高等学校工程数学教材

概率论与数理统计

河北科技大学数学系 编

中国标准出版社

高等学校工程数学教材

概率论与数理统计

河北科技大学数学系　编

中国标准出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/河北科技大学数学系编．—北京：中国标准出版社，2006
高等学校教材
ISBN 7-5066-4161-5

Ⅰ．概…　Ⅱ．河…　Ⅲ．①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 066696 号

中国标准出版社出版发行
北京复兴门外三里河北街 16 号
邮政编码：100045
网址 www.bzcbs.com
电话：68523946　68517548
中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷
各地新华书店经销

*

开本 880×1230　1/32　印张 11.5　字数 360 千字
2006 年 8 月第一版　2006 年 8 月第一次印刷

*

定价 20.00 元

前言

本书是为非数学专业的大学生编写的。知识内容的深广度按教育部“工科高校概率统计课程教学基本要求”控制，同时也参考了 2006 年全国研究生招生考试大纲。书中具体内容包括：概率论的基本概念，随机变量及其分布，随机变量的数字特征，极限定理，参数估计，假设检验，回归分析与方差分析等。各章配有大量的例题与习题，其中不少是近几年研究生招生考试题目。书后附有习题参考答案。各章习题均分为 A、B 两类，A 组题目与正常教学要求相适应，B 组题目稍难供学有余力者选作。

随机性数学中的概念、思维方式与确定性数学（如高等数学、线性代数）中有较大差别，学生初学时多有不适应。为了克服这一困难，本书对于新知识点往往先从实际例子入手，在直观的应用背景中逐步地、自然地引出数学概念，使抽象概念尽量具体化。还特别注意把高难度的知识台阶分解拆细，以使学习过程更自然顺畅。在不失严谨性的前提下，较多采用通俗直白的语言叙述，方便学生阅读理解。学生在学习过程中，也要有意识地将抽象的数学概念联系现实问题的直观

背景去理解去把握。

本书由河北科技大学数学系组织编写，刘金宪担任主编，江卫华、郭彦平、李秀敏任副主编。编写人员有刘金宪、江卫华、郭彦平、李秀敏、仇计清、索秀云、李法朝、刘秀君、苏连青、王群等。郭彦平对前七章改稿，刘金宪对后两章改稿。全书最后由刘金宪统稿。

本书的编写得到河北科技大学教务处、理学院及教学系同仁们的大力支持，得到中国标准出版社韩基新编审的热情指导，作者表示诚挚的感谢。限于作者学识水平，疏漏与错误在所难免，欢迎读者指正。

作　　者

2006 年 6 月

目录

第一章 随机事件及其概率

§1.1 随机现象和随机试验

1.1.1 随机现象

在自然界和社会实践中存在两类现象. 一类是在一定条件下其结果具有确定性的现象,例如,同性电荷互相排斥;在标准大气压下,纯水加热到100℃必然会沸腾;$\sin x$ 的导数为 $\cos x$,等等. 这类现象的共同特征是,只要条件具备其结果便能确定. 这类现象称为确定性现象. 我们以前学过的微积分和线性代数所研究的都是这种确定性现象.

除了上面的这类确定性现象之外,在自然界和社会实践中还存在另一类现象. 例如,在相同条件下上抛一枚硬币,落下时可能是正面朝上,也可能是反面朝上;射击运动员对同一目标进行射击,其弹着点不尽相同;从一批灯泡中任取一只,其使用寿命是$[0,+\infty)$中的某一个数,但具体值事前不能确定. 这类现象的共同特征是,在相同的条件下可以进行重复观测或试验,所有可能发生的结果已知,但事前不能预知究竟哪一个结果会出现. 这类现象称为随机现象. 虽然表面上这类现象杂乱无章,然而,人们经过长期的研究和多次重复观察或试验,发现这类现象有其内在规律性. 例如,多次重复抛一枚均匀硬币,得到正面朝上和反面朝上的次数大致相同;各个国家各个时期的人口统计资料显示,新生婴儿中男婴和女婴的比例大约总是1∶1 . 这种在大量重复实验或观察中所呈现出的固有规律性,就是我们以后所说的统计规律性,也正是概率论和数理统计所要研究和揭示的主要内容.

1.1.2 随机试验

在这里试验是一个含义广泛的术语,它包括对自然现象的一次观测或一次实验.

如果一个试验具有以下特征：

(1) 试验可在相同的条件下重复进行；

(2) 试验的可能结果不唯一，但试验所有可能出现的结果在试验前已知；

(3) 每次试验只出现一个结果，究竟那一个结果出现在试验前未知，则称这种试验为随机试验，简称为试验. 在本课程中所讨论的试验都是指这种试验. 下面举几个随机试验的例子.

例 1 抛一枚硬币，观察正面 H 反面 T 出现的情况.

例 2 将一枚硬币连掷三次，观察正面 H、反面 T 出现的情况.

