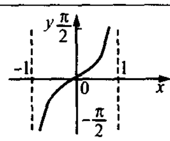
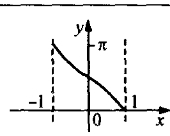
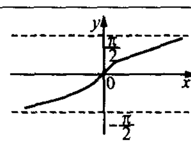
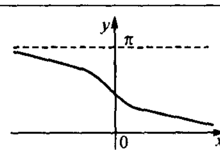
在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 在区间 D 内任意取值时，如果方程 $F(x,y)=0$ 总有唯一的解 y 与其对应，则称 $F(x,y)=0$ 在区间 D 内确定了一个隐函数.

（二）基本结论

1. 六类基本初等函数及其图像性质

名称	表达式	图　形	主要结论
常函数	$y=c$ 或 $x=c$ （c 为常数）		①定义域为一切实数； ②图像关于坐标轴平行
幂函数	$y=x^\alpha$ （α 为任意实数）		①定义域 $(0,+\infty)$； ②图像均过 $(1,1)$； ③$\alpha>0$ 时，单调增； ④$\alpha<0$ 时，单调减

续表

名称	表达式	图 形	主要结论
指数函数	$y=a^x$		①定义域均为 $(-\infty, +\infty)$； ②均过 $(0, 1)$，且 $y>0$； ③$0<a<1$ 时，单调减； ④$a>1$ 时，单调增
对数函数	$y=\log_a x$		①定义域均为 $(0, +\infty)$； ②均过 $(1, 0)$ 点； ③$0<a<1$ 时，单调减； ④$a>1$ 时，单调增
三角函数	$y=\sin x$		①定义域为 $(-\infty, +\infty)$； ②以 2π 为周期的奇函数； ③位于两条平行线 $y=\pm1$ 之间
	$y=\cos x$		①定义域为 $(-\infty, +\infty)$； ②以 2π 为周期的偶函数； ③位于两条平行线 $y=\pm1$ 之间
	$y=\tan x$		①定义域为 $\left\{x \middle\vert x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{N}\right\}$； ②以 π 为周期的奇函数； ③无界
	$y=\cot x$		①定义域为 $\{x \mid x\neq k\pi, k\in \mathbf{N}\}$； ②以 π 为周期的奇函数； ③无界
反三角函数	$y=\arcsin x$		①定义域为 $[-1, 1]$； ②主值区间为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
	$y=\arccos x$		①定义域为 $[-1, 1]$； ②主值区间为 $[0, \pi]$
	$y=\arctan x$		①定义域 $(-\infty, +\infty)$； ②主值区间为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
	$y=\operatorname{arccot} x$		①定义域 $(-\infty, +\infty)$； ②主值区间为 $(0, \pi)$

2. 四类特殊函数的特性

(1) 单调函数. 对于任意 $x_1, x_2 \in (a,b)$，如果当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $y = f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调增函数，其图像随着自变量的增大而上升.

对于任意 $x_1, x_2 \in (a,b)$，如果当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $y = f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调减函数，其图像随着自变量的增大而下降.

(2) 有界函数. 如果存在正数 M，使得对于定义域内的任意 x，均有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $y = f(x)$ 为有界函数. 其图形位于直线 $y=M$ 及 $y=-M$ 之间.

(3) 奇偶函数. 设 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对于任意 $x \in D$，如果 $f(-x) = f(x)$，则称 $y = f(x)$ 是 D 上的偶函数，其图形关于 y 轴对称.

设 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对于任意 $x \in D$，如果 $f(-x) = -f(x)$，则称 $y = f(x)$ 是 D 上的奇函数，其图形关于原点对称.

(4) 周期函数. 设 $y = f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 T，使得对于任意 $x \in D$，$x + T \in D$，均有 $f(x+T) = f(x)$，则称函数 $y = f(x)$ 为周期函数，T 称为其一个周期. 通常所说的周期函数的周期，指的是其最小正周期.

(三) 基本方法

1. 函数的表示法

(1) 解析法：①显函数；②分段函数；③隐函数.

(2) 图示法：用图像表示确定两个变量之间的对应关系.

(3) 表格法：用表格表示确定两个变量之间的对应关系.

2. 确定函数定义域的方法（常用原则）

(1) 分母不能为零.

(2) 二次根式的被开方式必须非负.

(3) 对数的真数必须为正数.

