

根据教育部最新《中考命题指导》编写
《义务教育数学课程标准》



[数学]

SHUXUE

新中考

湖南教育出版社

目 录

2006 年新课程新中考发展趋势	1
专题一 实数	4
专题二 整式	8
专题三 分式	13
专题四 一次方程与一次方程组	16
专题五 不等式与不等式组	22
专题六 一元二次方程	27
专题七 变量之间的关系	31
专题八 一次函数	35
专题九 反比例函数	40
专题十 二次函数	44
专题十一 线段、角及相交线、平行线	50
专题十二 三角形与全等三角形	56
专题十三 等腰三角形	62
专题十四 直角三角形	66
专题十五 四边形与平行四边形	72
专题十六 特殊的平行四边形	78
专题十七 梯形	82
专题十八 图形与坐标	86
专题十九 图形的相似	88
专题二十 视图与投影	92
专题二十一 尺规作图	94
专题二十二 轴对称、图形的平移与旋转	98
专题二十三 圆	104
专题二十四 统计	110
专题二十五 概率	117
专题二十六 数与代数知识综合	120
专题二十七 空间与图形知识综合	125
专题二十八 统计与概率知识综合	132
专题二十九 阅读理解题	139
专题三十 图象、信息问题	145
专题三十一 实践开放题	151
专题三十二 中考压轴题	157
模拟试题(一)	166
模拟试题(二)	168
模拟试题(三)	170
参考答案	172

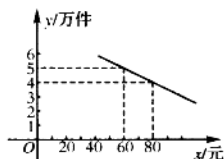
2006 年新课程新中考发展趋势

纵观 2005 年课程改革实验区的数学学业考试试卷, 我们不难发现, 在 2004 年的基础上, 又有不少新的特点和亮点. 总体上看, 试卷内容关注了对数学核心内容、基本能力和基本思想方法的考查; 关注了对未来合格公民的基本数学素养的考查; 关注了对学生获取数学知识的思维方法和数学活动过程的考查; 注重了对学生的数感、符号感、空间观念、统计观念、数学应用意识、推理能力和解决问题能力的考查. 试题在联系学生的生活现实、数学现实, 创设生动的问题情境和呈现形式等方面做了大量的创新工作, 实现了新的突破. 另一方面, 开放性试题、应用性试题、信息分析试题、实践操作试题等类型问题的设计得到了更大的发展与完善. 命题的形式丰富而又活泼, 给学生创设了探索思考的机会与空间. 不少试题的表现形式较好地体现了对学生个性的尊重、对数学教育价值的关注. 从 2005 年数学新课程新中考试题的特点中, 我们不难捕捉 2006 年数学新课程新中考的发展趋势.

一、更加关注对数学核心内容的考查, 体现基础性

从 2005 年数学学业考试的试卷看, 对数学核心内容的关注与考查是共同的, 包括了对《数学课程标准》中规定的重要的数学基础知识、基本技能和基本思想方法的考查, 较好地体现了数学学业考试的基本定位, 体现了基础性, 这样更有利于促进数学课程目标的实现, 有利于促进学生的数学思维、数学观念与数学素养的全面提高. 2006 年数学学业考试必定会更加关注对数学核心内容的考查.

例 1 (2005·长沙) 某通讯器材公司销售一种市场需求较大的新型通讯产品, 已知每件产品的进价为 40 元, 每年销售该种产品的开支 (不含进价) 总计 120 万元. 在销售过程中发现, 年销售量 y (万件) 与销售单价 x (元) 之间存在着如下图所示的一次函数关系.



(1) 求 y 关于 x 的函数关系式.

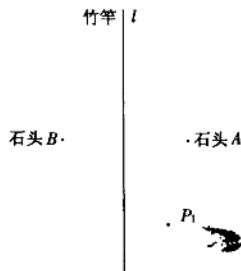
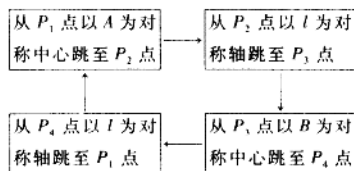
(2) 试写出该公司销售该种产品的年获利 z (万元) 关于销售单价 x (元) 的函数关系式 (年获利 = 年销售额 - 年销售产品总进价 - 年总开支). 当销售单价 x 为何值时, 年获利最大? 并求这个最大值.

(3) 若公司希望该种产品一年的销售获利不低于 40 万元, 借助 (2) 中函数的图象, 请你帮助该公司确定销售单价的范围. 在此情况下, 要使产品销售量最大, 你认为销售单价应定为多少元?

评析: 《数学课程标准》指出, 在数学的代数教学中, 应注意让学生在具体背景中理解基本的数量关系和新规律,

注重使学生经历从问题中建立数学模型的过程, 从这里不难看出, 让学生在具体背景中, 理解基本数学关系和规律, 掌握一些有效的表示, 处理和交流数量关系以及变化规律的工具, 发展符号感是数学学习的核心内容之一. 本试题运用函数这一表示处理和交流数量关系以及变化规律的有效数学模型, 考查学生对一次函数、二次函数的有关概念的理解以及对函数图象的性质的认识, 并且考查运用函数思想解决现实问题的能力. 对函数思想这一核心内容的考查必定成为 2006 年数学学业考试的重要内容之一.

例 2 (2005·南宁) 如下图, 石头 A 和石头 B 相距 80 cm, 且关于竹竿 l 对称, 一只电动青蛙在距竹竿 30 cm, 距石头 A 为 60 cm 的 P_1 处, 按如下顺序循环跳跃:



(1) 请你画出青蛙跳跃的路径 (画图工具不作限制).

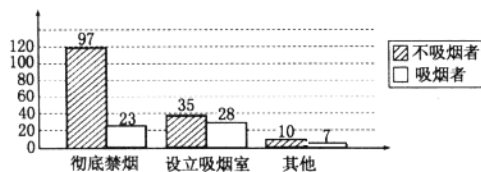
(2) 青蛙跳跃 25 次后停下, 此时它与石头 A 相距 _____ cm, 与竹竿 l 相距 _____ cm.

评析: 动手操作既是数学活动的一种形式, 也是考查学生对概念理解与操作技能掌握情况的一种方式. 本试题以轴对称作为知识点, 让学生利用工具画出青蛙跳跃的路径, 不仅考查了学生在具体情境中对轴对称本质的理解 (即轴对称本质是指存在一个对称轴, 使得图形上所有的点关于对称轴的对称点在图形上), 也考查了学生利用对称性质解决具体问题或数学问题的能力. 对轴对称的认识和理解是发展学生空间观念有效的途径, 这也是数学学习的核心内容之一. 另外画图工具不受限制, 既具有一定的开放性, 较好地考查了学生发散思维活动与灵活运用知识的能力, 又突出了对数学表达能力的考查. 这些必将成为 2006 年数学学业考试的趋势之一.

