

TONGBU DAOXUE YU  
ZONGHE LIANXI

# 同步导学 与综合练习

数 学

第二册

(中等职业教育辅导用书)

基础版

中国档案出版社

# 前 言

为了帮助广大接受中等职业教育的莘莘学子更深入地理解教材宗旨,更扎实地巩固基础知识,更有效地复习课堂所学知识,本套《同步导学与综合练习》在众多师生的期待中终于应运而生。在编写过程中,我们一贯坚持“请一线教师,树一流品质”的原则,真正突出了教材的针对性、实用性和权威性。本书依照(语文版)数学(基础版)第二册教材编写,其内容由五大板块精心构造而成,特点如下:

**课前学习导引** 突出“导引”作用,高屋建瓴,统率全篇,使学生更全面、更明确地把握将要学习的内容,做到心中有数,有备而学。

**重点难点导析** 突出“导析”作用,重点难点被一语道破,能够使学生在过程中做到有的放矢,合理安排学习时间。

**典型例题剖析** 突出“剖析”作用,将抽象的重点难点具体化,并进行深入细致的解析,一一攻破,注重传授解题方法和技巧,有助于培养学生灵活思维的能力。

**同步创新测练** 突出“测练”作用,加强基础知识的巩固,兼顾提高与创新,对学生高效地进行课后复习大有裨益。

**单元过关综合测试** 突出“测试”作用,模拟考试结构,将本单元重点难点融汇集合,经此一练,可有效检验学习效果,总结不足。

五大板块相辅相成,所谓“温故而知新”。本套图书的要义就在于给学生提供一个“温故、知新”的平台,以取得事半功倍的学习效果。

相信本套图书将作为学生的良师益友,助学习一臂之力。

由于时间紧迫,书中不足之处在所难免,恳请广大读者批评指正。

编 者

## 目 录

## 第五章 任意角的三角函数

|                          |      |                           |      |
|--------------------------|------|---------------------------|------|
| 一 任意角的三角函数 .....         | (1)  | 同步创新测练 .....              | (14) |
| § 5.1 角的概念的推广 .....      | (1)  | § 5.7 和角公式 .....          | (14) |
| 课前学习导引 .....             | (1)  | 课前学习导引 .....              | (14) |
| 重点难点导析 .....             | (1)  | 重点难点导析 .....              | (14) |
| 典型例题剖析 .....             | (2)  | 典型例题剖析 .....              | (15) |
| 同步创新测练 .....             | (3)  | 同步创新测练 .....              | (16) |
| § 5.2 弧度制 .....          | (4)  | § 5.8 倍角公式 .....          | (16) |
| 课前学习导引 .....             | (4)  | 课前学习导引 .....              | (16) |
| 重点难点导析 .....             | (4)  | 重点难点导析 .....              | (16) |
| 典型例题剖析 .....             | (5)  | 典型例题剖析 .....              | (17) |
| 同步创新测练 .....             | (6)  | 同步创新测练 .....              | (18) |
| § 5.3 任意角的三角函数 .....     | (6)  | 三 三角函数的图像和性质 .....        | (18) |
| 课前学习导引 .....             | (6)  | § 5.9 正弦函数与余弦函数的图像 .....  | (18) |
| 重点难点导析 .....             | (6)  | 课前学习导引 .....              | (18) |
| 典型例题剖析 .....             | (7)  | 重点难点导析 .....              | (19) |
| 同步创新测练 .....             | (8)  | 典型例题剖析 .....              | (19) |
| § 5.4 同角三角函数的基本关系式 ..... | (8)  | 同步创新测练 .....              | (20) |
| 课前学习导引 .....             | (8)  | § 5.10 正弦函数与余弦函数的性质 ..... | (20) |
| 重点难点导析 .....             | (9)  | 课前学习导引 .....              | (20) |
| 典型例题剖析 .....             | (9)  | 重点难点导析 .....              | (20) |
| 同步创新测练 .....             | (10) | 典型例题剖析 .....              | (20) |
| 二 三角函数公式 .....           | (10) | 同步创新测练 .....              | (21) |
| § 5.5 三角函数的简化公式 .....    | (10) | § 5.11 正弦型函数的图像 .....     | (22) |
| 课前学习导引 .....             | (10) | 课前学习导引 .....              | (22) |
| 重点难点导析 .....             | (10) | 重点难点导析 .....              | (22) |
| 典型例题剖析 .....             | (11) | 典型例题剖析 .....              | (22) |
| 同步创新测练 .....             | (11) | 同步创新测练 .....              | (23) |
| § 5.6 已知三角函数值,求角 .....   | (12) | § 5.12 正切函数的图像和性质 .....   | (24) |
| 课前学习导引 .....             | (12) | 课前学习导引 .....              | (24) |
| 重点难点导析 .....             | (12) |                           |      |
| 典型例题剖析 .....             | (13) |                           |      |