例 3 将一枚硬币连掷三次，观察正面出现的次数.

例 4 从一批灯泡中任取一只，测试其使用寿命.

例 5 掷一颗骰子，观察其向上一面的点数.

例 6 记录某寻呼台一昼夜接到的呼叫次数.

例 7 向平面坐标系中投掷一点，观察落点的坐标.

由以上例子可以看到，随机试验是产生随机现象的过程，因而可以通过随机试验来研究随机现象的内在规律性.

§1.2 样本空间和随机事件

1.2.1 样本空间

对于随机试验，我们关心的是试验的结果. 例如，掷一枚骰子，我们关心的是出现的点数；掷一次硬币，我们关心的是出现正面或出现反面；在对灯泡质量检验时，我们关心的是它的使用寿命. 由以上试验可以看出，随机试验的结果具有不唯一性，我们把随机试验的每一个可能的结果称为一个样本点，所有样本点组成的集合称为样本空间，用 S 表示.

例 1 分别写出 §1.1 中例 1～例 7 的样本空间 S.

解 §1.1 中的例 1，例 2，…，例 7 的样本空间分别记为 S_1，S_2，…，S_7，则有

$S_1 = \{H, T\}$,

$S_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$.

$S_3=\{0,1,2,3\}$，　$S_4=\{t \mid t\geqslant 0\}$，　$S_5=\{1,2,3,4,5,6\}$，

$S_6=\{0,1,2,3,\ldots\}$，　$S_7=\{(x,y) \mid x,y$ 为实数$\}$. □

值得注意的是，样本空间的元素是由试验目的所确定的. 例如，在§1.1 例 2 和例 3 中同是将一枚硬币连掷三次，由于试验的目的不一样，其样本空间也不一样.

1.2.2 随机事件

在一次随机试验中，人们常关心满足一定条件的具体结果，例如掷一枚骰子，"出现的点数大于 3"，"出现的点数小于 4"等等，这些结果在一次试验中可能发生也可能不发生，具有随机性. 我们把在一次试验中可能发生也可能不发生的结果称为随机事件，简称为事件.

随机事件是由样本空间的某些样本点构成的. 例如，掷一枚骰子，"出现的点数大于 3"，可表示为$\{4,5,6\}$；"出现的点数小于 4"，可表示为$\{1,2,3\}$. 从集合的观点来看，它们都是样本空间的子集. 反过来，样本空间的任何一个真子集，在一次试验中都具有可能发生也可能不发生的特性，从而随机事件也可以直观地理解为样本空间的一个子集.

有的随机事件是可以分解的. 如§1.1 例 5 中，事件"出现的点数大于 3"，可分解为"出现的点数是 4"、"出现的点数是 5"和"出现的点数是 6"三个事件，这种可分解的事件称为复合事件. 有的事件不可再分，如"出现的点数等于 i"($i=1,2,3,4,5,6$)，这样的事件称为基本事件.

复合事件是由基本事件组成的，在一次试验中，事件 A 包含的任何一个基本事件发生，则称事件 A 发生. 例如，"出现的点数等于 i"，$i=4,5,6$. 其中任何一个事件发生都将导致事件"出现的点数大于 3"发生.

空集 $\varnothing$ 和样本空间 S 都是样本空间 S 的子集，在每次试验中 $\varnothing$ 必不发生，称 $\varnothing$ 为不可能事件；S 必然发生，称 S 为必然事件. 两者都不具备随机性，为叙述方便也把它们包括在随机事件中.

1.2.3 事件间的关系及运算

一个样本空间中有许多事件，通过研究事件间的关系和运算，使我们能够用简单事件来表示复杂的事件，进而用简单事件的概率去研究复杂事件的概率.

(i) **子事件**　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即属于 A 的样

本点一定属于 B，称事件 B 包含事件 A，也称事件 A 为事件 B 的子事件，用集合表示自然是 $A\subset B$，如图 1-1..

事件的包含关系具有如下性质：

(1) 反身性：$A\subset A$.

(2) 传递性：若 $A\subset B$，$B\subset C$，则有 $A\subset C$.

(3) 对任何事件 A 都有：$\varnothing\subset A\subset S$.

(ii) 事件的相等 如果事件 B 包含事件 A，且事件 A 也包含事件 B，则称事件 A 与 B 相等，用集合表示即为 $A=B$.

显然，事件的相等具有如下性质：

(1) 反身性 $A=A$.

(2) 传递性 若 $A=B$，$B=C$，则有 $A=C$.

(3) 对称性 若 $A=B$，则 $B=A$.

(iii) 和事件 “事件 A 与事件 B 至少有一个发生”也是一个事件，称此事件为事件 A 与事件 B 的和事件，即当 A 与 B 只要有一个发生(或同时发生)时，其和事件发生，如果他们两个都不发生，其和事件也不发生. 因此 A 与 B 的和事件就是把 A 与 B 所包含的基本事件并在一起构成的事件，用集合表示即为 $A\cup B$，如图 1-2 中的阴影部分即为 A 与 B 的和事件 $A\cup B$.

