新编高中数学竞赛教程

(下)

单墫 主审
葛军 主编

江苏省中学生奥林匹克竞赛委员会组织编写

全国高中数学联赛江苏省推荐

河海大学出版社

总 策 划 黄海鸥
责任编辑 朱婵玲
封面设计 黄 炜

ISBN 7-5630-1656-2

9 787563 016563 >

ISBN 7-5630-1656-2/G · 280
本套定价: 48元 本册定价: 16元

新编高中数学竞赛教程

（下）

主　审　单　墫

主　编　葛　军

图书在版编目(CIP)数据

新编高中数学竞赛教程. 下/葛军主编. —南京:河海大学出版社,2001.7

全国高中数学联赛江苏省推荐用书

ISBN 7-5630-1656-2

Ⅰ.新... Ⅱ.葛... Ⅲ.数学课—高中—教材 Ⅳ.G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 045464 号

书　　名 / 新编高中数学竞赛教程(下)
书　　号 / ISBN 7—5630—1656—2/G·280
责任编辑 / 朱婵玲
特约编辑 / 熊水斌　胡新宇
封面设计 / 黄炜
出　　版 / 河海大学出版社
地　　址 / 南京市西康路 1 号(邮编: 210098)
电　　话 / (025) 3737852(总编室)　(025) 3722833(发行部)
印　　刷 / 南京京新印刷厂
开　　本 / 850 毫米×1 168 毫米　1/32　11.25 印张　287 千字
版　　次 / 2003 年 3 月第 1 版第 3 次印刷
定　　价 / 本套定价 48.00 元,本册定价 16.00 元

前　言

数学竞赛(这里主要指高中数学竞赛),自上个世纪首先在匈牙利兴起,很快就风靡了全世界。各种层次的竞赛吸引了众多的学生参加,成为数学教育中一件非常重要的事情。

我国教育家很早就注意到学习兴趣的重要性:“学之者不如好之者,好之者不如乐之者”。数学竞赛提高了学生的学习兴趣。年青的学生,求知欲很强,而好胜心更是这个年龄阶段人人具备的。竞赛活动,激发了他们的“斗志”,唤起了学习的热情。一旦他们觉得需要学习,主动地学习,那就什么困难也都不在话下。

竞赛活动,还使学生眼界大开。他们跳出一个班、一个学校或一个地区的小圈子,与其他的“高手”互相琢磨,又听了一些名师的讲座,看了很多有趣的小册子,阅读的能力,理解的能力,交流的能力,表达的能力都与日俱增。更重要的是,通过解竞赛题,他们创造能力也大大加强,而这是通常的教育难以企及的。

有人认为“竞赛只是培养少数尖子”,这种看法与事实不符。从竞赛中得益的决不只是少数人。我们可以用体育竞赛作为参照。诚然,参加奥运会,具备夺金夺银实力的只是寥寥数人。但参加体育活动却使众多的人体质增加。数学竞赛也是如此。广大的学生明白这一点,家长也明白这一点。所以参加竞赛活动的人数不断增加,形成一种无法阻挡的潮流。

还有人忧心忡忡,认为数学竞赛容易造成“偏科”,不利于“减负”。这些人死死抱住学生必须“全优”的观点,反对学生发展自己的兴趣爱好,不利于学生的正常成长。其实,只要学生有兴趣,困难

挡不住他们，负担也不成为负担。目前，教育部的政策是竞赛中获奖的可以保送，可见高等学校（特别是重点学校）十分欢迎获奖的选手。

也有人把竞赛与高考对立起来，认为做竞赛题花时间太多，影响高考成绩。他们不明白“取法务上”的道理。会做竞赛题，上了一个层次，居高临下，做高考题就不感到困难。如果“取法务中”，往往“仅得乎下”，连中游也保不住。当然，学生也应根据自己的实际情况，首先打好基础，不要好高骛远，一味钻难题。

这套《新编高中数学竞赛教程》正是注意将竞赛与高考有机地结合起来，注意基础知识、基本技能与基本的思想方法，由浅入深，循序渐进。其中例题与练习，大多是有代表性的问题，过偏过难的一般不予收录。更有不少高考中的问题，有助升学考试。书中的问题也尽量注明出处，以备查对。每讲除练习外，还有自我检测题。最后有 15 套综合练习，5 套高中联赛模拟题。习题均有解答，可供参考。