|                          |      |                       |      |
|--------------------------|------|-----------------------|------|
| 重点难点导析 .....             | (24) | 同步创新测练 .....          | (29) |
| 典型例题剖析 .....             | (25) | § 5.15 三角形的面积公式 ..... | (29) |
| 同步创新测练 .....             | (26) | 课前学习导引 .....          | (29) |
| <b>四 正弦定理和余弦定理</b> ..... | (26) | 重点难点导析 .....          | (29) |
| § 5.13 正弦定理及其应用 .....    | (26) | 典型例题剖析 .....          | (29) |
| 课前学习导引 .....             | (26) | 同步创新测练 .....          | (30) |
| 重点难点导析 .....             | (26) | § 5.16 三角函数的应用 .....  | (30) |
| 典型例题剖析 .....             | (27) | 课前学习导引 .....          | (30) |
| 同步创新测练 .....             | (27) | 重点难点导析 .....          | (30) |
| § 5.14 余弦定理及其应用 .....    | (27) | 典型例题剖析 .....          | (32) |
| 课前学习导引 .....             | (27) | 同步创新测练 .....          | (32) |
| 重点难点导析 .....             | (28) | <b>单元过关综合测试</b> ..... | (33) |
| 典型例题剖析 .....             | (28) |                       |      |

## 第六章 平面向量

### 一 向量的几何形式及其线性运算

|                        |      |
|------------------------|------|
| .....                  | (35) |
| § 6.1 平面向量 .....       | (35) |
| 课前学习导引 .....           | (35) |
| 重点难点导析 .....           | (35) |
| 典型例题剖析 .....           | (35) |
| 同步创新测练 .....           | (36) |
| § 6.2 向量的加法与减法运算 ..... | (37) |
| 课前学习导引 .....           | (37) |
| 重点难点导析 .....           | (37) |
| 典型例题剖析 .....           | (38) |
| 同步创新测练 .....           | (39) |
| § 6.3 数乘向量 .....       | (40) |
| 课前学习导引 .....           | (40) |
| 重点难点导析 .....           | (40) |
| 典型例题剖析 .....           | (40) |
| 同步创新测练 .....           | (41) |
| § 6.4 向量平行的条件 .....    | (42) |
| 课前学习导引 .....           | (42) |
| 重点难点导析 .....           | (42) |
| 典型例题剖析 .....           | (42) |
| 同步创新测练 .....           | (43) |

### 二 向量的坐标形式及其线性运算

|                             |      |
|-----------------------------|------|
| .....                       | (44) |
| § 6.5 数轴上向量的坐标及其运算 .....    | (44) |
| .....                       | (44) |
| 课前学习导引 .....                | (44) |
| 重点难点导析 .....                | (44) |
| 典型例题剖析 .....                | (44) |
| 同步创新测练 .....                | (45) |
| § 6.6 向量的直角坐标及线性运算 .....    | (45) |
| .....                       | (45) |
| 课前学习导引 .....                | (45) |
| 重点难点导析 .....                | (45) |
| 典型例题剖析 .....                | (46) |
| 同步创新测练 .....                | (47) |
| § 6.7 平移公式和中点公式 .....       | (47) |
| 课前学习导引 .....                | (47) |
| 重点难点导析 .....                | (47) |
| 典型例题剖析 .....                | (48) |
| 同步创新测练 .....                | (48) |
| <b>三 向量的数量积及其运算法则</b> ..... | (49) |
| § 6.8 向量的数量积 .....          | (49) |
| 课前学习导引 .....                | (49) |



|                     |      |                |      |
|---------------------|------|----------------|------|
| 重点难点导析 .....        | (49) | 重点难点导析 .....   | (51) |
| 典型例题剖析 .....        | (50) | 典型例题剖析 .....   | (51) |
| 同步创新测练 .....        | (50) | 同步创新测练 .....   | (52) |
| § 6.9 向量数量积的坐标运算 .. | (51) | 单元过关综合测试 ..... | (52) |
| 课前学习导引 .....        | (51) |                |      |

