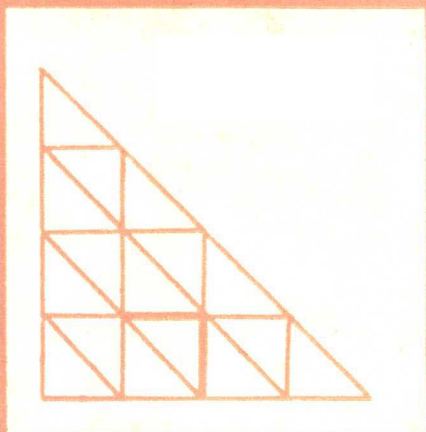


应用数学丛书



李楚霖 林少宫 编

微观经济的数理分析导引

华中工学院出版社



微观经济的数理分析导引

李楚霖 林少官 编

华中工学院出版社

微观经济的数理分析导引

李楚霖 林少官

责任编辑 陈礼琰

*

华中工学院出版社出版

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所发行

湖北省新华印刷厂排版 通城县印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 1/32 印张: 6.25 字数: 135,000

1985年6月第一版 1985年6月第一次印刷

印数: 1—8,000

统一书号: 13255—025 定价: 1.50元

内 容 简 介

本书通过对微观经济理论中的消费者行为理论、企业的最优选择、单纯交换经济和社会福利、一般均衡模型、投入产出分析以及经济成长的
大道定理等专题的论述，使读者了解现代数学如何应用于经济学，并为他们进一步了解或阅读现代数量经济文献奠定较广泛的数理基础。

本书可作为理工科大学数学系、经管系、经济系、系统工程系高年级学生和研究生
的选修教材，也可供有志于研究经济、系统理论的数学工作者参考。

出版说明

由于科学技术的飞速发展，现代数学的许多理论和方法，不但得到了广泛的应用，而且已部分地渗透到其他一些学科中，发展成为今日的许多边缘学科。为了帮助广大科技工作者能够较快地学习和掌握现代数学中那些应用性较强的数学理论和方法，我们编写了这套《应用数学丛书》。

本丛书将作为工程技术理论与现代数学之间的桥梁，着重介绍科技中应用较多的数学概念、理论和方法，以及它们在各学科中的应用，内容具有一定的深度和广度。每本书篇幅都适中，便于广大科技人员学习。本丛书也可作为广大理工科学生数学课外的补充读物。

要编好这套丛书，我们感到并非轻易的事情，由于这项工作对推动我国科学技术的发展和现代数学方法的普及具有重要意义，我们愿与广大作者和读者共同努力。

在此恳切希望广大的数学工作者，应用科学工作者，以及工程技术工作者多多赐教，并盼在推荐选题和编选等方面给予支持与合作。

华中工学院出版社

目 录

前言

第一章 消费者行为理论 4

§1 导言 4

§2 偏好关系和无差异曲线 5

§3 效用函数 8

§4 消费者最优选择的存在性 11

§5 价格和收入变化对需求的影响 14

§6 需求函数的性质 25

第二章 企业的最优选择 31

§1 导言 31

§2 一种产品一种生产要素的情形 32

§3 一种产品多种生产要素的情形 38

§4 一阶齐次生产函数与替代弹性 42

§5 生产过程的具体选择 48

§6 活动分析中有效过程的特征 51

第三章 交换、配置和社会福利 58

§1 导言 58

§2 三类最优分配的数学描述 62

§3 竞争配置的存在性 64

§4 极限定理 67

§5 效用可能性及其前沿 73

§6 个人偏好和社会选择 75

§7 不可能性定理 81

第四章 一般均衡 85

§1 导言 85

§2 一般均衡模型 85

§3 瓦尔拉-阿罗-德布罗一般均衡模型	91
§4 均衡价格的稳定性	97
§5 用整体牛顿法求均衡解	106

第五章 投入产出理论110

§1 导言	110
§2 投入产出分析	113
§3 投入产出理论的两个基本定理	118
§4 不可分解的投入产出系统	126
§5 动态投入产出系统	130
§6 投入产出系统的线性规划解释	132
§7 动态的有联合产出的情况	136