(4) 在 $y=\arcsin x$ 及 $y=\arccos x$ 中，$|x| \leqslant 1$.

(5) 分段函数的定义域是各个部分自变量取值范围之并.

(6) 几个函数经过四则运算构成一个新函数，其定义域是各定义域之交.

(7) 实际应用问题中的函数，确定定义域时，除满足上述几条外，还必须符合实际问题的要求.

3. 求反函数的步骤

(1) 从 $y = f(x)$ 中解出 x，用 y 表示 x，即 $x = \varphi(y)$.

(2) 交换变量的符号得到 $y = \varphi(x)$，这就是所求的反函数.

4. 复合函数的分解

所谓复合函数的分解，就是将较为复杂的复合函数分解成一些较为简单的函数，例如基本初等函数. 其方法就是将函数里面套的式子另外设为一个变量，产生一个新的函数，将一个函数分解成为一个函数组. 复合函数的分解是为求解微积分服务的.

5. 建立函数模型的步骤

(1) 分析问题，弄清哪些是已知条件，哪些是要解决的问题.

(2) 找出因变量、自变量、常量，并分别用字母表示.

(3) 用所学知识列出等量关系.

（4）将所列等量关系化为 $y=f(x)$ 的形式，并指出定义域.

二、基本要求 基本要求 发展起点

（1）理解函数的概念.
（2）理解基本初等函数的概念.
（3）了解分段函数、反函数、复合函数、初等函数的概念.
（4）会分析复合函数的复合结构.
（5）会建立简单实际问题的函数模型.
重点：函数的概念，求函数的定义域，分析复合函数的复合结构.
难点：分段函数的概念，建立简单实际问题的函数模型.

第二节　达　标　训　练

确立目标　系统训练

一、思考题

1. 确定一个函数有几个要素？改变其中一个要素会对函数产生什么影响？
2. 函数有几种表示法？一个函数是否可以任选一种方式来表示？
3. 何为基本初等函数？其中哪些函数互为反函数？
4. 如何用函数的图像来判断单调性、有界性、奇偶性、周期性？
5. 函数中套一个函数，是否一定是复合函数？试举例.
6. 由 $y=f(x)$ 解出 x 得到 $x=\varphi(y)$，交换 x，y 的位置，得到其反函数 $y=\varphi(x)$，问：
① $y=\varphi(x)$ 的定义域如何确定？
② $x=\varphi(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 是否为同一函数？

二、是非题

1. 函数 $y=\lg x^3$ 与 $y=3\lg x$ 是同一个函数.　（　　）
2. 函数 $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$ 是同一个函数.　（　　）
3. $f(x)=\begin{cases}1-x,x\leqslant 1\\ x,x>0\end{cases}$ 是一个分段函数.　（　　）
4. 函数 $y=\arcsin(2+x^2)$ 是复合函数.　（　　）
5. 函数 $y=\sqrt{x}+\sin x$ 的定义域是 $[0,+\infty)\cup(-\infty,+\infty)$.　（　　）
6. 函数 $y=\begin{cases}x+1,x\leqslant 1\\ x-1,x>1\end{cases}$ 的定义域是 $(-\infty,1]\cup(1,+\infty)$.　（　　）
7. 函数 $y=|x|$ 是初等函数.　（　　）

三、填空题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，则 $f(x+1)=$__________.
2. 函数 $f(x-1)=x^2+x$，则 $f(x)=$__________.

3. 函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2-x}}-\ln(x+1)$ 的定义域为____________.

4. 函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}+\sqrt{x+3}$ 的定义域为____________.

5. 设 $f(x)$ 的定义域为[0，1]，则 $f(\sqrt{1-x^2})$ 的定义域为____________.

6. 设函数 $f(x)=\sqrt{x-1}$，$\varphi(x)=\ln x+1$，则 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为____________.

7. 函数 $y=\frac{x}{1+x}$ 的反函数是____________.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x, x\leqslant 0\\ 1, x>0\end{cases}$，$f(-x)=$____________.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}1, x\leqslant 0\\ -1, x>0\end{cases}$，$f[f(x)]=$____________.

四、单选题

1. 下列函数对中，相同的函数是（　　）.

A. $f(x)=\sin^2x+\cos^2x+4$ 与 $g(x)=5$；　B. $f(x)=x$ 与 $g(x)=(\sqrt{x})^2$；

C. $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$；　D. $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ 与 $g(x)=x-2$.

