

高等学校工程数学教材

概率论与数理统计

河北科技大学数学系 编



 中国标准出版社

高等学校工程数学教材

概率论与数理统计

河北科技大学数学系 编

中国标准出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

概率论与数理统计/河北科技大学数学系编. —北京:
中国标准出版社, 2006

高等学校教材

ISBN 7-5066-4161-5

I. 概… II. 河… III. ①概率论—高等学校—教材
②数理统计—高等学校—教材 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 066696 号

中国标准出版社出版发行
北京复兴门外三里河北街 16 号

邮政编码: 100045

网址 www.bzcs.com

电话: 68523946 68517548

中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷

各地新华书店经销

*

开本 880×1230 1/32 印张 11.5 字数 360 千字

2006 年 8 月第一版 2006 年 8 月第一次印刷

*

定价 20.00 元

如有印装差错 由本社发行中心调换

版权专有 侵权必究

举报电话: (010)68533533

前

言

本书是为非数学专业的大学生编写的。知识内容的深广度按教育部“工科高校概率统计课程教学基本要求”控制,同时也参考了2006年全国研究生招生考试大纲。书中具体内容包括:概率论的基本概念,随机变量及其分布,随机变量的数字特征,极限定理,参数估计,假设检验,回归分析与方差分析等。各章配有大量的例题与习题,其中不少是近几年研究生招生考试题目。书后附有习题参考答案。各章习题均分为A、B两类,A组题目与正常教学要求相适应,B组题目稍难供学有余力者选作。

随机性数学中的概念、思维方式与确定性数学(如高等数学、线性代数)中有较大差别,学生初学时多有不适应。为了克服这一困难,本书对于新知识点往往先从实际例子入手,在直观的应用背景中逐步地、自然地引出数学概念,使抽象概念尽量具体化。还特别注意把高难度的知识台阶分解拆细,以使学习过程更自然顺畅。在不失严谨性的前提下,较多采用通俗直白的语言叙述,方便学生阅读理解。学生在学习过程中,也要有意识地将抽象的数学概念联系现实问题的直观

背景去理解去把握。

本书由河北科技大学数学系组织编写,刘金宪担任主编,江卫华、郭彦平、李秀敏任副主编。编写人员有刘金宪、江卫华、郭彦平、李秀敏、仇计清、索秀云、李法朝、刘秀君、苏连青、王群等。郭彦平对前七章改稿,刘金宪对后两章改稿。全书最后由刘金宪统稿。

本书的编写得到河北科技大学教务处、理学院及教学系同仁们的大力支持,得到中国标准出版社韩基新编审的热情指导,作者表示诚挚的感谢。限于作者学识水平,疏漏与错误在所难免,欢迎读者指正。

作 者

2006 年 6 月

目 录

第一章 随机事件及其概率	(1)
§ 1.1 随机现象和随机试验	(1)
1.1.1 随机现象	(1)
1.1.2 随机试验	(1)
§ 1.2 样本空间和随机事件	(2)
1.2.1 样本空间	(2)
1.2.2 随机事件	(3)
1.2.3 事件间的关系及运算	(3)
§ 1.3 频率与概率	(8)
1.3.1 频率	(8)
1.3.2 概率	(10)
§ 1.4 古典概型与几何概型	(13)
1.4.1 古典型概率	(13)
1.4.2 几何型概率	(17)
§ 1.5 条件概率	(18)
1.5.1 条件概率	(18)
1.5.2 乘法公式	(20)
1.5.3 全概率公式和贝叶斯公式	(21)
§ 1.6 随机事件的独立性	(24)
章末小结	(28)

习题一	(29)
第二章 随机变量及其分布	(36)
§ 2.1 随机变量 离散型随机变量	(36)
2.1.1 随机变量的概念	(36)
2.1.2 离散型随机变量及其分布律	(37)
2.1.3 常见离散型随机变量及其分布律	(39)
§ 2.2 随机变量的分布函数	(44)
§ 2.3 连续型随机变量及其分布	(47)
2.3.1 连续型随机变量及其概率密度	(47)
2.3.2 常见连续型随机变量及其分布	(50)
§ 2.4 随机变量的函数的分布	(56)
2.4.1 离散型随机变量的函数的分布	(56)
2.4.2 连续型随机变量的函数的分布	(57)
章末小结	(61)
习题二	(62)
第三章 多维随机变量及其分布	(69)
§ 3.1 二维随机变量及其分布	(69)
3.1.1 二维随机变量的分布函数	(69)
3.1.2 二维离散型随机变量	(70)
3.1.3 二维连续型随机变量	(72)
3.1.4 两个常用二维连续型分布	(74)
§ 3.2 边缘分布	(76)
3.2.1 边缘分布函数	(76)
3.2.2 边缘分布律	(77)
3.2.3 边缘概率密度	(79)
§ 3.3 条件分布	(81)
3.3.1 二维离散型随机变量的条件分布	(81)
3.3.2 连续型随机变量的条件分布	(83)
§ 3.4 随机变量的独立性	(86)
§ 3.5 多个随机变量的函数的分布	(88)