第六章 经济增长与大道定理140

§1 导言	140
§2 关于消费的大道定理	141
§3 冯·诺依曼模型	150
§4 关于最终状态财货存量的大道定理	157

附录 I 凸集合和凹函数158

附录 II 不动点定理和集值函数160

附录 III 非负矩阵162

前 言

数学方法在经济学中的应用，既推动了经济领域中的定量研究，又使经济分析日益深化。现代经济分析离开数学已寸步难行。正如20多年前苏联数学家、诺贝尔经济学奖获得者L·V·康托洛维奇所预言，企业、部门、地区以至国家的经济决策和计划管理，都需要有大量的数学专业人员参与分析和计算。如何才能使数学工作者得以迅速熟悉经济学？最好的办法似乎是在他们已经掌握的数学知识的基础上，来向他们介绍他们尚不熟悉的经济概念和问题。另一方面，一些经济管理工作者或经济专业学生，他们已有过系统学习经济学的机会，但对经济数学还不够了解，他们最感兴趣的也许是想要知道，现代经济学中需要怎样的数学？数学方法的特点在哪里？考虑到这两类不同的读者对象的需要，作者在本书的编写过程中作了如下的一些构思：

第一、这本书有别于经济数学，否则数学工作者看上去尽是一些“已知的”数学方法，会感到没有什么新东西可学。同时，连篇累牍的数学推导，也不能引起经济工作者的兴趣。其次，它也有别于数理经济，用数学形式全面地表述经济学，无论对哪一种读者来说，都不是学习所缺知识的捷径。尤其大部头的论述，往往令人望而生畏，实际上收不到良好的效果。虽然不可否认，对某些读者对象来说，经济数学和数理经济的书仍然是很需要的，但本书则采取了一种介于二者之间的编写方针，以期适合更多的读者。

第二、书的内容适当反映现代，而阐述方式则力求浅显。对每一经济概念以及不属于初等微积分和线性代数范围的数学

概念的引入，均从头讲起（或在附录中补充）；注意阐明每一数学细节的实际含义，务使数学与经济密切配合，形式与内容并举。为了对进一步阅读现代经济文献的读者起到较好的桥梁作用，本书有意识地对某些内容如：需求系统，生产函数，投入产出分析的数学理论作较深入的叙述。并且，在与本书相适应的数学水平上，介绍现代经济学的一些重要成就，如曾导致经济学诺贝尔奖的经济增长大道定理和福利函数不可能性定理。

第三，取材于微观经济，并不意味着以市场经济作为本书的主要议题。微观经济不但有许多富有魅力的应用数学问题。其中的一些已导致重要的数学成就，如：线性规划，对策论等；而且也是经济分析的基础。经济学的中心问题之一是如何有效地分配和利用有限（稀有）的资源，以获致最大的经济效益。而具体的经济效益则必然同每一个消费者的行为和每一个生产者的决策联系起来。如何最大限度地发挥生产技术的效率，以满足消费者的需要，就要求我们去研究需求函数，生产函数，……以及在一定约束条件下包含或不包含有增长因素的消费与生产之间的均衡（或经济协调），看看怎样或能否达到最优和稳定状态。这些都属于微观经济范畴。现代微观经济所包括的线性规划及其有关的投入产出分析，已成为经济分析的重要手段，均可应用于计划经济，并不局限于供求平衡，价格和市场的研究。

最后，所谓数学方法，就在于要有严谨的立论。要得到某种结果就不免要作出某种假设条件（充分的或必要的）。很可能一些假设条件在现实世界中是不够真实的，甚至是脱离实际的，这固然说明了数学方法的局限性，然而又是不可避免的。有时所谓“不真实”的假设条件正是科学抽象的结果，是为了用“很少”去说明“很多”；但是，有时也是为了证明定理不得已而

为之，对于这种“不真实”的条件，后人可以继续加以研究改进，而未可厚非。数学方法的好处就在于不会含混其辞，一就是一，二就是二。即使经济意义看来十分明显的结论，为了避免谬误，也要去论证。本书为了节省篇幅，同时也考虑到部分读者的兴趣，对于论证较繁的一些定理，其证明部分或予以从简、从略，或仅指出其参考文献。这当然是和数学的严谨性无关的另一回事。