2. 已知 $f(x)=\frac{1}{x}$，且 $f(x)+f(y)=f(z)$，则 $z=$（　　）.

A. $\frac{x+y}{xy}$；　B. $\frac{xy}{x+y}$；　C. $\frac{1}{x+y}$；　D. $\frac{1}{xy}$.

3. 函数 $y=\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域是（　　）.

A. $\{x|x\geqslant 1\}$；　B. $\{x|x>-1\}$；　C. $\{x|x>1\}$；　D. $\{x|x\geqslant -1\}$.

4. 函数 $y=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是（　　）.

A. $|x|\leqslant 1$；　B. $0<|x|<1$；　C. $0<|x|\leqslant 1$；　D. $|x|\geqslant 1$.

5. 函数 $f(x)$ 的定义域是[1，2]，则 $f(x-2)$ 的定义域是（　　）.

A. [1，2]；　B. [3，4]；　C. [0，1]；　D. [−1，0].

6. 设 $f(x)=\ln x$，$g(x)=x+2$，则 $f[g(x)]$ 的定义域是（　　）.

A. $[-2,+\infty)$；　B. $(-2,+\infty)$；　C. $(-\infty,-2)$；　D. $|x|>2$.

7. 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}(x\neq 1)$，则 $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$ 为（　　）.

A. x；　B. $1-x$；　C. $x-1$；　D. $\frac{1}{x-1}$.

8. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{x+2}{x}\right)^2$，则 $f(x)=$（　　）.

A. $\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$；　B. $\left(\frac{x+2}{x}\right)^2$；　C. $(1-2x)^2$；　D. $(1+2x)^2$.

9. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数，下列函数中奇函数为（　　）.

A. $y=-|f(x)|$；　B. $y=xf(x^2)$；

C. $y = f(-x)$;　　D. $y = f(x) + f(-x)$.

10. 函数 $y = 1 + \sin^2 x$ 的周期是（　　）.

A. 2π;　　B. 4π;　　C. 无周期;　　D. π.

11. 函数 $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ 的周期是（　　）.

A. 2π;　　B. π;　　C. 6π;　　D. $\frac{2}{3}\pi$.

五、计算题

1. 设 $f(x) = 3x^2 + 5x$ ，求 $f(a+1)$ ，$f\left(\frac{1}{a}\right)$.

2. 设 $f(x) = \arcsin(\ln x)$ ，求 $f(e^{-1}), f(1), f(e^{\frac{1}{2}}), f(e^2)$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} |\cos x|, |x| < \pi/4 \\ 0, |x| \geqslant \pi/4 \end{cases}$ ，求 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right), f(0), f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f(-5)$.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} x, -2 < x < 0 \\ x^2 + 2, x \geqslant 0 \end{cases}$ ，(1) 画图，(2) 求 $f(-1), f(2), f(a)$.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} x - 1, x < 0 \\ x + 2, x \geqslant 0 \end{cases}$ ，(1) 画图，(2) 求 $f(x+2), f(x-2)$.

6. 求定义域：

(1) $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin\frac{2x-1}{9}$;　　(2) $y = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} + \sqrt{2x(2x-1)}$;

(3) $y = \sqrt{\cos x}$;　　(4) $y = \arccos x + \sqrt{2 + \lceil x \rceil}$;

(5) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} + \arcsin x + \sqrt{3x} + \pi x$;

(6) $f(x) = \log_3(x^2 - 3x + 2) - e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{x}$.

7. 将下列函数分解成一组较为简单的函数：

(1) $y = \sqrt[3]{1 + 2x - x^2}$;　　(2) $y = \cot\sqrt{2 - 3x}$;

(3) $y = \cos^3(2 + 3x)$;　　(4) $y = A\cos(\omega x + \varphi)^3$;

(5) $y = 2\sin\frac{4}{x+1}$;　　(6) $y = \sin^5(\cos 2x)$.

8. 设 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $g(x) = x^2 - 1$, 求 $f[f(x)], f[g(x)], g[f(x)], f(\sqrt{x}), g(2x-1)$.

9. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,求 $f(f(f(f(x))))$.

10. 设 $\varphi(x) = x^2$ ，化简下列表达式：

(1) $\varphi(2+x) - \varphi(2)$;　　(2) $\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$;

(3) $\varphi(2h + x) - \varphi(x - 2h)$.