3.5.1	两个离散型随机变量的函数的分布	(88)
3.5.2	两个连续型随机变量的函数的分布	(90)
章末小结		(95)
习题三		(96)
第四章	随机变量的数字特征	(103)
§ 4.1	随机变量的数学期望	(103)
4.1.1	数学期望的概念	(103)
4.1.2	随机变量的函数的数学期望	(106)
4.1.3	数学期望的性质	(109)
§ 4.2	方差	(112)
4.2.1	方差的概念	(112)
4.2.2	方差的性质	(115)
§ 4.3	协方差及相关系数	(118)
§ 4.4	矩 协方差矩阵	(123)
章末小结		(126)
习题四		(127)
第五章	大数定律与中心极限定理	(133)
§ 5.1	大数定律	(133)
5.1.1	多个随机变量的算术平均值的稳定性	(133)
5.1.2	重复试验中事件发生频率的稳定性	(136)
§ 5.2	中心极限定理	(139)
5.2.1	中心极限定理的背景	(139)
5.2.2	独立同分布的中心极限定理	(140)
5.2.3	棣莫佛-拉普拉斯定理	(144)
5.2.4	李雅谱诺夫定理	(146)
章末小结		(148)
习题五		(149)
第六章	样本及抽样分布	(152)
§ 6.1	随机样本	(152)

6.1.1	随机样本的直观解释	(152)
6.1.2	随机样本的定义	(153)
6.1.3	理论分布与经验分布	(155)
§ 6.2	抽样分布	(159)
6.2.1	统计量的定义	(159)
6.2.2	常用统计量——样本矩	(160)
6.2.3	χ^2 统计量	(160)
6.2.4	t 统计量	(164)
6.2.5	F 统计量	(167)
6.2.6	正态总体的样本均值与样本方差的分布	(170)
章末小结		(176)
习题六		(177)

第七章 参数估计 (180)

§ 7.1	点估计	(180)
7.1.1	点估计问题的一般提法	(180)
7.1.2	矩估计法	(181)
7.1.3	最大似然估计法	(186)
§ 7.2	估计量优劣的评价标准	(196)
7.2.1	无偏性	(196)
7.2.2	有效性	(199)
7.2.3	相合性	(200)
§ 7.3	区间估计	(202)
7.3.1	区间估计的思想	(202)
7.3.2	置信区间的构造	(203)
§ 7.4	正态总体均值与方差的区间估计	(205)
7.4.1	单个正态总体的情况	(205)
7.4.2	两个正态总体的情况	(209)
§ 7.5	$(0-1)$ 分布参数的区间估计	(216)
§ 7.6	单侧置信区间	(218)
7.6.1	单侧置信区间的概念	(218)
7.6.2	单侧置信区间的构造	(219)

章末小结	(221)
习题七	(221)
第八章 假设检验	(229)
§ 8.1 假设检验的基本概念	(229)
8.1.1 假设检验的实际背景与问题的提法	(229)
8.1.2 假设检验的基本概念	(231)
8.1.3 假设检验的主要步骤	(234)
§ 8.2 正态总体均值的假设检验	(234)
8.2.1 单个正态总体均值的假设检验	(234)
8.2.2 两正态总体均值差的假设检验(t 检验法)	(237)
§ 8.3 正态总体方差的假设检验	(239)
8.3.1 单个正态总体方差的假设检验	(239)
8.3.2 两正态总体方差比的假设检验	(242)
§ 8.4 置信区间与假设检验之间的关系	(245)
§ 8.5 分布拟合检验	(249)
8.5.1 离散型总体的 χ^2 拟合检验	(249)
8.5.2 连续型总体的 χ^2 拟合检验	(253)
§ 8.6 秩和检验法	(259)
章末小结	(262)
习题八	(263)
第九章 回归分析与方差分析	(269)
§ 9.1 一元线性回归	(269)
9.1.1 回归分析的基本概念	(269)
9.1.2 一元线性回归模型	(270)
9.1.3 未知参数 a, b 的点估计——最小二乘法	(272)
9.1.4 残差的概念和误差方差 σ^2 的估计	(274)
9.1.5 回归效果的显著性检验	(275)
9.1.6 利用回归方程进行预测	(277)
§ 9.2 多元线性回归	(280)
§ 9.3 单因素试验的方差分析	(283)