编写现代经济数理分析方面的书在国内似还是初次尝试。由于作者水平所限，缺点和错误在所难免，尚祈读者不吝指正！

第一章 消费者行为理论

§1 导 言

一个经济社会是由若干成员组成，其中一部分成员称为消费者（个人或家庭），一部分成员称为生产者（个体劳动者或企业等），当然也有些成员既是消费者又是生产者。为了能用数学方法对经济问题进行分析，就有必要作一些假设，其基本假设之一是经济社会中所有成员（不管是消费者还是生产者）的行为准则都是要使自己得到的效益尽可能大。我们在第一、二章先考虑生产和消费两类成员各自的行为，然后在第三、四章再把他们放在一起进行讨论。

所谓消费者，意味着他有一定的收入，并利用这些收入购买一些财货（这里用“财货”一词兼表示商品及劳务）供他消费。而消费者行为，意思是选择一个消费计划，例如4斤水果，4盒香烟和2套衣料就构成一个消费计划，用向量表示为 $x = (4, 4, 2)$ 。一般地，若有 n 种财货，其消费计划可用实向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \geq 0$ 表示*，其中 x_j 是第 j 种财货（以某单位度量）的数量。本章的目的是研究消费者在收入的限制，使他的消费利益最大化的一个财货向量的存在性、它的性质以及当价格和收入改变时所受的影响。

* 对 R^n 中的两个向量 x 和 y ，本书规定：(i) $x \geq y$ 意味着对所有的 i 都有 $x_i \geq y_i$ ；(ii) $x \geq y$ 意味着对所有的 i 都有 $x_i \geq y_i$ 且至少对某一个 i 有严格不等式；(iii) $x > y$ 意味着对所有的 i 都有 $x_i > y_i$ 。对矩阵 $A = (a_{ij})$ ，如果 $a_{ij} \geq 0$ 对所有 i, j 都成立，则记成 $A \geq 0$ ；如果 $a_{ij} > 0$ 对所有 i, j 都成立，则记成 $A > 0$ 。

§ 2 偏好关系和无差异曲线

为了描述消费者利益，作如下假设：

假设 1 每一消费者对市场上能提供的任何两个财货向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ 和 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ ，都能根据他本人的爱好作出下列三种判断之一：

(1) 认为 x 比 y 好，记成 $x \succ y$ ；

(2) 认为 y 比 x 好，记成 $y \succ x$ ；

(3) 认为 x 和 y 无差异，记成 $x \sim y$ ，且这种判断不受他本人收入变化和财货价格变化的影响。但并没有说他想购买的财货量不受收入和价格变化的影响。消费者行为理论正是要研究这后一种影响。

如果 $x \succ y$ 或 $x \sim y$ ，则记成 $x \succeq y$ 。

若假设 1 成立时，我们说消费者在他的消费集（所有可供他比较的消费财货向量的集合）上有一个偏好关系。

假设 2 偏好关系具有单调性，即对任何两个财货向量 x 和 y ，如果 $x \succeq y$ ，则必有 $x \succ y$ 。

假设 2 意味着每一种财货都是有用财货，且多多益善，数量多一些的财货向量总比数量少一些的财货向量好，这个假设也简称为“多比少好”。

假设 3 偏好关系满足下列三条公理：

$$x \succeq y \text{ 和 } y \succeq x \Rightarrow x \sim y, \quad (1.1)$$

$$x \succeq y \text{ 和 } y \succ z \Rightarrow x \succ z, \quad (1.2)$$

$$x \succ y \text{ 和 } y \succeq z \Rightarrow x \succ z. \quad (1.3)$$

假设 4 如果消费者（把他的收入仅用于）消费两种财货，则对于 $x_1 > y_1$ ，必存在这样的 $y_2 > x_2$ ，使得 $((x_1, x_2)' \sim (y_1,$

y_2 '.

假设 4 意味着, 如果从消费者手中减少 (一定数量的) 第一种财货, 则可增加第二种财货来弥补由于减少第一种财货所蒙受的损失. 假设 4 对一些特殊情况并不成立, 例如设第一、二种财货分别是左脚鞋和右脚鞋, 当消费者被取走一只左脚鞋时, 给他增加右脚鞋是无济于事的.

假设 5 如果从消费者手中一单位一单位地减少第一种财货, 则为了补偿损失而增加的第二种财货的数量将愈来愈大.

例如表 1.1 给出 6 个无差异的财货向量. 当第一种财货减少 Δx_1 时, 第二种财货要增加 Δx_2 才能补偿损失. 比率 $-\Delta x_2/\Delta x_1$ 称为第二种财货对第一种财货的边际替代率. 假设 5 也可叙述为随着 x_2/x_1 的增加 (或减少), 边际替代率 $-\Delta x_2/\Delta x_1$ 越来越大 (或越来越小).