11. 判断函数 $f(x) = x\sin x - \cos x$ 的奇偶性.

12. 求函数 $y = 1 + \log_3(x+5)$ 的反函数.

六、解答题

1. A 轮船以 15km/h 的速度从港口出发向西行驶，同一时间 B 轮船在 A 正南 90km 处以

20km/h 的速度向北行驶回港口，试将 t 时刻 A、B 之间的距离 $S(t)$ 表示成时间 t 的函数.

2. 某学生星期日以 3m/h 的速度从宿舍出发出校办事，行走 1h 到达办事点，用 1h 办完事，以同样的速度返回宿舍，休息 2h 后，又以同样的速度离开宿舍，出校办另一件事. 请以宿舍为原点建立坐标系，绘出距离 S（学生与宿舍的距离）关于时间 t（学生离开宿舍的时间）的图像，并列出解析式.

3. 将一个篮球在时刻 $x=0$ 以 10m/s 的速度垂直抛向空中，在时刻 x（单位为 s）时，它与地面的距离为 y，已知 $y=-3x^2+9x$，试画出距离关于时间的图像，并在图像上标出篮球到达最高点处的坐标.

4. 将水以匀速注入圆锥形容器内，试画出水面高度关于时间 t 的函数 $h=h(t)$ 的草图，并说明之.

5. 一个球的半径为 1m，某工厂需做一个外切于球的圆锥，试将其体积表示为高的函数，并指出其取值范围.

6. 某企业每月需某种零件 3000 件，每件成本为 30 元，如果均匀地分若干次进货，每次进货采购费为 100 元，又知每个零件的总库存费为成本的 10%，试将月总费用表示成进货批量的函数.

七、证明题

1. 求证：若 $f(x)$ 是 $(-a,a)$ 上的任意函数，则 $f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

2. 设 $y=f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的函数，试证 $f(\lambda x)$ 是以 $\frac{T}{\lambda}$ 为周期的周期函数.

八、实训题

试举例说明函数概念及相关知识在专业课中的具体应用（提示：研读教材、查阅资料或请教老师）.

第三节 辨析解答

启发提示 参考借鉴

一、思考题

1. 答：根据函数定义知，确定一个函数有两个要素，一个是自变量与因变量之间的对应法则，另一个是自变量的取值范围——定义域，对应法则和定义域给定后，函数就被唯一确定了. 一个函数的对应法则和定义域，只要实质性地改变一个就会实质性地改变这个函数，即形成一个新的函数.

2. 答：函数有三种表示法，它们分别是解析法、图像法、列表法. 一般地，一个函数的表示方式是由已知条件的特点决定的：

（1）有些函数关系更适合用列表法来表示，比如某班学生与其数学成绩之间的对应关系构成了一个函数，就很适合用列表法表示，这个函数的图像是一个散点，如果有人给这个函数配一个解析式，那也是近似、不准确的；

（2）有些函数更适合用图像法表示，比如气象站测定的时间与温度之间的对应关系构成了一个函数，就更适合用图像法表示，比较精确，误差不大，且形象直观；

(3) 有些函数只适合用解析法来表示，能揭示问题的本质，且精确明了，比如 $y=\pi x^2$ ，$y=\sin x$ 等，这类函数的对应点无法穷举，不能用列表法表示，图像也只能展示其局部特征.

3. 答：基本初等函数是指：①常函数 $y=c$ ；②幂函数 $y=x^a$ ；③指数函数 $y=a^x$ ；④对数函数 $y=\log_a x$ ；⑤三角函数；⑥反三角函数. 其中指数函数与对数函数互为反函数，三角函数与反三角函数互为反函数.

4. 答：①如果函数图像随着自变量的增大而不断上升，这个函数就是单调增函数，如果函数图像随着自变量的增大而不断下降，这个函数就是单调减函数；

②如果函数图像位于 $Y=M$ 与 $Y=-M$ (M 为确定常数) 之间，则为有界函数；

③如果函数图像关于 Y 轴（纵）对称，则为偶函数，如果函数图像关于原点对称，则为奇函数；

④如果函数图像呈规则地重复状态，则为周期函数.