9.3.1 问题的一般提法与数学模型	(284)
9.3.2 方差分析的具体步骤	(286)
§ 9.4 双因素试验的方差分析	(292)
9.4.1 双因素有交互作用的方差分析	(293)
9.4.2 双因素无交互作用的方差分析	(301)
章末小结	(305)
习题九	(307)
 习题参考答案	 (313)
 附表 1 常用概率分布表	 (334)
附表 2 标准正态分布的分布函数表	(336)
附表 3 t 分布分位点表	(337)
附表 4 χ^2 分布分位点表	(339)
附表 5 F 分布分位点表	(342)
附表 6 秩和检验表	(352)
附表 7 正态分布常用分位点表	(352)
附表 8 相关系数临界值 r_α 表	(353)
附表 9 泊松分布表	(354)

第一章

随机事件及其概率

§ 1.1 随机现象和随机试验

1.1.1 随机现象

在自然界和社会实践中存在两类现象. 一类是在一定条件下其结果具有确定性的现象, 例如, 同性电荷互相排斥; 在标准大气压下, 纯水加热到 100°C 必然会沸腾; $\sin x$ 的导数为 $\cos x$, 等等. 这类现象的共同特征是, 只要条件具备其结果便能确定. 这类现象称为确定性现象. 我们以前学过的微积分和线性代数所研究的都是这种确定性现象.

除了上面的这类确定性现象之外, 在自然界和社会实践中还存在另一类现象. 例如, 在相同条件下上抛一枚硬币, 落下时可能是正面朝上, 也可能是反面朝上; 射击运动员对同一目标进行射击, 其弹着点不尽相同; 从一批灯泡中任取一只, 其使用寿命是 $[0, +\infty)$ 中的某一个数, 但具体值事前不能确定. 这类现象的共同特征是, 在相同的条件下可以进行重复观测或试验, 所有可能发生的结果已知, 但事前不能预知究竟哪一个结果会出现. 这类现象称为随机现象. 虽然表面上这类现象杂乱无章, 然而, 人们经过长期的研究和多次重复观察或试验, 发现这类现象有其内在规律性. 例如, 多次重复抛一枚均匀硬币, 得到正面朝上和反面朝上的次数大致相同; 各个国家各个时期的人口统计资料显示, 新生婴儿中男婴和女婴的比例大约总是 $1:1$. 这种在大量重复实验或观察中所呈现出的固有规律性, 就是我们以后所说的统计规律性, 也正是概率论和数理统计所要研究和揭示的主要内容.

1.1.2 随机试验

在这里试验是一个含义广泛的术语, 它包括对自然现象的一次观测或一次实验.

如果一个试验具有以下特征：

(1) 试验可在相同的条件下重复进行；

(2) 试验的可能结果不唯一，但试验所有可能出现的结果在试验前已知；

(3) 每次试验只出现一个结果，究竟那一个结果出现在试验前未知，则称这种试验为随机试验，简称为试验。在本课程中所讨论的试验都是指这种试验。下面举几个随机试验的例子。

例 1 抛一枚硬币，观察正面 H 反面 T 出现的情况。

例 2 将一枚硬币连掷三次，观察正面 H 、反面 T 出现的情况。

例 3 将一枚硬币连掷三次，观察正面出现的次数。

例 4 从一批灯泡中任取一只，测试其使用寿命。

例 5 掷一颗骰子，观察其向上一面的点数。

例 6 记录某寻呼台一昼夜接到的呼叫次数。

例 7 向平面坐标系中投掷一点，观察落点的坐标。

由以上例子可以看到，随机试验是产生随机现象的过程，因而可以通过随机试验来研究随机现象的内在规律性。

§ 1.2 样本空间和随机事件

1.2.1 样本空间

对于随机试验，我们关心的是试验的结果。例如，掷一枚骰子，我们关心的是出现的点数；掷一次硬币，我们关心的是出现正面或出现反面；在对灯泡质量检验时，我们关心的是它的使用寿命。由以上试验可以看出，随机试验的结果具有不唯一性，我们把随机试验的每一个可能的结果称为一个样本点，所有样本点组成的集合称为样本空间，用 S 表示。

例 1 分别写出 § 1.1 中例 1~例 7 的样本空间 S 。

解 § 1.1 中的例 1, 例 2, ..., 例 7 的样本空间分别记为 $S_1, S_2, \dots, S_7$ ，则有

$$S_1 = \{H, T\},$$

$$S_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}.$$

$$S_3 = \{0, 1, 2, 3\}, \quad S_4 = \{t \mid t \geq 0\}, \quad S_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ S_6 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad S_7 = \{(x, y) \mid x, y \text{ 为实数}\}. \quad \square$$

值得注意的是,样本空间的元素是由试验目的所确定的.例如,在 § 1.1 例 2 和例 3 中同是将一枚硬币连掷三次,由于试验的目的不一样,其样本空间也不一样.