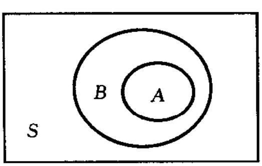

图 1-1

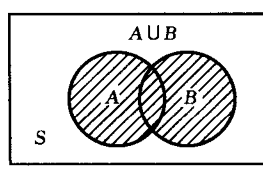

图 1-2

利用集合的运算性质可知，和事件具有如下性质：

(1) 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$ ；若 $B\subset A$ ，则 $A\cup B=A$.

(2) $A\subset A\cup B$；$B\subset A\cup B$.

(3) 若 $A=B$，则 $A\cup B=A$；$A\cup B=B$.

“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生”这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，用集合表示即为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n,$$

简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

“可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生”这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和事件，用集合表示即为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots,$$

简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

例 2 掷一颗骰子，观察其向上一面的点数. 其样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，设 $A=$“出现奇数点”，$B=$“出现点数小于 3”则 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2\}$，事件 A 与事件 B 的和事件 $C=\{1,2,3,5\}$. □

(iv) 积事件 “事件 A 与事件 B 同时发生”也是一个事件，称此事件为事件 A 与事件 B 的积事件. 因此 A 与 B 的积事件就是它们两个共有的基本事件构成的事件，用集合表示即为 $A\cap B$ 或 AB. 如图 1-3 中的阴影部分，即为 A 与 B 的积事件 $A\cap B$.

积事件具有如下性质：

(1) 若 $A\subset B$，则 $A\cap B=A$；若 $B\subset A$，则 $A\cap B=B$.

(2) $A\cap B\subset A$ ；$A\cap B\subset B$.

(3) 若 $A=B$ ，则 $A\cap B=A$ ，$A\cap B=B$.

“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，用集合表示即为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n(\text{或 } A_1A_2\cdots A_n),$$

简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$（或 $\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$）.

“可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生” 这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件，用集合表示即为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots(\text{或 } A_1A_2\cdots A_n\cdots),$$

简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$（或 $\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i$）.

(v) 互不相容事件 如果事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即两者不共有任何基本事件，则称事件 A 与事件 B 互不相容或互斥. 用集合表示即为 $A\cap B=\varnothing$ 或 $AB=\varnothing$，如图 1-4.

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件都互不相容，即

$$A_iA_j=\varnothing\quad(1\leqslant i<j\leqslant n),$$

则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互不相容的或互斥的.

显然，任意一个随机试验的所有基本事件都是互斥事件，并且不可能

事件与任何事件都互斥.

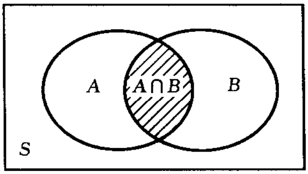

图 1-3

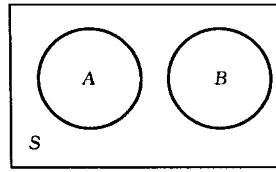

图 1-4

(vi) 对立事件 如果事件 A 与事件 B 满足 $A\cap B=\varnothing, A\cup B=S$,则称事件 B 是事件 A 的逆事件或对立事件,记为 $B=\overline{A}$. 显然,若 B 是 A 的逆事件,则 A 也是 B 的逆事件,所以也称对立事件 A 与 B 是互逆事件,如图 1-5 .

对立事件满足如下运算律:

(1) $\overline{\overline{A}}=A$,$A\cup\overline{A}=S$,$A\cap\overline{A}=\varnothing$;

(2) $A\subset B$ 等价于 $\overline{B}\subset\overline{A}$;

(3) $\overline{\varnothing}=S$,$\overline{S}=\varnothing$.

需要注意的是 ,若两事件对立,则一定互斥;反之未必. 即若两事件互斥,不一定对立. 如 § 1. 1 例 5 中对于事件 $A=\{1,3,5\}$,事件 $B=\{2,4\}$,则 A 与 B 互斥,但不对立.

(vii) 差事件 "事件 A 发生而事件 B 不发生"也是一个事件,称为事件 A 与事件 B 的差事件. 它是由属于 A 但不属于 B 的基本事件组成的集合,因此差事件对应的集合表示为 $A-B$,如图 1-6.

易知:$A-B=A-AB$ 或 $A-B=A\overline{B}$, $A-B\subset A$.

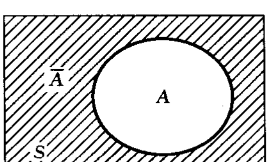

图 1-5

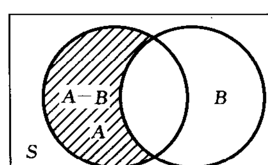

图 1-6

例 3 若 A,B,C 是三个事件,则

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生可以表示为:$A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$;

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生可以表示为:$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$;