江苏省科协青少年科技中心组织编写此书，是为青少年做了一件好事。

最后，感谢河海大学出版社管理者的远见卓识和朱婵玲女士的大力支持，使这套书尽早问世。

单 墫

2001.6

目　　录

第34讲　直　　线

【知识概要】

1. 两点间距离公式

设$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，

则 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$，

或者 $$|P_1P_2|=|x_1-x_2|\sec\alpha=\frac{|y_1-y_2|}{\sin\alpha},$$

其中 α 为直线 P_1P_2 的倾斜角，k 为直线 P_1P_2 的斜率.

2. 线段定比分点坐标公式

设 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，点 $P(x, y)$ 分$\overline{P_1P_2}$的比为 λ，则 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ $(\lambda\neq-1)$.

3. 直线的斜率 k 与直线的倾斜角 α

$k=\tan\alpha$ $(\alpha\neq 90°)$. 直线的倾斜角的取值范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$ 或$[0, \pi)$.

经过两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 的直线的斜率为

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ (x_1\neq x_2).$$

4. 直线方程的各种形式

(1) 点斜式：经过点 $P_1(x_1, y_1)$、斜率为 k 的直线，方程是

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

(2) 斜截式：斜率为 k，在 y 轴上的截距为 b 的直线，方程是

$$y=kx+b.$$

(3) 两点式：经过两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 的直线，方程是

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\ (x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2).$$

(4) 截距式：在 x,y 轴上的截距分别是 a,b 的直线，方程是

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a\neq 0,\ b\neq 0).$$

要正确理解“截距”概念，不要与“距离”混为一谈.

(5) 直线方程的一般式：$Ax+By+C=0$，其中 A,B 不全为零.

(6) 参数方程：$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$ （t 为参数）.

5. 两直线平行与垂直的判断

(1) 设直线 l_1、l_2 的斜率存在，且分别为 k_1,k_2.

① 若 l_1,l_2 不重合，则 $l_1 /\!/ l_2$ 的充分必要条件是 $k_1=k_2$；

② $l_1\perp l_2$ 的充分必要条件是 $k_1k_2=-1$.

(2) 设直线 l_1 的方程为 $A_1x+B_1y+C_1=0$ (A_1、B_1 不全为零)，直线 l_2 的方程为 $A_2x+B_2y+C_2=0$ (A_2、B_2 不全为零)，则

① l_1 与 l_2 相交的充分必要条件是 $A_1B_2\neq A_2B_1$；

② $l_1\perp l_2$ 的充分必要条件是 $A_1A_2+B_1B_2=0$；

③ $l_1 /\!/ l_2$ 的充分必要条件是 $A_1B_2=A_2B_1$，且 $A_1C_2\neq A_2C_1$ 与 $B_1C_2\neq B_2C_1$ 至少有一个成立.

6. 直线 l_1 到 l_2 的角、直线 l_1 与 l_2 的夹角

设直线 l_1、l_2 的斜率存在，分别为 k_1,k_2，且夹角不是 $90°$.

若 l_1 与 l_2 的夹角是 θ，则 $\tan\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$，此公式称为“夹角公式”.

7. 点 $P(x_0,\ y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$(A,B 不全为零)的距离 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

8. 两平行线 $Ax+By+C_1=0$、$Ax+By+C_2=0$ 间的距离为 $\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

9. 经过直线 l_1、l_2 的交点的直线系方程为 $A_1x+By_1+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$，其中不包括直线 l_2.

【例题】

例 1 经过点 $M(2, 1)$ 作直线 l，分别交 x 轴、y 轴于 A、B，

(1) 若 A、B 是 l 与 x，y 轴的正向的交点，求当 $\triangle AOB$ 的面积最小时，直线 l 的方程.

(2) 当 $|MA|\cdot|MB|$ 最小时，直线 l 的方程.

基本思路：$\triangle AOB$ 面积的变动是因为直线绕点 M 转动引起，确定直线还需要斜率或者一个角，用待定系数法.

解：直线在两轴上的截距不会为零，选用直线的截距式方程.