二、更加关注对应用数学解决问题能力的考查,突出试题的教育价值,体现应用性

关注数学与现实的联系有助于提高学生学习的积极性,增进对数学的理解和认识,激发学生内在的数学学习动机,培养学生应用意识和解决问题的能力,促进学生后继学习能力的提高,这是《数学课程标准》所倡导的基本理念。从2005年各实验区的数学试卷中可以看出,各地对此都非常重视,都体现了用较高的分值来设计数学与现实相联系的试题,同时,在试题素材中体现教育价值也成为不少试卷的共同特征。不难看出,关注对应用数学解决问题能力的考查必定是2006年数学学业考试的趋势之一。

例3 (2005·贵阳)“国际无烟日”来临之际,小彬就公众对在餐厅吸烟的态度进行了调查,并将调查结果制作成如下图所示的统计图,请根据图中的信息回答下列问题:



(1) 被调查者中,赞成在餐厅彻底禁烟的人数是_____;

(2) 被调查者中,希望在餐厅设立吸烟室的人数是_____;

(3) 求被调查者中赞成在餐厅彻底禁烟的频率;

(4) 贵阳市现有人口约为370万,根据图中的信息估计贵阳市现有人口中赞成在餐厅彻底禁烟的人数。

本试题让学生在对在餐厅吸烟的态度进行调查的主题活动中,根据统计图回答问题,为学生创设了具有现实主义的问题情境,实现了考查学生运用统计知识解决实际问题的能力,体现了数学的教育价值。

三、更加关注对数学活动过程的评价,体现过程性

《数学课程标准》所提出的评价新理念之一是:不仅关注对学习结果的评价,也要关注对他们数学活动过程的评价。从2005年各实验区数学学业考试来看,不少实验区的试卷都很好地体现了这一基本理念。不仅如此,所有的试卷还在关注评价学生掌握知识、技能和数学思想方法等方面情况的同时,也关注对他们在一般性思维的方法与创新思维能力的发展等方面的评价,尤其是注重对学生探索性思维活动和创新思维能力的考查,因此,关注对数学活动过程的评价也将成为2006年数学学业考试关注的重点之一。

例4 (2005·济南)某区在改革学生学习方式的研究中,对某校七年级的600名学生进行了“你喜欢什么样的学习方式”的问卷调查(如下表),调查者根据统计的数据制作了如下统计图,请你根据图中的有关信息回答下列问题:

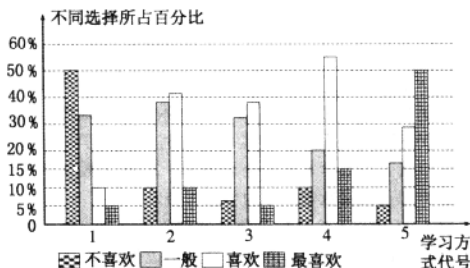
(考生不必填写此表)

代号	学习方式	最喜欢	喜欢	一般	不喜欢
1	老师讲,学生听				
2	老师提出问题,学生探索思考				
3	自己独立思考发现问题				
4	小组共同讨论解决问题				
5	开展各种数学活动及小竞赛				

备注:在同意的一栏内打上“√”,“最喜欢”一栏只能选一项。

(1) 请将每种学习方式中选择“最喜欢”的人数填入下表:

代号	选择“最喜欢”的人数
1	
2	
3	
4	
5	



(2) 根据图中的信息,请你提出一个问题。

发展学生的统计观念是新课程的一个重要目标,一个完整的统计过程包括收集数据、整理数据、分析数据、做出决定这样几个阶段,2005年的中考试题把考查学生的统计活动过程作为一项重要的内容,例4就很好地体现了对统计观念这一核心思想的考查,本试题给出了统计活动的全过程,这有利于考查学生统计观念的形成过程。问题主要是根据图填写统计表,并根据图中的信息提出问题,这有效地考查了学生阅读统计填表、从统计表中获取信息、解决问题的能力,题中的调查表看似可有可无,实际上是给了学生一个完整的统计过程,全面地考查学生的统计观念的形成过程。

四、更加关注个性化的评价,体现差异性

“承认差异,注重个性,给每一位学生以充分的发展空间”是《数学课程标准》提倡的一个基本理念,而给学生以更多的自主性,让不同类型、不同水平的学生尽可能地展现自己的数学才能是教育部新课程初中毕业生数学学业考试命题的一个基本原则。纵观2005年各实验区数学学业考试试卷,绝大多数对此都有较好的反映,具体操作方式主要有以下三种:

● 设置自主选择试题——在试卷上设立可以选做的试题,

让学生根据自己的数学学习状况、认知特征,选择适合自己的试题作答,以充分表现自己的数学学习才能;

●提供开放性试题——在试卷上设立了开放性试题,力图使得每一个学生都能够根据自己的思考角度、对试题背景的理解程度,提出一个问题、给出一个结论(猜想)或提供一种结论之所以成立的解释(证明)等;

●制订个性化评分标准——对于某些具有个性化的试题的求解过程,例如提出问题、给出开放性试题的答案等,制订开放的、不同类型、不同层次的评分标准,使得所有对试题提供了实质性解答的学生都能够获得相应的分数,而不是简单地将学生的解答套入事先预定的“标准解答”体系之中。

这样做的结果之一是我们欣喜地看到一些出乎意料的猜想、许多令人眼睛一亮的答案、许多精彩纷呈的解答,学生的聪明才智跃然纸上,它也将成为 2006 年数学学业考试的发展趋势之一。

例 5 (2005 年·南宁) 本题有 A、B 两类题, A 类题满分 7 分, B 类题满分 10 分。请你选择其中一类证明。

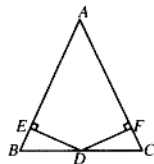
(A 类) 如下图, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别为 E , F 。请你从下面三个条件中, 再选出两个作为已知条件, 另一个为结论, 推出一个正确的命题(只需写出一种情况)。

① $AB = AC$; ② $BD = CD$; ③ $BE = CF$

已知: $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别为 E , F , _____ = _____, _____ = _____。

求证:

证明:



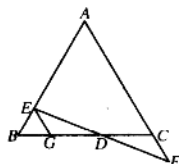
(B 类) 如下图, $EG \parallel AF$, 请你从下面三个条件中, 再选两个作为已知条件, 另一个为结论, 推出一个正确的命题(只需写出一种情况)。

① $AB = AC$; ② $DE = DF$; ③ $BE = CF$ 。

已知: $EG \parallel AF$, _____ = _____, _____ = _____。

求证:

证明:



本题在试题设置的多样性方面作了积极的尝试, 题目采用两点选一的方式让学生选择作答, 表现出尊重学生的自主性, 让每一位学生都可以根据自己的所长选择不同的试题进行作答的基本理念, 有利于不同的学生展示自己的数学才华。本题所给出的两道题目难易有别, 层次不同的学生可以选择不同的题目作答, A 类、B 类两类试题主要通过证明线段相等考查学生的逻辑推理能力, 但两类试题的难度有所区别, 思维层次低一些的学生可以选择 A 类题作答, 思维层次高的学生可以选择 B 类题作答。总之, 不同层次的学生都能找到自己解决问题的办法, 从而解答问题。另外, 本试题通过自主选择条件和结论构造命题并进行证明, 考查了学生的逻辑推理能力和空间观念以及发现问题、解决问题的能力。

总之, 2006 年的新中考仍会关注对核心内容的考查, 关注对应用数学解决问题能力的考查, 关注对数学活动过程的评价, 关注学生个性化的评价, 这是新中考基本理念的要求, 也是新课程 2004 年、2005 年两年实践的经验总结。

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

解: 观察数轴, 可以看出

① $|b| < |c|$, 所以 $b+c < 0$;

② $b > c$, 所以 $a+b > a+c$;

③ $b < a$ 且 $c < 0$, 所以 $bc > ac$;

④ $b > c$ 且 $a > 0$, 所以 $ab > ac$.

本题中有三个式子是正确的, 故选 C.

点评: 解决此题的关键是把数轴上的点转化为实数, 并由点在数轴的位置关系, 判断出实数的正负、绝对值以及大小. 在解决此类问题时注意: ①在数轴上, 右边的点所表示的数大于左边的点所表示的数, 如此题中, $c < b < a$; ②一个数的绝对值在数轴上表示的是它所对应点与原点的距离, 如此题中, b 到原点的距离小于 c 到原点的距离, 故 $|b| < |c|$; ③一对相反数在数轴上所表示的点在原点的两旁, 且到原点的距离相等.

例4 (2005·东营) 台湾是我国最大的岛屿, 总面积为 35 989.76 平方千米, 这个数据用科学记数法表示为 _____ 平方千米 (保留两位有效数字).