1.2.2 随机事件

在一次随机试验中,人们常关心满足一定条件的具体结果,例如掷一枚骰子,“出现的点数大于 3”,“出现的点数小于 4”等等,这些结果在一次试验中可能发生也可能不发生,具有随机性.我们把在一次试验中可能发生也可能不发生的结果称为随机事件,简称为事件.

随机事件是由样本空间的某些样本点构成的.例如,掷一枚骰子,“出现的点数大于 3”,可表示为 $\{4, 5, 6\}$;“出现的点数小于 4”,可表示为 $\{1, 2, 3\}$.从集合的观点来看,它们都是样本空间的子集.反过来,样本空间的任何一个真子集,在一次试验中都具有可能发生也可能不发生的特性,从而随机事件也可以直观地理解为样本空间的一个子集.

有的随机事件是可以分解的.如 § 1.1 例 5 中,事件“出现的点数大于 3”,可分解为“出现的点数是 4”、“出现的点数是 5”和“出现的点数是 6”三个事件,这种可分解的事件称为复合事件.有的事件不可再分,如“出现的点数等于 i ”($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$),这样的事件称为基本事件.

复合事件是由基本事件组成的,在一次试验中,事件 A 包含的任何一个基本事件发生,则称事件 A 发生.例如,“出现的点数等于 i ”, $i=4, 5, 6$.其中任何一个事件发生都将导致事件“出现的点数大于 3”发生.

空集 $\emptyset$ 和样本空间 S 都是样本空间 S 的子集,在每次试验中 $\emptyset$ 必不发生,称 $\emptyset$ 为不可能事件; S 必然发生,称 S 为必然事件.两者都不具备随机性,为叙述方便也把它们包括在随机事件中.

1.2.3 事件间的关系及运算

一个样本空间中有许多事件,通过研究事件间的关系和运算,使我们能够用简单事件来表示复杂的事件,进而用简单事件的概率去研究复杂事件的概率.

(i) **子事件** 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即属于 A 的样

本点一定属于 B , 称事件 B 包含 事件 A , 也称事件 A 为事件 B 的子事件, 用集合表示自然是 $A \subset B$, 如图 1-1.

事件的包含关系具有如下性质:

- (1) 反身性: $A \subset A$.
- (2) 传递性: 若 $A \subset B, B \subset C$, 则有 $A \subset C$.
- (3) 对任何事件 A 都有: $\emptyset \subset A \subset S$.

(ii) **事件的相等** 如果事件 B 包含事件 A , 且事件 A 也包含事件 B , 则称事件 A 与 B 相等, 用集合表示即为 $A = B$.

显然, 事件的相等具有如下性质:

- (1) 反身性 $A = A$.
- (2) 传递性 若 $A = B, B = C$, 则有 $A = C$.
- (3) 对称性 若 $A = B$, 则 $B = A$.

(iii) **和事件** “事件 A 与事件 B 至少有一个发生”也是一个事件, 称此事件为事件 A 与事件 B 的和事件, 即当 A 与 B 只要有一个发生(或同时发生)时, 其和事件发生, 如果他们两个都不发生, 其和事件也不发生. 因此 A 与 B 的和事件就是把 A 与 B 所包含的基本事件并在一起构成的事件, 用集合表示即为 $A \cup B$, 如图 1-2 中的阴影部分即为 A 与 B 的和事件 $A \cup B$.

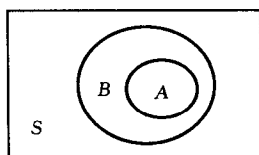


图 1-1

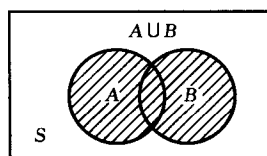


图 1-2

利用集合的运算性质可知, 和事件具有如下性质:

- (1) 若 $A \subset B$, 则 $A \cup B = B$; 若 $B \subset A$, 则 $A \cup B = A$.
- (2) $A \subset A \cup B; B \subset A \cup B$.
- (3) 若 $A = B$, 则 $A \cup B = A; A \cup B = B$.