设所求的直线方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1(a>0,\ b>0)$，

(1) 由题意知 $1=\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{2}{ab}}$，即 $ab\geqslant 8$，故 $S_\triangle=\dfrac{1}{2}ab\geqslant 4$，等于当且仅当 $\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{b}$，即 $a=2b$ 时取得最小值. 从而 $b=2,\ a=4$，所以直线 l 的方程为 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$.

(2) 设 $\angle BAO=\theta$，θ 为锐角. 过 M 分别作 x，y 轴的垂线，垂足分别为 C、D.

在 $\mathrm{Rt}\triangle MAC$ 中，$|MA|=\dfrac{1}{\sin\theta}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle MBD$ 中，$|MB|=\dfrac{2}{\cos\theta}$，$|MA|\cdot|MB|=\dfrac{4}{\sin2\theta}$. 当 $\theta=45°$，直线 AB 的斜率为 -1 时，$|MA|\cdot|MB|$ 最小，直线 l 的方程为 $x+y-5=0$.

思考：去掉直线必须与坐标轴正半轴相交的条件限制，① 使 $\triangle AOB$ 面积为 4 的直线有几条？② 使 $\triangle AOB$ 面积为 8 的直线有几条？③ 使 $\triangle AOB$ 面积为 2 的直线有几条？为什么？

例 2 已知 $\triangle ABC$ 中，顶点 $A(2, 1)$，$B(-1, -1)$，$\angle C$ 的平分线的方程是 $x+2y-1=0$. 求顶点 C 的坐标.

基本思路：注意到三角形角平分线的性质，作与 A 关于直线 l

对称的点 A'，因为 l 平分 $\angle ACB$，所以点 A' 必在直线 CB 上，这样可以先求出点 A' 的坐标，然后求出 BA' 的方程，从而求出点 C 的坐标.

解：设与 $A(2, 1)$ 关于直线 $x+2y-1=0$ 对称的点为 $A'(x', y')$，所以有 $\dfrac{y'-1}{x'-2}=2$，$\dfrac{x'+2}{2}+2\cdot\dfrac{y'+1}{2}-1=0$，解得 $x'=\dfrac{4}{5}$，$y=-\dfrac{7}{5}$.

$\therefore$ BA' 的方程为 $2x+9y+11=0$.

解方程组 $\begin{cases}2x+9y+11=0,\\ x+2y-1=0\end{cases}$

得 $x=\dfrac{31}{5}$，$y=-\dfrac{13}{5}$，这就是点 C 的坐标.

说明：(1) 本题解法较多. 如用"到角公式"，设 $\angle C$ 的平分线为 l，由于由直线 CA 到 l 的角等于直线 l 到直线 CB 的角，利用这一条件建立它们斜率间的关系式，从而求出点 C 的坐标. 设 $C(x_0, y_0)$，所以 CA、CB 的斜率为 $k_{CA}=\dfrac{y_0-1}{x_0-2}$，$k_{CB}=\dfrac{y_0+1}{x_0+1}$，由题意，得 $\dfrac{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{y_0-1}{x_0-2}}{1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y_0-1}{x_0-2}}=\dfrac{\dfrac{y_0+1}{x_0+1}+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y_0+1}{x_0+1}}$. 化简时注意到 $x_0+2y_0=1$，上式化简为 $2x_0-y_0-15=0$. 与 $x_0+2y_0-1=0$ 联立，解得 $x_0=\dfrac{31}{5}$，$y_0=-\dfrac{13}{5}$. 顶点 C 的坐标为 $\left(\dfrac{31}{5}, -\dfrac{13}{5}\right)$.

请读者再给出两种解法.

(2) 凡是与角平分线有关的问题注意用"对称法". 设点 $M(x_0, y_0)$ 与点 $M'(x', y')$ 关于直线 $Ax+By+C=0$ (A、B 不全为零) 对称，则有

$$\begin{cases}\dfrac{y'-y_0}{x'-x_0}=\dfrac{B}{A}(MM'\perp l);\\ A\cdot\dfrac{x'+x_0}{2}+B\cdot\dfrac{y'+y_0}{2}+C=0(MM'\text{ 的中点在 } l \text{ 上}).\end{cases}$$

解得 $$x' = x_0 - \frac{2A(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2},$$
$$y' = y_0 - \frac{2B(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}.$$
特别地，与点 $M(x_0, y_0)$关于直线 $y = x + b$（斜率为 1）对称的点就是（$y_0 - b, x_0 + b$）；关于直线 $y = -x + b$（斜率为 -1）对称的点就是（$-y_0 + b, -x_0 + b$）.