## 第七章 数列、数列极限

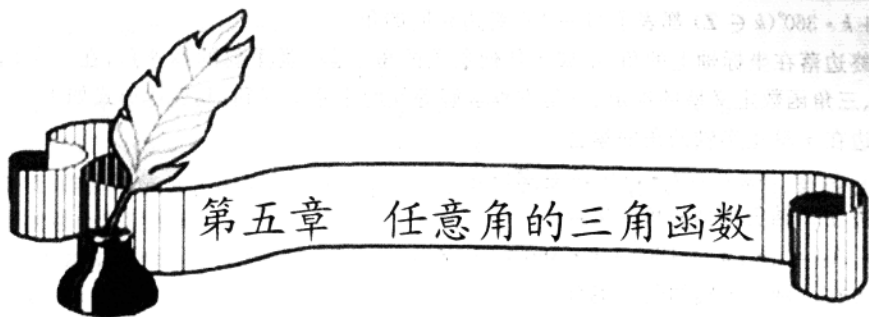
|                          |      |                          |      |
|--------------------------|------|--------------------------|------|
| 一 数列 .....               | (54) | 课前学习导引 .....             | (62) |
| § 7.1 数列 .....           | (54) | 重点难点导析 .....             | (63) |
| 课前学习导引 .....             | (54) | 典型例题剖析 .....             | (63) |
| 重点难点导析 .....             | (54) | 同步创新测练 .....             | (63) |
| 典型例题剖析 .....             | (55) | § 7.7 等比数列前 $n$ 项和 ..... | (64) |
| 同步创新测练 .....             | (55) | 课前学习导引 .....             | (64) |
| § 7.2 等差数列及其通项公式 ..      | (56) | 重点难点导析 .....             | (64) |
| 课前学习导引 .....             | (56) | 典型例题剖析 .....             | (64) |
| 重点难点导析 .....             | (56) | 同步创新测练 .....             | (65) |
| 典型例题剖析 .....             | (56) | § 7.8 数列的应用 .....        | (65) |
| 同步创新测练 .....             | (57) | 课前学习导引 .....             | (65) |
| § 7.3 等差中项 .....         | (57) | 重点难点导析 .....             | (66) |
| 课前学习导引 .....             | (57) | 典型例题剖析 .....             | (66) |
| 重点难点导析 .....             | (58) | 同步创新测练 .....             | (66) |
| 典型例题剖析 .....             | (58) | 二 数列极限 .....             | (67) |
| 同步创新测练 .....             | (59) | § 7.9 数列极限的描述性定义 ..      | (67) |
| § 7.4 等差数列前 $n$ 项和 ..... | (59) | 课前学习导引 .....             | (67) |
| 课前学习导引 .....             | (59) | 重点难点导析 .....             | (67) |
| 重点难点导析 .....             | (59) | 典型例题剖析 .....             | (68) |
| 典型例题剖析 .....             | (59) | 同步创新测练 .....             | (68) |
| 同步创新测练 .....             | (60) | § 7.10 数列极限的四则运算 .....   | (69) |
| § 7.5 等比数列及其通项公式 ..      | (61) | 课前学习导引 .....             | (69) |
| 课前学习导引 .....             | (61) | 重点难点导析 .....             | (69) |
| 重点难点导析 .....             | (61) | 典型例题剖析 .....             | (69) |
| 典型例题剖析 .....             | (61) | 同步创新测练 .....             | (70) |
| 同步创新测练 .....             | (62) | 单元过关综合测试 .....           | (71) |
| § 7.6 等比中项 .....         | (62) |                          |      |