“ n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 至少有一个发生”这一事件称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件, 用集合表示即为

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

简记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

“可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 至少有一个发生”这一事件称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和事件, 用集合表示即为

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots,$$

简记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

例2 掷一颗骰子, 观察其向上一面的点数. 其样本空间 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 设 $A =$ “出现奇数点”, $B =$ “出现点数小于 3” 则 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2\}$, 事件 A 与事件 B 的和事件 $C = \{1, 2, 3, 5\}$. $\square$

(iv) **积事件** “事件 A 与事件 B 同时发生”也是一个事件, 称此事件为事件 A 与事件 B 的积事件. 因此 A 与 B 的积事件就是它们两个共有的基本事件构成的事件, 用集合表示即为 $A \cap B$ 或 AB . 如图 1-3 中的阴影部分, 即为 A 与 B 的积事件 $A \cap B$.

积事件具有如下性质:

(1) 若 $A \subset B$, 则 $A \cap B = A$; 若 $B \subset A$, 则 $A \cap B = B$.

(2) $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$.

(3) 若 $A = B$, 则 $A \cap B = A$, $A \cap B = B$.

“ n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生”这一事件称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积事件, 用集合表示即为

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \text{ (或 } A_1 A_2 \dots A_n \text{),}$$

简记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ (或 $\prod_{i=1}^n A_i$).

“可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 同时发生”这一事件称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的积事件, 用集合表示即为

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots \text{ (或 } A_1 A_2 \dots A_n \dots \text{),}$$

简记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ (或 $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$).

(v) **互不相容事件** 如果事件 A 与事件 B 不可能同时发生, 即两者不共有任何基本事件, 则称事件 A 与事件 B 互不相容 或 互斥. 用集合表示即为 $A \cap B = \emptyset$ 或 $AB = \emptyset$, 如图 1-4.

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意两个事件都互不相容, 即

$$A_i A_j = \emptyset \quad (1 \leq i < j \leq n),$$

则称 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是互不相容的或互斥的.

显然, 任意一个随机试验的所有基本事件都是互斥事件, 并且不可能

事件与任何事件都互斥。

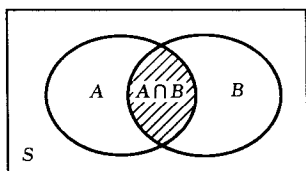


图 1-3

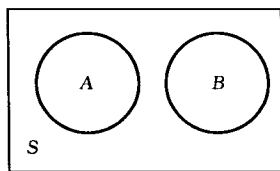


图 1-4

(vi) **对立事件** 如果事件 A 与事件 B 满足 $A \cap B = \emptyset, A \cup B = S$, 则称事件 B 是事件 A 的逆事件或对立事件, 记为 $B = \bar{A}$. 显然, 若 B 是 A 的逆事件, 则 A 也是 B 的逆事件, 所以也称对立事件 A 与 B 是互逆事件, 如图 1-5.

对立事件满足如下运算律:

- (1) $\bar{\bar{A}} = A, A \cup \bar{A} = S, A \cap \bar{A} = \emptyset$;
- (2) $A \subset B$ 等价于 $\bar{B} \subset \bar{A}$;
- (3) $\overline{\emptyset} = S, \bar{S} = \emptyset$.

需要注意的是, 若两事件对立, 则一定互斥; 反之未必. 即若两事件互斥, 不一定对立. 如 § 1.1 例 5 中对于事件 $A = \{1, 3, 5\}$, 事件 $B = \{2, 4\}$, 则 A 与 B 互斥, 但不对立.

(vii) **差事件** “事件 A 发生而事件 B 不发生”也是一个事件, 称为事件 A 与事件 B 的差事件. 它是由属于 A 但不属于 B 的基本事件组成的集合, 因此差事件对应的集合表示为 $A - B$, 如图 1-6.

易知: $A - B = A - AB$ 或 $A - B = A\bar{B}$, $A - B \subset A$.

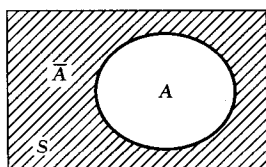


图 1-5

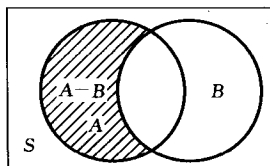


图 1-6

例 3 若 A, B, C 是三个事件, 则

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生可以表示为: $A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A - B - C$ 或 $A - (B \cup C)$;

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生可以表示为: $AB\bar{C}$ 或 $AB - C$ 或 $AB - ABC$;