解: 3.6×10^4 .

点评: 求近似数和有效数字, 用科学记数法表示数是中考中比较常见的试题, 常以填空题、选择题的形式出现. 这些题目一般都设计了一个与生产、生活相关的现实背景, 同学们在复习时, 应多关注生活中的数据信息, 以培养数感和合情推理的能力.

例5 (2004·南通) 已知一个矩形的长为 3 cm, 宽为 2 cm, 试估算它的对角线长为 _____ cm. (结果保留两个有效数字, 要求误差小于 0.2)

解: 根据勾股定理, 对角线的长为 $\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ cm.

$\because 3^2 = 9, 4^2 = 16,$

$\therefore 3 < \sqrt{13} < 4.$

又 $\because 3.2^2 = 10.24, 3.4^2 = 11.56, 3.6^2 = 12.96, 3.8^2 = 14.44,$ $\therefore 3.6 < \sqrt{13} < 3.8.$

所以, $\sqrt{13}$ 约等于 3.6、3.7 或 3.8.

点评: 这是一道考查估算技能的试题, 要求学生能用有理数估计一个无理数的大致范围. 估算是新课标中予以关注的一种数学意识和方法, 也是学生必须具有的一种数学能力. 用有理数估算无理数的大致范围, 可以采用“两边夹逼, 逐步逼近”的方法. 如在此题中, 需要估算 $\sqrt{13}$ 的值, 先估算整数位, 观察易知 $3^2 < 13 < 4^2$, 从而估计 $\sqrt{13}$ 在 3~4 之间; 然后再缩小范围, 在 3~4 之间每隔 0.2 (误差要求小于 0.2) 取值计算, 发现 $3.6^2 < 13 < 3.8^2$, 从而估计 $\sqrt{13}$ 在 3.6~3.8 之间.

例6 填空:

(1) $-3^2 - 1 =$ _____;

(2) $(-2)^3 =$ _____;

(3) $4^{-2} =$ _____;

(4) $\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) =$ _____.

解: (1) -10; (2) -8; (3) $\frac{1}{16}$; (4) $3-\sqrt{3}$.

点评: 实数的加、减、乘、除、乘方的运算法则与二次

根式的性质是进行实数混合运算的基础, 因此, 要掌握好实数有关的概念及运算法则. 特别要注意符号法则, 如 $(-3)^2 = 9, -3^2 = -9$; 注意零指数幂和负指数幂的意义, 如 $4^0 = 1, 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ 等.

例7 (2005·扬州) 若家用电冰箱冷藏室的温度是 4°C , 冷冻室的温度比冷藏室的温度低 22°C , 则冷冻室的温度是().

- A. -26°C B. -18°C C. 26°C D. 18°C

解: $4-22 = -18 (^\circ\text{C})$, 选 B.

点评: 新课标下的中考题材关注我们的现实生活, 因而常常会给出一定的情境, 让学生从现实背景中去理解实数的概念, 运用实数的运算解决简单的实际问题.

例8 (2005·泰州) 计算: $-1^{2005} - (1+0.5) \times 3^{-1} \div (-2)^2 + \left(\cos 60^\circ - \frac{4}{3}\right)^0$.

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= -1 - \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \div 4 + 1 \\ &= -1 - \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + 1 \\ &= 1 - \frac{1}{8} + 1 \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

点评: 这是一个实数的混合运算题. 做这类题时, 首先要认真审题, 理解实数的有关概念; 其次要正确、灵活地运用运算法则与运算律, 选择合理、简捷的解题途径. 特别要注意把符号号, 掌握一定的运算技巧, 进行准确计算.



专题训练

[I 基础与能力]

一、填空题

- (2005·无锡) -5 的相反数是 _____; 4 的平方根是 _____.
- (2005·泉州) -5 的倒数是 _____.
- (2005·大连) 气温升高 1°C 记作 $+1^\circ\text{C}$, 气温下降 6°C 记作 _____.
- (2005·金华) 冬季的某一天, 我市的最高气温为 7°C , 最低气温为 -2°C , 那么这天我市的最高气温比最低气温高 _____ $^\circ\text{C}$.
- (2005·济南) “太阳能”是一种既无污染又节省地下能源的能量, 据科学家统计, 平均每平方千米的地面一年从太阳中所获得的能量, 相当于燃烧 130 000 000 千克的煤所产生的能量, 用科学记数法表示这个数量是 _____ 千克.
- (2005·江西) 计算: $(-2) \times (-4) =$ _____.
- (2005·重庆) 计算: $(\sqrt{2})^2 =$ _____.
- (2005·河南) 要玻璃店配一块面积为 1.21 m^2 的正方形玻璃, 那么该玻璃边长是 _____ m.
- (2005·荆门) 在数轴上, 与表示 -1 的点距离为 3 的点所表示的数是 _____.

10. (2005·日照) 已知下列等式:

- ① $1^3 = 1^2$;
 ② $1^3 + 2^3 = 3^2$;
 ③ $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$;
 ④ $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$;
 ...

由此规律知, 第⑤个等式是_____.

二、选择题

11. (2005·四川) 甲地的海拔高度为 5 m, 乙地比甲地低 7 m, 乙地的海拔高度为()

- A. -7 m B. -2 m
 C. 2 m D. 7 m

12. (2005·贵阳) $-\frac{1}{2}$ 的绝对值是()

- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$

13. (2005·江西) 如图 1-2, 正方形网格中, 每个小正方形的边长为 1, 则网格上的三角形 ABC 中, 边长为无理数的边数是()

- A. 0 B. 1
 C. 2 D. 3

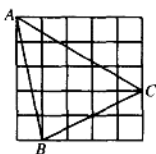


图 1-2

14. (2005·河南) 3^2 的相反数是()

- A. -9 B. 9 C. 6 D. -6

15. (2005·浙江) 计算 $-2 - 1$ 的结果是()

- A. -3 B. -2 C. -1 D. 3

16. (2005·江西) 化简 $\sqrt{8} - \sqrt{2}(\sqrt{2} + 2)$ 得()

- A. -2 B. $\sqrt{2} - 2$ C. 2 D. $4\sqrt{2} - 2$

17. (2005·济南) 若 a 与 2 互为相反数, 则 $|a + 2|$ 等于()

- A. 0 B. -2 C. 2 D. 4

18. (2005·重庆) 下列四个数中, 大于 -3 的数是()

- A. -5 B. -4 C. -3 D. -2

19. (2005·丽水) 据丽水市统计局 2005 年公报, 该市 2004 年人均生产总值约为 10 582 元, 则近似数 10 582 的有效数字有()

- A. 1 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

20. (2005·日照) 据某网站报道: 一粒废旧纽扣电池可以使 600 吨水受到污染. 某校团委四年来共回收废旧纽扣电池 3 500 粒. 若这 3 500 粒废旧纽扣电池可以使 m 吨水受到污染, 用科学记数法表示 m 为()

- A. 2.1×10^3 B. 2.1×10^{-5}
 C. 2.1×10^6 D. 2.1×10^{-6}

三、解答题

21. (2004·南通) 在所给的数轴上 (图 1-3) 画出表示数 -3、-1、 $|-2|$ 的点.

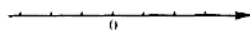


图 1-3

22. 计算:

(1) $(2005 \cdot \text{南通}) -9 \div 3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) \times 12 + 3^2$;

(2) $(2005 \cdot \text{金华}) \sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^0$;

(3) $(2005 \cdot \text{浙江}) \sqrt{12} - 2\sin 60^\circ - (\sqrt{5} + 2)^0$;

(4) $(2005 \cdot \text{四川}) \sqrt{8} - |-2\sqrt{2}| + \sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ$.