## 第八章 复数

|                          |      |                        |      |
|--------------------------|------|------------------------|------|
| 一 复数的概念 .....            | (73) | 课前学习导引 .....           | (81) |
| § 8.1 虚数单位 $i$ 的定义 ..... | (73) | 重点难点导析 .....           | (81) |
| 课前学习导引 .....             | (73) | 典型例题剖析 .....           | (82) |
| 重点难点导析 .....             | (73) | 同步创新测练 .....           | (83) |
| 典型例题剖析 .....             | (74) | § 8.6 实系数一元二次方程在复数     |      |
| 同步创新测练 .....             | (74) | 范围内的解 .....            | (83) |
| § 8.2 复数的有关概念 .....      | (74) | 课前学习导引 .....           | (83) |
| 课前学习导引 .....             | (74) | 重点难点导析 .....           | (84) |
| 重点难点导析 .....             | (75) | 典型例题剖析 .....           | (84) |
| 典型例题剖析 .....             | (75) | 同步创新测练 .....           | (84) |
| 同步创新测练 .....             | (76) | 三 复数的三角形式 .....        | (85) |
| § 8.3 复数的向量表示 .....      | (76) | § 8.7 复数的三角形式 .....    | (85) |
| 课前学习导引 .....             | (76) | 课前学习导引 .....           | (85) |
| 重点难点导析 .....             | (77) | 重点难点导析 .....           | (85) |
| 典型例题剖析 .....             | (78) | 典型例题剖析 .....           | (86) |
| 同步创新测练 .....             | (78) | 同步创新测练 .....           | (87) |
| 二 复数的运算 .....            | (79) | § 8.8 复数的三角形式的运算 ..... | (88) |
| § 8.4 复数的加法和减法 .....     | (79) | 课前学习导引 .....           | (88) |
| 课前学习导引 .....             | (79) | 重点难点导析 .....           | (88) |
| 重点难点导析 .....             | (79) | 典型例题剖析 .....           | (88) |
| 典型例题剖析 .....             | (80) | 同步创新测练 .....           | (89) |
| 同步创新测练 .....             | (81) | 单元过关综合测试 .....         | (90) |
| § 8.5 复数的乘法和除法 .....     | (81) | 参考答案 .....             | (92) |





## 一 任意角的三角函数

### § 5.1 角的概念的推广



#### 课前学习导引

1. 正确理解并区分角、正角、负角、零角的概念.
2. 理解掌握某角属于第几象限并能作出相应的判断.
3. 会表示终边相同的角.



#### 重点难点导析

##### 1. 角的概念及其推广

角是三角函数中的基础性概念,其定义为:在平面内,一条射线绕它的端点旋转而成的图形.如果考虑旋转的方向,则有正负角之分.习惯上,我们规定,按逆时针方向旋转而成的角叫作正角;按顺时针方向旋转而成的角叫作负角.当射线没有旋转时,我们也把它看成一个角,称其为零角.

2. 为了统一研究所有的角,我们在平面上建立一个直角坐标系  $Oxy$ ,把所有的顶点都放在原点  $O$  上,让所有的角的始边与  $x$  轴正半轴重合,这时一个角的终边落在第几象限就说这个角是第几象限的角(或这个角属于第几象限).

##### 3. 终边相同的角的表示方法

有相同的始边和终边的角,叫作终边相同的角.对于任意角  $\alpha$ ,有无限多个角与其终边相同,用集合可以表示为:

$$\{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

相应地,若  $\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$ ,那么  $\alpha$  与  $\beta$  就是终边相同的角.

值得注意的是,与  $\alpha$  终边相同的角的表达式并不唯一,例如  $-45^\circ + k \cdot 360^\circ, 315^\circ + k \cdot 360^\circ$ ,



$-405^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z})$  都表示与  $-45^\circ$  终边相同的角.

4. 终边落在坐标轴上的角(不属于任何象限的角)是一类重要的特殊角,在三角函数值的计算、三角函数定义域的确定、三角方程求解等问题中经常遇到,其表达形式如下:

终边在  $x$  轴正半轴的角的集合

$$A_1 = \{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\};$$

终边在  $x$  轴负半轴的角的集合

$$A_2 = \{\alpha \mid \alpha = 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\};$$

终边在  $y$  轴正半轴的角的集合

$$A_3 = \{\alpha \mid \alpha = 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\};$$

终边在  $y$  轴负半轴的角的集合

$$A_4 = \{\alpha \mid \alpha = 270^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\};$$