例 3 已知直线 l 经过点 $M(3, 2)$，与 x 轴正向、射线 $y = 4x$（$x > 0$，不含端点）分别交于点 A、B，求当$\triangle AOB$ 面积最小时直线 l 的方程.

基本思路：选择自变量建立函数关系式，求出函数最小值，其取得最小值时的自变量值就是确定直线的另一个条件.

解：点 A 确定，直线 AM 就确定. 设 $A(t, 0)$（以 t 为自变量），AM 的方程为
$$y = \frac{2}{3-t}(x - t),$$
与 $y = 4x$ 联立，解得
$$y = \frac{4t}{2t-5},$$
$\because$ $$y > 0,$$
$\therefore$ $$t > \frac{5}{2}.$$
$\triangle AOB$ 的面积 $$S = \frac{2t^2}{2t-5}.$$
设 $u = 2t - 5$（为使分母成为单项式），则
$$S = \frac{(u+5)^2}{2u} = 5 + \frac{1}{2}\left(u + \frac{25}{u}\right) \geqslant 5 + 5 = 10,$$
等号在 $u = 5$ 时成立，此时 $t = 5$，直线 AM 的方程为
$$x + y - 5 = 0.$$
思考：为什么 $t > \frac{5}{2}$？$\triangle AOB$ 的面积有最大值吗？

例 4 如图 34－1，设 $A(0, a)$、$B(0, b)$是 y 轴正半轴上的两

个定点，其中 $a>b$，在 x 轴正半轴上求一点 C，使$\angle ACB$ 最大.

基本思路：研究角的最大最小值的问题实际上是研究它的有关三角函数的最大最小值问题.

解：设 $M(x, 0)$，$x>0$. 由题意，直线 MA 的斜率为 $-\dfrac{a}{x}$，直线 MB 的斜率为 $-\dfrac{b}{x}$，则

$$\tan\angle AMB=\frac{-\dfrac{b}{x}+\dfrac{a}{x}}{1+\dfrac{ab}{x^2}}=\frac{a-b}{x+\dfrac{ab}{x}}.$$

$\because$ $x>0$，$\therefore$ $x+\dfrac{ab}{x}\geqslant 2\sqrt{ab}$，等号在 $x=\sqrt{ab}$ 时成立，即有 $\tan\angle AMB\leqslant\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$，$\because$ $\angle AMB$ 是锐角，$\therefore\angle AMB\leqslant\arctan\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$，所以，当点 C 的坐标为$(\sqrt{ab}, 0)$时，$\angle AMB$ 最大，最大值是 $\arctan\dfrac{a-b}{2\sqrt{ab}}$.

说明：(1) 本题也可以说成"足球射门"问题. 假设线段 AB 代表球门，在 x 轴上的球员应该站在何处射门容易射中.

(2) 利用平面几何结论是解决解析几何问题的重要方法之一.

如图 34－1，作$\triangle AMB$ 的外接圆 G. 显然当点 C 在圆内时，$\angle ACB>\angle AMB$，所以当圆 G 与 x 轴相切时，切点就是要找的点 C，此刻 $OC^2=ab$，$OC=\sqrt{ab}$，点 $C(\sqrt{ab}, 0)$.

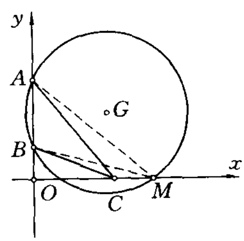

图 34－1

(3) 如图 34－2，把"AB 与 x 轴垂直"改成"AB 与 x 轴成角 α"，仍然研究 x 轴正半轴上的点 C 在何处时，$\angle ACB$ 最大.