23. (2005·绍兴) 求下列各数的和.

$$-\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \left|\frac{1}{2}\right|, \left(\frac{1}{2}\right)^0, \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

24. 有一种“二十四点”游戏, 其游戏规则是: 任取四个 1~13 之间的自然数, 将这四个数 (每个数用且只用一次) 进行加、减、乘、除四则运算, 使其结果等于 24. 例如: 对于 1、2、3、4, 可运算为 $(1+2+3) \times 4 = 24$.

现有四个有理数: 3、4、-6、10, 根据上述规则, 运用三种不同的方法, 使计算结果等于 24.

【发展与创新】

一、填空题

1. (2005·北京) 若无理数 a 满足不等式 $1 < a < 4$, 请写出

两个符号条件的无理数_____、_____.

2. (2005·武汉) 用计算器计算: $\sqrt[3]{5} \sin 40^\circ =$ _____. (精确到 0.01)

3. $-\frac{1}{2}$ 的相反数的倒数是_____.

4. (2005·徐州) 某种感冒病毒的直径是 0.000 000 12 m, 用科学记数法表示为_____m.

5. (2005·梅州) 北京与巴黎两地的时差是 -7 (带正号的数表示同一时间比北京早的时间数), 如果现在是在北京时间 7:00, 那么巴黎的时间是_____.

6. (2004·济南) 校学生会生活委员发现同学们在食堂吃午餐时, 浪费现象十分严重, 于是决定写一张标语贴在食堂门口, 告诫大家不要浪费粮食. 请你帮他吧标语中有关数据填上. (已知 1 克大米约 52 粒)

如果每人每天浪费 1 粒大米, 全国 13 亿人口, 每天就要大约浪费_____吨大米!

7. (2004·绍兴) 用计算器探索: 按一定规律排列的一组数: $\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \dots, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}$, 如果从中选出若干个, 使它们的和大于 0.5, 那么至少要选_____个数.

8. (2004·江西) 如图 1-4, 数轴上的点 A 所表示的是实数 a, 则点 A 到原点的距离是_____.

图 1-4

二、选择题

9. (2005·荆门) 下列计算结果为负数的是()

A. $(-3)^0$ B. $-1-31$
C. $(-3)^2$ D. $(-3)^{-2}$

10. (2005·扬州) 下面 4 个算式中正确的是()

A. $\sqrt{8} \div \sqrt{2} = 2$ B. $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{6}$
C. $\sqrt{(-6)^2} = -6$ D. $5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2} = 5\sqrt{6}$

11. (2005·荆州) 下列运算正确的是()

A. $2^2 \times 2^3 = 2^6$ B. $(-2)^{-1} \times 2 = 1$
C. $(-2)^0 - 1 - 2 = -1$ D. $2^4 \div 2^4 = 2^2$

12. (2005·贵阳) 若“!”是一种数学运算符号, 并且 $1! = 1, 2! = 2 \times 1 = 2, 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6, 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1, \dots$, 则 $\frac{100!}{98!}$ 的值为()

A. $\frac{50}{49}$ B. 99! C. 9 900 D. 2!

13. (2005·杭州) 设 $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}, b = 2 - \sqrt{3}, c = \sqrt{5} - 2$, 则 a, b, c 的大小关系是()

A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > b > a$ D. $b > c > a$

14. (2005·梅州) 设 a 是实数, 则 $|a| - a$ 的值()

A. 可以是负数
B. 不可能是负数
C. 必是正数
D. 可以是正数也可以是负数

15. (2005·盐城) 现规定一种新的运算 “*”: $a * b = a^b$, 如 $3 * 2 = 3^2 = 9$, 则 $\frac{1}{2} * 3 =$ ()

A. $\frac{1}{8}$ B. 8 C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{3}{2}$

16. (2004·贵阳) 化简 $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ 时, 甲的解法是: $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} =$

$$\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \sqrt{5} + \sqrt{2}; \text{乙的解法是: } \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} =$$

$$\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}. \text{ 以下判断正确的是()}$$

A. 甲的解法正确, 乙的解法不正确
B. 甲的解法不正确, 乙的解法正确
C. 甲、乙的解法都正确
D. 甲、乙的解法都不正确

三、解答题

17. (2005·贵阳) 已知 $a = \sin 60^\circ, b = \cos 45^\circ, c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, d = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$, 从 a, b, c, d 这 4 个数中任意选取 3 个数求和.

18. (2004·绍兴) 已知 a, b 互为相反数, c, d 互为倒数, e 是非零实数, 求 $\sqrt{2}(a+b) + \frac{1}{2}cd - 2e^0$ 的值.

19. 如图 1-5 所示, 正方形网格中的每个小正方形边长都是 1, 每个小格的顶点为格点, 以格点为顶点分别按下列要求画图.

(1) 画一条长度为 $\sqrt{5}$ 的线段 AB;

(2) 以 AB 为一边, 作一个面积为 2 的三角形 ABC, 这样的三角形可以作多少个?

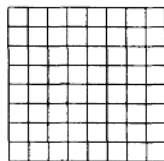


图 1-5

专题二 整 式

知识要点

整式的概念 { 单项式——系数、次数
多项式——项、次数

整式的加减:去括号,合并同类项

幂的运算 { (1)同底数幂的乘法 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
(2)幂的乘方 $(a^m)^n = a^{mn}$
(3)积的乘方 $(ab)^n = a^n b^n$
(4)同底数幂的除法 $a^m \div a^n = a^{m-n}$;
 $a^0 = 1$; $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$)

整式的运算

整式的乘法 { 单项式 $\times$ 单项式
单项式 $\times$ 多项式
多项式 $\times$ 多项式
乘法 { 平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
公式 { 完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

整式的除法 { 单项式 $\div$ 单项式
多项式 $\div$ 单项式

因式分解 { 提公因式法

运用公式法 { 平方差公式: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
完全平方公式: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

试题解析

纵观近两年的中考试题,整式这部分内容是每卷必考的,且题型大多集中在选择题和填空题及部分解答题,少数省市还出现阅读理解题。试题的特点是易做、易错,既是送分题,又是丢分题。预计在2006年的中考中,列代数式、求代数式的值、幂的运算、整式的运算、因式分解仍将是命题的热点,所以同学们应注重这部分基础内容的复习。除此之外,一些探索规律题和考查代数式的实际背景或几何意义的题,在考查知识的同时,注重了创新能力,加强了数学与现实世界的联系,也成为新课标下中考命题的一个新热点。

例1 (2004·海口)某商场4月份的营业额为 x 万元,5月份的营业额比4月份多10万元,如果该商场第二季度的营业额为 $4x$ 万元,那么6月份的营业额为_____万元,这个代数式的实际意义是_____。

解:4月份的营业额为 x 万元,

5月份的营业额为 $(x+10)$ 万元,

6月份的营业额为 $4x - x - (x+10) = (2x-10)$ 万元。

它的实际意义是:6月份的营业额比4月份的营业额的2倍少10万元。

点评:本题要求用代数式来表示数量关系,并解释代数式的实际意义。解决此类问题的关键是分析问题中的数量关系,特别注意其中的关键词,像“……的和”、“……比……

多”、“……比……少”、“……是……的几倍”、“……是……的几分之几”等,用加、减、乘、除、乘方等把这种数量关系表示出来。如在本题中就要抓住数量关系:6月份的营业额=第二季度的营业额-4月份的营业额-5月份的营业额。

例2 (2004·泰州)图2-1是小明用火柴搭的1条、2条、3条“金鱼”……则搭 n 条“金鱼”需要火柴_____根。

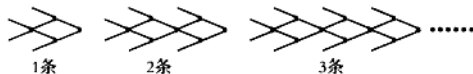


图2-1

解:观察图形可知:搭一条鱼需火柴8根,每增加一条鱼,火柴增加6根,那么搭 n 条鱼就需要火柴 $8+6(n-1) = 6n+2$ 根。

点评:这是一个探索规律题。解此题时,要先观察图形的变化规律,然后找出由图形的变化而引起的数据的变化规律,并把这种规律用代数式表示出来。为了找到数据的变化规律,我们也可以通过列表来类比表格中的数据变化情况等。如此题,可以列表观察数据:

金鱼数	1	2	3	...
火柴数	8	14	20	...