表 1.1

	第 一 种 财 货	第 二 种 财 货	$\left \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \right $
(1)	10	5	
(2)	9	6	1
(3)	8	8	2
(4)	7	11.5	3.5
(5)	6	16	4.5
(6)	5	21	5

考虑两种财货 1, 2, 设消费集是第一象限 R_+^2 . 在消费集中任取一个财货向量 (点) x , 考虑在 R_+^2 中所有满足 $y \ominus x$ 的财货向量 y 的集合, 这些 y 在 R_+^2 中形成一条曲线, 在经济学中称它为过 x 的无差异曲线. 由假设 4 知无差异曲线必是单调下降的. 又由假设 5 知无差异曲线必是凸向原点, 如图 1.1 所

示^{*}，过第一象限的每一点必有一条无差异曲线通过，而且由假设 2 容易推知，任何两条无差异曲线不会相交。因此，根据（一个）消费者对财货 1, 2 的偏好，在第一象限形成一个无差异曲线族。

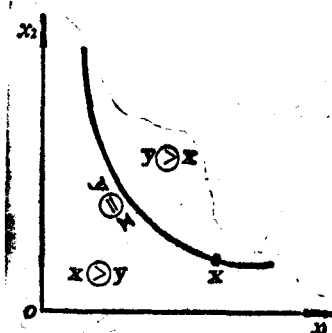


图 1.1

设消费者的收入为 r ，第 1, 2 种财货的价格分别为 p_1 和 p_2 ，又设他购买财货 $(x_1, x_2)'$ 的支出不超过他的收入。这样一来，消费者的任何消费计划 $x = (x_1, x_2)'$ 都必须满足

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq r, \quad x_1, x_2 \geq 0,$$

这些点组成的集合是由直线 $p_1 x_1 + p_2 x_2 = r$ 及两条坐标轴围成的三角形，称它为消费者的预算集，并称 $p_1 x_1 + p_2 x_2 = r$ 为预算线（图 1.2）。

根据基本假设，消费者的行为准则是要使他的消费利益尽可能大。对于上述情形，就是在预算集中选取那一个 x 使他获

• 在第二章讲生产函数的等产量线时将看到有类似的和进一步的论述。

得最大的满足。我们从无差异曲线族中取三条有代表性的曲线 aa' 、 bb' 和 cc' (图 1.2)。显然, 不可能选 cc' 上的点, 因为它在预算集外。至于 aa' 上的 B 点虽然在预算集内, 由假设 2 可以看出在预算集内有比 B 点更好的点。于是 bb' 和预算线相

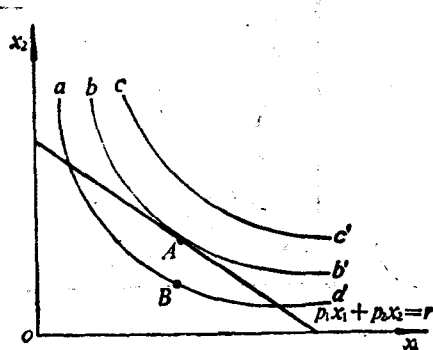


图 1.2

切的 A 点是在满足预算限制下的最好点了, 把 A 点的财货量 x_1 , x_2 称为 (对应于收入 r 和价格 p_1 , p_2 的) 消费者需求。如果消费者的收入或财货的价格发生变化, 预算线 (从而预算集) 也随着改变, 消费者的需求也改变。

§ 3 效用函数

在 §2 中, 通过无差异曲线讨论了只有两种财货时的消费者需求。对于多种财货的情形, 无差异曲线将变成无差异超曲

面，预算线将变成预算超平面：象 §2 中那样的几何直观性没有了。为了便于分析，经济学中往往引入效用函数来代替偏好关系。

对给定的一个消费者的偏好关系 $\otimes$ ，如果存在一个定义在财货向量 $x \geq 0$ 上的连续实值函数 $u(x)$ ，它和偏好关系有如下对应：

$$x \otimes y \iff u(x) \geq u(y); \quad (1.4)$$

$$x \otimes y \iff u(x) > u(y); \quad (1.5)$$

$$x \oplus y \iff u(x) = u(y), \quad (1.6)$$

则称 $u(x)$ 是消费者的效用函数。

由这个定义看出，当效用函数存在时，两个财货向量 x 和 y 的比较就等价于两个实数 $u(x)$ 和 $u(y)$ 的大小比较，这显然方便得多。可是给定一个消费者的偏好关系，是否一定存在具有上述性质的效用函数与之对应呢？这是经济学界经常讨论的一个问题。在 §2 中的五个假设下，再加上以下定义的连续性，就可构造出对应的效用函数。