5. 答：不一定. ①如 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ ，是在 $y=\sin u$ 中套了一个 $u=\omega x+\varphi$ 构成的，由于 x 对应 $\omega x+\varphi=u$，对应 $\sin u=y$ 处处有意义，故 $y=\sin u$，$u=\omega x+\varphi$ 复合成了一个函数；

②比如 $y=\ln(1-\sqrt{1+x^2})$ 是在 $y=\ln u$ 中套了一个 $u=1-\sqrt{1+x^2}$ 构成的，由 x 对应 $1-\sqrt{1+x^2}=u$ 有意义，对应 $\ln u=y$ 无意义，故 $y=\ln u$，$u=1-\sqrt{1+x^2}$ 不能复合成一个函数.

6. 答：① $y=\varphi(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，x 与 y 必是一一对应，所以 $y=\varphi(x)$ 的定义域，就是 $y=f(x)$ 的值域；

② $x=\varphi(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 对应法则相同，均为 $\varphi(x)$ ，且使得表达式 $\varphi(x)$ 成立的数构成的集合——定义域相同，所以是同一个函数.

二、是非题

1. 答：正确. 因为 $\lg x^3=3\lg x$，两函数对应法则相同，且定义域均为 $(0,\infty)$.

2. 答：错误. 因为 $\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|\neq\cos x$，即两函数对应法则不同.

3. 答：错误. 因为 $x\in(0,1]$时，对应的 $f(x)$ 既是 $1-x$，又是 x，不确定，故不符合函数定义.

4. 答：错误. 因为 $y=\arcsin u$ 定义域为$[-1,1]$，而 $2+x^2\notin[-1,1]$，故 $y=\arcsin(2+x^2)$不存在有意义的点，不构成函数.

5. 答：错误. $y=\sqrt{x}+\sin x$ 的定义域为$[0,+\infty)\cap(-\infty,+\infty)=[0,+\infty)$.

6. 答：正确. 分段函数定义域就应该是各部分定义域之并.

7. 答：正确. 事实上 $y=|x|=\begin{cases}-x, x\leqslant 0\\ x, x>0\end{cases}$ 是一个分段函数，分段函数一般不是初等函数，而绝对值函数很特殊，它还可以表示成一个复合函数 $y=\sqrt{x^2}$ ，所以它是一个初等函数.

三、填空题

1. $\dfrac{x+1}{x}$.

2. x^2+3x+2.

3. $(-1,2)$.

4. $[-3,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

5. $[-1, 1]$.

6. $[1, +\infty)$.

7. $y = \dfrac{x}{1-x}(x \neq 1)$.

8. $f(-x) = \begin{cases} 1, x < 0 \\ -x, x \geqslant 0 \end{cases}$.

9. $f[f(x)] = \begin{cases} -1, x \leqslant 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$.

四、单选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	A	B	C	C	B	B	B	D	B	D	A

五、计算题

1. 解：已知 $f(x) = 3x^2 + 5x$

所以，
$$f(a+1) = 3(a+1)^2 + 5(a+1) = 3a^2 + 11a + 8;$$
$$f\left(\frac{1}{a}\right) = 3\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 5 \times \frac{1}{a} = \frac{3}{a^2} + \frac{5}{a}.$$

2. 解：因为 $f(x) = \arcsin(\ln x)$

所以，
$$f(e^{-1}) = \arcsin(\ln e^{-1}) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2};$$
$$f(1) = \arcsin(\ln 1) = \arcsin(0) = 0;$$
$$f(e^{\frac{1}{2}}) = \arcsin(\ln e^{\frac{1}{2}}) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6};$$
$$f(e^2) = \arcsin(\ln e^2) = \arcsin(2)\text{（不存在，无意义）}.$$

3. 解：因为 $|x| < \pi/4$ 时，$f(x) = |\cos x|$；$|x| \geqslant \pi/4$ 时，$f(x) = 0$

所以，
$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \left|\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$f(0) = |\cos 0| = 1; f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0; f(-5) = 0.$$

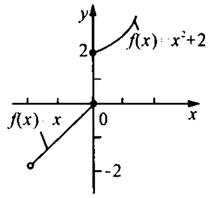


图 1-3

4. 解：因为 $-2 < x < 0$ 时，$f(x) = x$；$x \geqslant 0$ 时，$f(x) = x^2 + 2$

所以，(1) 其图像如图 1-3 所示.

(2) $f(-1) = -1$；$f(2) = 2^2 + 2 = 6$；$f(a) = \begin{cases} a, -2 < a < 0 \\ a^2 + 2, a \geqslant 0 \end{cases}$.