观察表格也可发现,每增加一条金鱼,火柴增加6根。

例3 (2005·大连)下列各式计算结果正确的是 ()

A. $a+a=a^2$ B. $(3a)^2=6a^2$

C. $(a+1)^2=a^2+1$ D. $a \cdot a=a^2$

解: D

例4 计算:

(1) $m^2 - (3m+m^2) =$ _____;

(2) $a^5 \cdot a^7 \cdot a^3 =$ _____;

(3) $(-3a^2b)^2 =$ _____;

(4) $(a-5b)^2 =$ _____;

(5) $(a+2b)(a-b) =$ _____;

(6) $(-6x^2y) \div (2x) =$ _____。

解: (1) $-3m$; (2) a^{11} ; (3) $9a^4b^2$; (4) $a^2 - 10ab + 25b^2$; (5) $a^2 + ab - 2b^2$; (6) $-3xy$ 。

点评:例3、例4考查了有关幂的运算和整式的运算,处理此类问题的关键是熟练掌握有关幂的运算性质、符号法则、乘法公式及整式的加、减、乘、除运算法则。

例5 分解因式:

(1) $(2005 \cdot \text{宁波}) 2x^2 - 18 =$ _____;

(2) $(2004 \cdot \text{十堰}) (a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2 =$ _____。

解: (1) $2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x+3)(x-3)$;

$$(2) (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + b^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - 2ab) = (a+b)^2(a-b)^2.$$

点评:在进行分解因式时,我们可以按“一提(公因式)二套(公式)”的步骤进行.先观察多项式的各项是否有公因式,如果有公因式的先提公因式,然后再继续观察多项式是否符合平方差公式或完全平方公式的特点,如果符合,则套用公式来继续分解因式.特别要注意的是,因式分解必须进行到每个因式不能再分解为止.

例6 (2005·盐城)先化简后求值: $[(x-y)^2 + (x+y)(x-y)] \div 2x$, 其中 $x=3, y=1.5$.

$$\begin{aligned}\text{解法一: 原式} &= [(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - y^2)] \div 2x \\ &= [x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - y^2] \div 2x \\ &= (2x^2 - 2xy) \div 2x \\ &= x - y.\end{aligned}$$

当 $x=3, y=1.5$ 时, 原式 $= 3 - 1.5 = 1.5$.

$$\begin{aligned}\text{解法二: 原式} &= [(x-y)[(x-y) + (x+y)]] \div 2x \\ &= [(x-y) \cdot 2x] \div 2x \\ &= x - y.\end{aligned}$$

当 $x=3, y=1.5$ 时, 原式 $= 3 - 1.5 = 1.5$.

点评:本题考查了整式的混合运算、求代数式的值等知识,在计算中应注意:①求代数式的值时应先化简,再代入求值;②注意运算顺序,正确运用整式的运算法则;③熟练掌握乘法公式特征及灵活运用;④在注意运算顺序的同时,也可以观察题目的特点,灵活处理.



专题训练

[I 基础与能力]

一、填空题

- (2005·佛山)回收废纸用于造纸可以节约木材,据专家估计,每回收1吨废纸可以节约3立方米木材,那么,回收 a 吨废纸可以节约 _____ 立方米木材.
- (2004·重庆万州)如图2-2,要给这个长、宽、高分别为 x, y, z 的箱子打包,其打包方式如图2-2所示,则打包带的长至少要 _____ (单位: mm) (用含 x, y, z 的代数式表示).
- (2005·河南)对代数式 $4a$ 作出一种合理解释: _____.
- (2005·梅州)计算: $(a-b) - (a+b) =$ _____; $(a^2b)^2 \div a^4 =$ _____.
- (2005·十堰)填上适当的数,使等式成立: $x^2 - 4x +$ _____ $= (x - \text{_____})^2$.
- (2005·丽水)因式分解: $x^3 - x =$ _____.
- (2005·十堰)把 $a^2b + b^3 - 2ab^2$ 分解因式的结果是 _____.
- (2005·北京)用“ $\triangle$ ”、“ ∇ ”定义新运算:对于任意实数 a, b , 都有 $a \triangle b = a$ 和 $a \nabla b = b$, 例如 $3 \triangle 2 = 3, 3 \nabla 2 =$ _____.
- 则 $(2006 \triangle 2005) \nabla (2004 \triangle 2003) =$ _____.

9. (2005·河南)如图2-3,将连续的自然数1~36排成一个正方形阵列,用一个小正方形任意圈出其中的9个数,设圈出的9个数的中心的数为 a , 用含有 a 的代数式表示这9个数的和为 _____.

图2-3

二、选择题

- (2005·杭州)“ x 的 $\frac{1}{2}$ 与 y 的和”用代数式可以表示为 ()
A. $\frac{1}{2}(x+y)$ B. $x + \frac{1}{2} + y$
C. $x + \frac{1}{2}y$ D. $\frac{1}{2}x + y$
- (2005·安徽)今天,和你一起参加全省课改实验区的初中毕业学业考试的同学约有15万人,其中男生约有 a 万人,则女生约有 ()
A. $(15+a)$ 万人 B. $(15-a)$ 万人
C. $15a$ 万人 D. $\frac{15}{a}$ 万人
- (2005·荆门)下列计算正确的是 ()
A. $a^2 \cdot b^3 = b^6$ B. $(-a^2)^3 = a^6$
C. $(ab)^2 = ab^2$ D. $(-a)^6 \div (-a)^3 = -a^3$
- (2005·福州)小马虎在下面的计算中只做对了一道题,他做对的题目是 ()
A. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ B. $(-2a^3)^2 = 4a^6$
C. $a^3 + a^2 = 2a^5$ D. $-(a-1) = -a-1$
- (2005·茂名)下列各式由左边到右边的变形中,是分解因式的为 ()
A. $a(x+y) = ax + ay$
B. $x^2 - 4x + 4 = x(x-4) + 4$
C. $10x^2 - 5x = 5x(2x-1)$
D. $x^2 - 16 + 3x = (x+4)(x-4) + 3x$
- (2005·盐城)下列因式分解中,结果正确的是 ()
A. $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$
B. $1 - (x+2)^2 = (x+1)(x+3)$
C. $2m^2n - 8n^3 = 2n(m^2 - 4n^2)$
D. $x^2 - x + \frac{1}{4} = x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2}\right)$
- (2005·嘉兴)在边长为 a 的正方形中挖去一个边长为 b 的小正方形 ($a > b$) (如图2-4),把余下的部分拼成一个矩形 (如图2-5),根据两个图形中阴影部分的面积相等,可以验证 ()

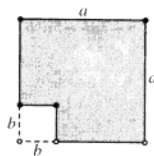


图2-4

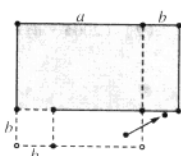


图2-5

- A. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 B. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 C. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
 D. $(a+2b)(a-b) = a^2 + ab - 2b^2$

17. (2005·镇江) 一个正整数的数表如下(表中下一行中数的个数是上一行中数的个数的2倍):

第1行	1
第2行	2 3
第3行	4 5 6 7
...	...