设 $B(1, b)$，点 $A(a\cos\alpha, 1 + a\sin\alpha)$（$\alpha$ 为锐角，线段 AB 的长为 a），在 x 轴正半轴上求一点 C，使 $\angle ACB$ 最大.

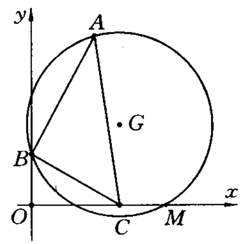

图 34－2

作出 $\triangle ABM$ 的外接圆，作出经过点 M 的优弧. 假设线段 AB 是一个学校大门的位置，当门卫工作人员在 x 轴的正半轴巡逻时，在点 C 处时视角最大.

(4) 本题还可以用余弦定理来解.

$$\cos\angle AMB = \frac{t^2 + ab}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}},$$

$$\begin{aligned}(\cos\angle AMB)^2 &= \frac{t^4 + 2abt^2 + a^2b^2}{t^4 + (a^2 + b^2)t^2 + a^2b^2} \\ &= 1 + \frac{(a - b)^2t^2}{t^4 + (a^2 + b^2)t^2 + a^2b^2} \\ &= 1 + \frac{(a - b)^2}{t^2 + (a^2 + b^2) + \frac{a^2b^2}{t^2}} \\ &\leqslant \frac{2(a^2 + b^2)}{(a + b)^2}.\end{aligned}$$

以下略. 显然比较麻烦.

例 5　设已知三条直线 l_1: $mx - y + m = 0$; l_2: $x + my - m(m + 1) = 0$; l_3: $(m + 1)x - y + (m + 1) = 0$，它们围成 $\triangle ABC$.

(1) 求证不论 m 为何值，$\triangle ABC$ 有一个顶点为定点；

(2) 当 m 为何值时，$\triangle ABC$ 面积有最大值、最小值.

基本思路：利用参数 m 的任意性.

解：(1) 把直线 l_1 的方程 $mx - y + m = 0$ 整理成 m 的方程，得 $(x + 1)m - y = 0$，由于 m 的任意性，有 $x = -1$，且 $y = 0$，直线恒过点 $C(-1, 0)$.

由直线 l_3: $(m + 1)x - y + (m + 1) = 0$，得 $(x + 1)m + x - y + 1 = 0$，由于 m 的任意性，直线恒过点 $C(-1, 0)$.

可见$\triangle ABC$顶点C为定点.

(2) 注意到$l_1 \perp l_2$，$AB \perp AC$，$\triangle ABC$是直角三角形. 用点到直线的距离公式求出点C到直线AB的距离$d_1=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$，求出$B$到$AC$的距离$d_2=\frac{|m^2+m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$.

$$\begin{aligned}\triangle ABC\text{的面积}\ S&=\frac{1}{2}\cdot\frac{|m^2+m+1|}{m^2+1}\\&=\frac{1}{2}\left|1+\frac{m}{m^2+1}\right|\\&=\frac{1}{2}\left|1+\frac{1}{m+\frac{1}{m}}\right|.\end{aligned}$$

当$m>0$时，$m+\frac{1}{m}\geqslant 2$，等号在$m=1$时成立，S有最大值$\frac{3}{4}$；当$m<0$时，$m+\frac{1}{m}\leqslant -2$，等号在$m=-1$时成立，$S$有最小值$\frac{1}{4}$.

例 6 在四边形$ABCD$中，对角线AC平分$\angle BAD$. 在CD上取一点E，BE与AC相交于F，延长DF交BC于G. 求证：$\angle GAC=\angle EAC$. （1999 年全国高中数学竞赛试题）

基本思路：建立直角坐标系，用解析法. 注意基本量应该有 4 个，其他都可以用它们来表示；把证明两角$\angle GAC$、$\angle EAC$的关系转化为证明直线的斜率关系.

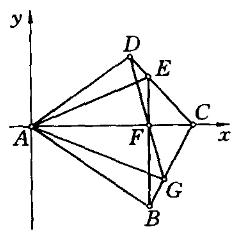

图 34－3

证明：图 34－3，以A为原点，以直线AC为x轴，建立直角坐标系. 设$C(c,0)$，$F(f,0)$，$D(x_D,kx_D)$，$B(x_B,-kx_B)$. 则直线DF的方程为