5. 解：因为 $x < 0$ 时，$f(x) = x - 1$；$x \geqslant 0$ 时，$f(x) = x + 2$

(1) 其图像如图 1-4 所示.

(2) $f(x+2) = \begin{cases} (x+2) - 1, x + 2 < 0 \\ (x+2) + 2, x + 2 \geqslant 0 \end{cases}$,

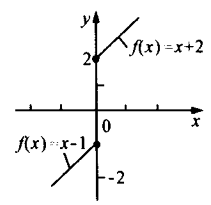


图 1-4

即 $f(x+2) = \begin{cases} x + 1, x < -2 \\ x + 4, x \geqslant -2 \end{cases}$;

$f(x-2) = \begin{cases} (x-2) - 1, x - 2 < 0 \\ (x-2) + 2, x - 2 \geqslant 0 \end{cases}$，即 $f(x-2) = \begin{cases} x - 3, x < 2 \\ x, x \geqslant 2 \end{cases}$.

说明：第 1～5 题，共同特点是已知函数，求函数值. 像这样一类题，首先要找准自变量的取值范围；其次要弄懂对应法则，只有这样，才能得出正确结果.

6. 解：(1) 要使 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{9}$ 成立，

x 必须满足 $\begin{cases}x^2-x-6\geqslant 0\\ \left|\frac{2x-1}{9}\right|\leqslant 1\end{cases}$，即 $\begin{cases}(x+2)(x-3)\geqslant 0 & (1)\\ |2x-1|\leqslant 9 & (2)\end{cases}$

由式 (1) 得 $x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 3$，由式 (2) 得 $-4\leqslant x\leqslant 5$，
所以，所给函数定义域为 $[-4, -2]\cup[3, 5]$.

(2) 要使 $y=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}+\sqrt{2x(2x-1)}$ 成立，

自变量 x 必须满足 $\begin{cases}2x+3>0 & (1)\\ 2x(2x-1)\geqslant 0 & (2)\end{cases}$

由式 (1) 得 $x>-\frac{3}{2}$，由式 (2) 得 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant\frac{1}{2}$，

故，所求定义域为 $[-3/2, 0]\cup[1/0, +\infty]$.

(3) 要使 $y=\sqrt{\cos x}$ 成立，必须使 $\cos x\geqslant 0$ 成立，故 x 的取值范围为
$\{x\,|\,2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi/2$ 或 $2k\pi+3\pi/2\leqslant x\leqslant 2k\pi+2\pi, k\in Z\}$.

(4) 要使 $y=\arccos x+\sqrt{2+|x|}$ 成立，自变量 x 必须满足 $\begin{cases}|x|\leqslant 1\\ 2+|x|\geqslant 0\end{cases}$，解之得 $|x|\leqslant 1$，故所求定义域为 $[-1, 1]$.

(5) 要使 $y=\frac{1}{x^2-1}+\arcsin x+\sqrt{3x}+\pi x$ 成立，

自变量 x 必须满足 $\begin{cases}x^2-1\neq 0 & (1)\\ |x|\leqslant 1 & (2)\\ 3x\geqslant 0 & (3)\end{cases}$

由式 (1) 得 $x\neq\pm 1$，由式 (2) 得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，由式 (3) 得 $x\geqslant 0$，
所以，所求定义域为 $[0, 1)$.

(6) 在 $f(x)=\log_3(x^2-3x+2)-e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{x}$ 中，$\log_3(x^2-3x+2)$ 的定义域为 $x<1$ 或 $x>2$，即 $(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)$.

$e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的定义域为一切实数 $(-\infty, +\infty)$；$\frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$.

$f(x)$ 的定义域就是上述三个子定义域的公共部分，即 $(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)$.

说明：求定义域，即求自变量的取值范围，也就是找使得所给表达式成立的一切实数．要注意的是，定义域不论是用不等式表示，还是用区间表示，或者是用集合表示，都应该力求准确明了.

7. 解：

(1) 设 $u=1+2x-x^2$，则 $y=\sqrt[3]{1+2x-x^2}$ 可分解为 $\begin{cases}y=u^{1/3}\\ u=1+2x-x^2\end{cases}$.

(2) 设 $u=\sqrt{2-3x}$，$v=2-3x$，则 $y=\cot\sqrt{2-3x}$ 可分解为 $\begin{cases}y=\cot u\\ u=v^{\frac{1}{2}}\\ v=2-3x\end{cases}$.