则第6行中的最后一个数为()

- A. 31
 B. 63
 C. 127
 D. 255
18. (2005·河北) 如图2-6, 一根绳子弯曲成图①所示的形状. 当用剪刀像图②那样沿虚线 a 把绳子剪断时, 绳子被剪为5段; 当用剪刀像图③那样沿虚线 b ($b \parallel a$) 把绳子再剪一次时, 绳子就被剪为9段. 若用剪刀在虚线 a, b 之间把绳子再剪($n-1$)次(剪刀的方向与 a 平行), 这样一共剪 n 次时绳子的段数是()

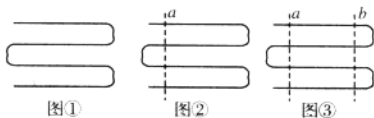


图 2-6

- A. $4n+1$
 B. $4n+2$
 C. $4n+3$
 D. $4n+5$
19. (2005·日照) 已知 $-1 < b < 0$, $0 < a < 1$, 那么在代数式 $a-b$, $a+b$, $a+b^2$, a^2+b 中, 对任意的 a, b , 对应的代数式的值最大的是()
- A. $a+b$
 B. $a-b$
 C. $a+b^2$
 D. a^2+b

三、解答题

20. 计算:

(1) (2005·四川) $m(m-1) + (m^2-m) \div m + 1$;

(2) (2005·南通) $3a^3b^2 \div a^2 + b \cdot (a^2b - 3ab - 5a^2b)$.

21. 先化简, 再求值:

(1) (2005·泉州) $2(x-3) + (x-1)^2$, 其中 $x = \sqrt{3}$;

(2) (2005·长沙) $y(x+y) + (x+y)(x-y) - x^2$, 其中 $x = -2$, $y = \frac{1}{2}$.

22. (2005·茂名) 如图2-7, 一张边长为16 cm的正方形硬纸板, 把它的四个角都剪去一个边长为 x cm的小正方形, 然后把它折成一个无盖的长方体, 设长方体的容积为 V cm³, 请回答下列问题:

(1) 若用含有 x 的代数式表示 V , 则 $V =$ _____.

(2) 完成下表:

x (cm)	1	2	3	4	5	6	7
V (cm ³)	196	288			180	96	28

- (3) 观察上表, 容积 V 的值是否随 x 值的增大而增大? 当 x 取什么值时, 容积 V 的值最大?

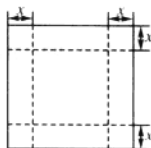


图 2-7

[II 发展与创新]

一、填空题

1. (2005·荆州) 分解因式: $x^3y^3 - 2x^2y^2 + xy =$ _____.
2. (2005·安徽) 一个矩形的面积为 $a^3 - 2ab + a$, 宽为 a , 则矩形的长为 _____.
3. (2005·黑龙江) 某书店出售图书的同时, 推出一项租书业务, 每租看1本书, 租期不超过3天, 每天租金 a 元; 租期超过3天, 从第4天开始每天另加收 b 元. 如果租看1本书7天归还, 那么租金为 _____元.

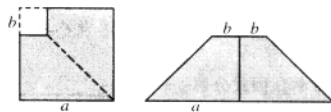


图 2-8

4. (2005·福州) 如图2-8, 在边长为 a 的正方形中剪去一个边长为 b 的小正方形 ($a > b$), 把剩下的部分拼成一个梯形, 分别计算这两个图形阴影部分的面积, 验证了公式 _____.

5. (2005·浙江) 在日常生活中如取款、上网等都需要密码. 有一种用“因式分解”法产生的密码, 方便记忆. 原理是: 如对于多项式 $x^4 - y^4$, 因式分解的结果是 $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$, 若取 $x=9, y=9$ 时, 则各个因式的值是: $(x-y)=0, (x+y)=18, (x^2+y^2)=162$, 于是就可以把“018162”作为一个六位数的密码. 对于多项式 $4x^3 - xy^2$, 取 $x=10, y=10$ 时, 用上述方法产生的密码是_____.

6. (2005·荆门) 多项式 $x^2 + px + 12$ 可分解为两个一次因式的积, 整数 p 的值是_____.

7. (2005·日照) 如果 m, n 是两个不相等的实数, 且满足 $m^2 - 2m = 1, n^2 - 2n = 1$, 那么代数式 $2m^2 + 4n^2 - 4n + 1994 =$ _____.

8. (2005·十堰) 图 2-9 中的螺旋形由一系列直角三角形组成, 则第 n 个三角形的面积为_____.

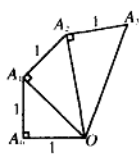


图 2-9

9. (2005·江西) 如图 2-10 所示, 按下列方法将数轴的正半轴绕在一个圆上 (该圆周长为 3 个单位长, 且在圆周的三等分点处分别标上了数字 0, 1, 2): 先让原点与圆周上 0 所对应的点重合, 再将正半轴按顺时针方向绕在该圆周上, 使数轴上 1, 2, 3, 4, ... 所对应的点分别与圆周上 1, 2, 0, 1, ... 所对应的点重合. 这样, 正半轴上的整数就与圆周上的数字建立了一种对应关系.

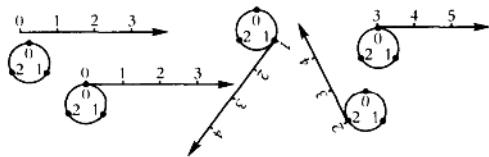


图 2-10

- (1) 圆周上的数字 a 与数轴上的数 5 对应, 则 $a =$ _____;
 (2) 数轴上的一个整数点刚刚绕过圆周 n 圈 (n 为正整数) 后, 落在圆周上数字 1 所对应的位置, 这个整数是_____ (用含 n 的代数式表示).
 10. (2004·常州) 如图 2-11, 用水平线和竖直线将平面分成若干个小正方形格子, 小正方形的顶点叫格点, 以格点为顶点的多边形叫格点多边形. 设格点多边形的面积为 S , 它各边上格点的个数和为 x .

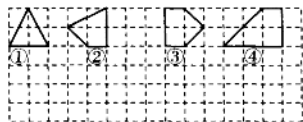


图 2-11

- (1) 上图中的格点多边形, 其内部都只有一个格点, 它们的面积与各边上格点的个数和的对应关系如下表. 请写出 S 与 x 之间的关系式.

答: $S =$ _____.

多边形的序号	①	②	③	④	...
多边形的面积 S	2	2.5	3	4	...
各边上格点的个数和 x	4	5	6	8	...

- (2) 请你再画一些格点多边形, 使这些多边形内部都有而且只有 2 个格点. 此时所画的各个多边形的面积 S 与它各边上格点的个数和 x 之间的关系式是: $S =$ _____.

- (3) 请你继续探索, 当格点多边形内部有且只有 n 个格点时, 猜想 S 与 x 有怎样的关系?
 答: $S =$ _____.

二、选择题

11. (2005·厦门) 已知: $a + b = m, ab = -4$, 化简 $(a-2)(b-2)$ 的结果是()
 A. 6 B. $2m-8$ C. $2m$ D. $-2m$
 12. (2005·镇江) 已知 $|a| = 5, \sqrt{b^2} = 3$, 且 $ab > 0$, 则 $a+b$ 的值为()
 A. 8 B. -2 C. 8 或 -8 D. 2 或 -2
 13. (2005·十堰) 下列运算正确的是()
 A. $(-x^2) \cdot x^2 = x^6$ B. $(-x^3) \div x = x^2$
 C. $(2x^2)^3 = 8x^6$ D. $4x^2 - (2x)^2 = 2x^2$
 14. (2005·北京海淀) 已知 $(1-m)^2 + |n+2| = 0$, 则 $m+n$ 的值为()
 A. -1 B. -3 C. 3 D. 不能确定
 15. (2005·台州) 某超市进了一批商品, 每件进价为 a 元, 若要获利 25%, 则每件商品的售价应定为()
 A. 25% a B. $(1-25\%)a$
 C. $(1+25\%)a$ D. $\frac{a}{1+25\%}$
 16. (2005·临沂) 将 $45ab^2 - 20a$ 因式分解的结果是()
 A. $5ab(9b-4)$ B. $5a(9b^2-4)$
 C. $5a(3b-2)^2$ D. $5a(3b+2)(3b-2)$
 17. (2005·济南) 利用因式分解简便计算 $57 \times 99 + 44 \times 99 - 99$ 正确的是()
 A. $99 \times (57 + 44) = 99 \times 101 = 9999$
 B. $99 \times (57 + 44 - 1) = 99 \times 100 = 9900$
 C. $99 \times (57 + 44 + 1) = 99 \times 102 = 10098$
 D. $99 \times (57 + 44 - 99) = 99 \times 2 = 198$
 18. (2005·深圳) 实数 a, b 在数轴上的位置如图 2-12 所示, 那么化简 $|a-b| - \sqrt{a^2}$ 的结果是()