定义(偏好的连续性) 对一个在消费集 X 上的偏好关系 $\otimes$ ，设 $\{y^q\}$ 是 X 中任一序列，如果能从 $y^q \otimes x$ (对所有的 q 成立) 和 $y^q \rightarrow y$ 推出 $y \otimes x$ ，或从 $y^q \oplus x$ (对所有的 q 成立) 和 $y^q \rightarrow y$ 推出 $y \oplus x$ ，则称偏好关系 $\otimes$ 在 X 上是连续的。

设在 $X = R^n$ 上给定一个连续单调偏好关系 $\otimes$ ，对给定的财货向量 $x \in X$ ，构造函数

$$u(x) = \max\{r; r \cdot 1 \otimes x\}, \quad (1.7)$$

其中 1 是所有分量都为 1 的 n 维向量， r 是实数。利用偏好关系 $\otimes$ 的单调连续性，易于验证，由 (1.7) 式定义的 $u(x)$ 等于满足 $u(x) \cdot 1 \oplus x$ 的实数。对两种商品的情形容易看出这个函数的几何意义。对偏好关系 $\otimes$ 在图 1.3 中有一条通过 x 的无差异

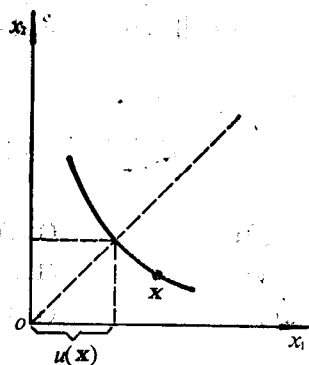


图 1.3

曲线, $u(x)$ 将由第一象限的对角线和无差异曲线的交点给出。

定理 1.1 对给定在 R^2_+ 上单调、连续的偏好关系 $\otimes$,

$$u(x) \equiv \max\{r; r \cdot 1 \otimes x\}$$

是对应于 $\otimes$ 的一个效用函数。

证明 首先证明 (1.4) 式的 $u(x) \geq u(y) \Rightarrow x \otimes y$. 如不然, 若有 $x \otimes y$. 由函数 $u(x)$ 的定义, 有 $u(x) \cdot 1 \otimes x$, $u(y) \cdot 1 \otimes y$. 因为 $u(x) \geq u(y)$,

就有 $y \otimes x \otimes u(x) \cdot 1 \otimes u(y) \cdot 1$, 这和 $y \otimes u(y) \cdot 1$ 矛盾。

其次证明 $x \otimes y \Rightarrow u(x) \geq u(y)$, 如不然, 若有 $u(x) < u(y)$, 从而 $u(x) \cdot 1 < u(y) \cdot 1$, 由偏好关系的单调性, 有 $u(x) \cdot 1 \otimes u(y) \cdot 1$. 由函数 $u(x)$ 的定义有 $u(x) \cdot 1 \otimes x$, $u(y) \cdot 1 \otimes y$, 这样就得 $x \otimes y$, 和假设 $x \otimes y$ 矛盾。

类似地可以证明 (1.5)、(1.6) 式成立。利用偏好关系的连续性假设, 读者自己去完成函数 $u(x)$ 的连续性证明。

效用函数并不是唯一的, 如果 $u(x)$ 是偏好关系 $\otimes$ 的效用函数, 则对任意连续单调增函数 $\Phi(\cdot)$, 函数 $\Phi(u(x))$ 也是 $\otimes$ 的效用函数。

要注意, 现实中存在不连续的偏好关系, 例如字典式序就是一个不连续的偏好关系。在 R^2 中字典式序定义如下。

$x \otimes y$ 当 $x_1 > y_1$ 或当 $x_1 = y_1$ 且 $x_2 > y_2$;

$x \otimes y$ 当 $x_1 = y_1$ 且 $x_2 = y_2$ 。

作为字典式序的例子, 我们考虑一个消费者, 其消费品是烟和