图 2-12

 A. $2a-b$ B. b C. $-b$ D. $-2a+b$
 19. (2005·南宁) 观察图 2-13 并寻找规律, 在“?”号处填上的数字是()
 A. 128 B. 136 C. 162 D. 188

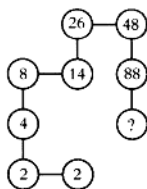


图 2-13

三、解答题

20. (2005·茂名) 已知 $A = (a+2)(a-2)$, $B = 2\left(6 - \frac{1}{2}a^2\right)$, 求 $A+B$.

21. (2005·大连) 甲对乙说: “有一个游戏, 规则是: 任想一个数, 把这个数乘以 2, 结果加上 8, 再除以 2, 最后减去所想的数, 此时我就知道结果.” 请你解释甲为什么能知道结果.

22. (2005·安徽) 一列火车自 A 城驶往 B 城, 沿途有 n 个车站 (包括起点站 A 和终点站 B), 该列火车挂有一节邮政车厢, 运行时需要在每个车站停靠, 每停靠一站不仅要卸下已经通过的各车站发给该站的邮包一个, 还要装上该站发往下面行程中每个车站的邮包一个.

例如, 当列车停靠第 x 个车站时, 邮政车厢上需要卸下已经通过的 $(x-1)$ 个车站发给该站的邮包共 $(x-1)$ 个, 还要装上面行程中要停靠的 $(n-x)$ 个车站的邮包共 $(n-x)$ 个.

(1) 根据题意, 完成下表:

车站序号	在第 x 个车站启程时邮政车厢邮包总数
1	$n-1$
2	$(n-1)-1+(n-2)=2(n-2)$
3	$2(n-2)-2+(n-3)=3(n-3)$
4	
5	
...	...
n	

- (2) 根据上表, 写出列车在第 x 个车站启程时, 邮政车厢上共有邮包的个数 y (用 x, n 表示).

- (3) 当 $n=18$ 时, 列车在第几个车站启程时邮政车厢上邮包的个数最多?

23. (2005·盐城) 已知如图 2-14, 现有 $a \times a$, $b \times b$ 的正方形纸片和 $a \times b$ 的矩形纸片各若干块, 试选用这些纸片 (每种纸片至少用一次) 在下面的虚线方框中拼成一个矩形 (每两个纸片之间既不重叠, 也无空隙, 拼出的图中必须保留拼图的痕迹), 使拼出的矩形面积为 $2a^2 + 5ab + 2b^2$, 并标出此矩形的长和宽.

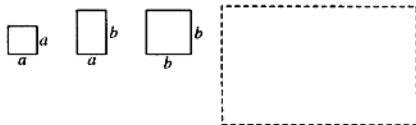


图 2-14

专题三 分 式



知识要点

1. 分式的概念

形如 $\frac{A}{B}$ 的式子叫分式, 其中 A, B 为整式, B 中含有字母且 $B \neq 0$.

① 分母 $B=0$, 分式无意义; 分母 $B \neq 0$; 分式有意义.

② 分子 $A=0$, 分母 $B \neq 0$, 分式的值为 0.

③ 分子、分母同号时, 分式的值为正;

分子、分母异号时, 分式的值为负.

2. 分式的基本性质

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times m}{B \times m} \quad (m \neq 0);$$

$$\frac{A}{B} = \frac{A \div m}{B \div m} \quad (m \neq 0).$$

3. 分式的运算

分式的运算与分数的运算相类似.

分式的乘除, 注意先化除为乘, 约分后再相乘.

分式的加减, 注意先通分, 化成同分母分式后再加减.



试题解析

对于分式, 在中考中主要从分式的概念, 分式的基本性质, 分式的加、减、乘、除运算等方面出题. 其中分式的概念, 要了解分式有意义的条件和分式的值为零的条件, 易出填空题或选择题. 利用分式的基本性质通分、约分及分式的混合运算多在解答题中出现, 也是中考的热门之一, 要熟练掌握.

例 1 (1) 当 x _____ 时, 分式 $\frac{x+1}{x-1}$ 有意义;

(2) 若代数式 $\frac{x-2}{x+1}$ 的值为零, 则 $x =$ _____.

解: (1) 令分母 $x-1=0$, 则

$$x=1.$$

∴ 当 $x \neq 1$ 时, 分式 $\frac{x+1}{x-1}$ 有意义.

(2) 令分子 $x-2=0$, 则

$$x=2.$$

当 $x=2$ 时, 分母 $x+1=2+1 \neq 0$.

∴ 若代数式 $\frac{x-2}{x+1}$ 的值为零, 则 $x=2$.

点评: 此题主要考查分式 $\frac{A}{B}$ 在什么情况下有意义、无意义及为零的问题. 在求使分式的值为零的字母的值时, 可先令分子等于 0, 求出字母的值, 再将其代入分母检验, 看分母是否不为零.

例 2 计算:

$$(1) (2005 \cdot \text{南京}) \frac{a^2-1}{a^2+2a+1} \div \frac{a^2-a}{a+1};$$

$$(2) (2005 \cdot \text{宜昌}) \frac{a-2}{a^2-4} + \frac{a+1}{a+2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: (1)} \quad & \frac{a^2-1}{a^2+2a+1} \div \frac{a^2-a}{a+1} \\ &= \frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)^2} \div \frac{a(a-1)}{a+1} \\ &= \frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)^2} \cdot \frac{a+1}{a(a-1)} \\ &= \frac{1}{a}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{a-2}{a^2-4} + \frac{a+1}{a+2} \\ &= \frac{a-2}{(a+2)(a-2)} + \frac{a+1}{a+2} \\ &= \frac{1}{a+2} + \frac{a+1}{a+2} \\ &= \frac{1+a+1}{a+2} \\ &= \frac{a+2}{a+2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

点评: 本题考查了分式的基本运算, 解决此题的关键是掌握分式的运算法则, 按法则进行运算. 同时, 解题时还要注意: ① 分式的约分、通分, 必须先把分式的分子、分母分解因式;

② 运算的结果要化为最简分式.

例 3 (2004 · 贵阳) 先化简, 再求值:

$$\left(\frac{3x}{x-1} - \frac{x}{x+1} \right) \cdot \frac{x^2-1}{x}, \text{ 其中 } x = \sqrt{2}-2.$$

分析: 化简思路, 可先通分求出括号中的差, 再算乘积; 也可利用乘法对加法的分配律进行计算.

解法一:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left[\frac{3x(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} \right] \cdot \frac{x^2-1}{x} \\ &= \frac{3x^2+3x-x^2+x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x^2-1}{x} \\ &= \frac{2x^2+4x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x^2-1}{x} \\ &= \frac{2x(x+2)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x} \\ &= 2(x+2). \end{aligned}$$

当 $x = \sqrt{2}-2$ 时, 原式 $= 2(\sqrt{2}-2+2) = 2\sqrt{2}$.

解法二:

$$\text{原式} = \frac{3x}{x-1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x} - \frac{x}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x}$$



$$\begin{aligned} &= 3(x+1) - (x-1) \\ &= 3x+3-x-1 \\ &= 2x+4. \end{aligned}$$

当 $x = \sqrt{2} - 2$ 时, 原式 $= 2(\sqrt{2} - 2) + 4 = 2\sqrt{2}$.

点评: 本题考查了分式的混合运算, 求分式的值等知识, 在解题时注意: ①有关分式的求值问题注意先化简、后求值; ②分式的混合运算既要注意运算法则, 又要注意运算顺序. 同时, 还要观察题目的特点, 灵活地运用运算律简化运算.

例4 (2005·贵阳) 先化简, 再选择使原式有意义而你喜欢的数代入求值:

$$\frac{2x+6}{x^2-4x+4} \cdot \frac{x-2}{x^2+3x} - \frac{1}{x-2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \frac{2(x+3)}{(x-2)^2} \cdot \frac{x-2}{x(x+3)} - \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{2}{x(x-2)} - \frac{1}{x-2} \\ &= \frac{2}{x(x-2)} - \frac{x}{x(x-2)} \\ &= \frac{2-x}{x(x-2)} \\ &= -\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

(x 取不等于 2, 0, -3 的其他数, 如: 当 $x=1$ 时, 原式 $= -1$.)

点评: 这是一个自选字母的值求代数式的值的题目, 在求解时, 所选的数值应保证原式有意义. 如在本题中, x 的取值应使原分式有意义, 即使各分母不为零, x 不能取 2, 0, -3.



专题训练

[1 基础与能力]

一、填空题

- (2005·沈阳) 当 x _____ 时, 式子 $\frac{1}{2x-1}$ 有意义.
- (2005·龙岩) 当 x _____ 时, 分式 $\frac{x-2}{x+2}$ 的值为零.
- (2004·青岛) 化简: $\frac{2-a}{a^2-4a+4} =$ _____.
- (2005·扬州) 当 $x=2005$ 时, 代数式 $\frac{x^2-1}{x-1} - 1$ 的值为 _____.
- (2005·深圳) 已知: $\frac{2}{1} \times 2 = \frac{2}{1} + 2$, $\frac{3}{2} \times 3 = \frac{3}{2} + 3$, $\frac{4}{3} \times 4 = \frac{4}{3} + 4$, ..., 若 $\frac{a}{b} \times 10 = \frac{a}{b} + 10$ (a, b 都是正整数), 则 $a+b$ 的最小值是 _____.

二、选择题

- (2004·重庆) 若分式 $\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$ 的值为零, 则 x 的值为 ()
A. 3 B. 3 或 -3 C. -3 D. 0
- (2005·茂名) 下列分式的运算中, 结果正确的是 ()

A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$

B. $\frac{(a^3)^3}{a} = a^3$

C. $\frac{a^2+b^2}{a+b} = a+b$

D. $\frac{a-3}{a^2-6a+9} = \frac{1}{a-3}$

8. (2005·北京) 计算 $\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-1}$ 的结果是 ()

A. $x-1$

B. $1-x$

C. 1

D. -1

9. (2005·大连) 若分式 $\frac{x+y}{x-y}$ 中的 x, y 的值都变为原来的 3 倍, 则此分式的值 ()

A. 不变

B. 是原来的 3 倍

C. 是原来的 $\frac{1}{3}$

D. 是原来的 $\frac{1}{6}$

10. (2004·杭州) 甲、乙两人分别从两地同时出发, 若相向而行, 则 a 小时相遇; 若同向而行, 则 b 小时甲追上乙, 那么甲的速度是乙的速度的 ()

A. $\frac{a+b}{b}$ 倍

B. $\frac{b}{a+b}$ 倍

C. $\frac{b+a}{b-a}$ 倍

D. $\frac{b-a}{b+a}$ 倍

三、解答题

11. 先化简, 再求值:

(1) (2005·山西) $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{1}{2x-2}$, 其中 $x = -\frac{1}{2}$;

(2) (2005·北京) $\frac{m}{m+3} - \frac{6}{m^2-9} \div \frac{2}{m-3}$, 其中 $m = -2$.

12. (2005·安徽) 请将下面的代数式尽可能化简, 再选择一个你喜欢的数 (要适合哦!) 代入求值.

$$2a - (a+1) + \frac{a^2-1}{a-1}.$$

13. (2005 · 河南) 有一道题“先化简, 再求值: $\left(\frac{x-2}{x+2} + \frac{4x}{x^2-4}\right) \div \frac{1}{x^2-4}$, 其中 $x = -\sqrt{3}$ ”, 小玲做题时把“ $x = -\sqrt{3}$ ”错抄成了“ $x = \sqrt{3}$ ”, 但她的计算结果也是正确的, 请你解释这是怎么回事?

[II 发展与创新]

一、填空题

1. (2005 · 杭州) 当 $m =$ _____ 时, 分式 $\frac{(m-1)(m-3)}{m^2-3m+2}$ 的值为零.
2. (2005 · 南通) 若 $x:y=1:2$, 则 $\frac{x-y}{x+y} =$ _____.
3. (2005 · 绵阳) 若非零实数 a, b 满足 $4a^2 + b^2 = 4ab$, 则 $\frac{b}{a} =$ _____.
4. (2005 · 丽水) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$, 则 $\frac{a-b}{b} =$ _____.
5. (2004 · 荆州) 观察下面一列有规律的数: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots$ 根据其规律可知: (1) 第 7 个数是 _____, 第 n 个数应是 _____ (n 是正整数); (2) $\frac{1}{132}$ 是第 _____ 个数.

二、选择题

6. (2005 · 福州) 如果代数式 $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ 有意义, 那么 x 的取值范围是 ()
- A. $x \geq 0$ B. $x \neq 0$ C. $x > 0$ D. $x \geq 0$ 且 $x \neq 1$
7. (2004 · 昆明) 下列各式中, 运算正确的是 ()
- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$
- B. $(-a+2b)^2 = (a-2b)^2$
- C. $\frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{1}{a+b} \quad (a+b \neq 0)$
- D. $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = 1-\sqrt{3}$
8. (2004 · 芜湖) 分式 $\frac{x^2+2x-3}{|x|-1}$ 的值为 0, 则 x 的取值为 ()
- A. $x = -3$ B. $x = 3$
- C. $x = -3$ 或 $x = 1$ D. $x = 3$ 或 $x = -1$
9. (2005 · 武汉) 计算 $\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \div \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)$ 的结果为 ()
- A. 1 B. $x+1$ C. $\frac{x+1}{x}$ D. $\frac{1}{x-1}$

10. (2005 · 潍坊) 若 $x + \frac{1}{x} = 3$, 求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值是 ()

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

11. (2004 · 宁波) 已知 a, b 为实数, 且 $ab = 1$, 设 $M = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$, $N = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$, 则 M, N 的大小关系是 ()

A. $M > N$ B. $M = N$ C. $M < N$ D. 不确定

三、解答题

12. (2005 · 东营) 已知 $x = \sqrt{2} + 1$, 求 $\left(\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x}{x^2-2x+1}\right) \div \frac{1}{x}$ 的值.

13. (2005 · 荆州) 若 $(x - \sqrt{3})^2 + |y - \cos 30^\circ| = 0$, 求 $\frac{3xy - x^2y}{xy-1} \cdot \left(\frac{1}{xy} - 1\right)$ 的值.

14. (2005 · 十堰) 已知: $\frac{2x-3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$, 求 A, B 的值.

15. (2005 · 大连) 已知: $y = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} \div \frac{x^2-x}{x+1} - \frac{1}{x} + 1$, 试说明在右边代数式有意义的条件下, 不论 x 为何值, y 的值不变.