终边在  $x$  轴的角的集合

$$A_x = A_1 \cup A_2 = \{\alpha \mid \alpha = n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\};$$

终边在  $y$  轴的角的集合

$$A_y = A_3 \cup A_4 = \{\alpha \mid \alpha = 90^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\};$$

终边在坐标轴的角的集合

$$A = A_x \cup A_y = \{\alpha \mid \alpha = n \cdot 90^\circ, n \in \mathbb{Z}\}.$$



### 典型例题剖析

例 1. 写出与下列各角终边相同的角的集合,并指出它们是哪个象限的角

(1)  $45^\circ$

(2)  $135^\circ$

(3)  $240^\circ$

(4)  $330^\circ$

剖析:与角  $\alpha$  终边相同的角的集合可表示为:  $\{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ;由于以上给定角度都为  $0^\circ \sim 360^\circ$  的角,所以直接判定给定角属于第几象限即可.

解:(1) 与  $45^\circ$  终边相同的角的集合是

$$A_1 = \{\alpha \mid \alpha = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

$\therefore 45^\circ$  是第一象限的角

$\therefore$  集合  $A_1$  中所有的角都是第一象限的角

(2) 与  $135^\circ$  终边相同的角的集合是

$$A_2 = \{\alpha \mid \alpha = 135^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

$\therefore 135^\circ$  是第二象限的角

$\therefore$  集合  $A_2$  中的角都是第二象限的角

(3) 与  $240^\circ$  终边相同的角的集合是

$$A_3 = \{\alpha \mid \alpha = 240^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

$\therefore 240^\circ$  是第三象限的角

$\therefore$  集合  $A_3$  中的角都是第三象限的角

(4) 与  $330^\circ$  终边相同的角的集合是

$$A_4 = \{\alpha \mid \alpha = 330^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$



$\because 330^\circ$  是第四象限的角

$\therefore$  集合  $A_1$  中的角都是第四象限的角

例 2. 在直角坐标系中, 作出下列各角并指出它们分别是第几象限角.

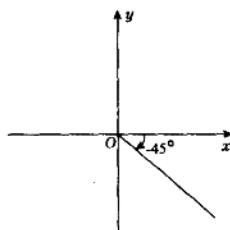
(1)  $-45^\circ$       (2)  $135^\circ$       (3)  $-330^\circ$       (4)  $600^\circ$

剖析: 作角需依据角的概念, 坐标角的意义和带箭头的弧表示方向, 判定象限只需看其终边落在哪个象限即可.

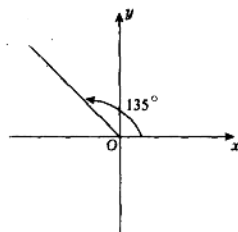
解: 作各角如图 5-1 所示:

由图可知:  $-45^\circ$  是第四象限的角,  $135^\circ$  是第二象限的角

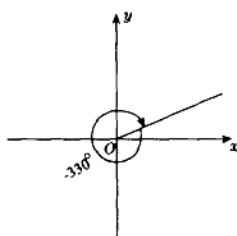
$-330^\circ$  是第一象限的角,  $600^\circ$  是第三象限的角.



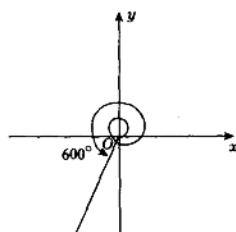
(1)



(2)



(3)



(4)

图 5-1



### 同步创新训练

- 下列说法正确的是 ( )
  - 终边相同的角相等
  - 第二象限角比第一象限角大
  - 负角是第四象限角
  - $-180^\circ$  与  $180^\circ$  终边相同
- 设  $A = \{\text{锐角}\}$ ,  $B = \{0^\circ \sim 90^\circ \text{ 的角}\}$ ,  $C = \{\text{第一象限的角}\}$ , 则 ( )
  - $A = B = C$
  - $A \cup B = C$
  - $A \subset B \subset C$
  - $A \subset B$
- 与  $-690^\circ$  终边相同的锐角是\_\_\_\_\_.
- 填空
  - 设  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ , 则  $2\alpha$  是第\_\_\_\_\_象限的角.
  - 设  $90^\circ < \alpha < 135^\circ$ , 则  $2\alpha$  是第\_\_\_\_\_象限的角.



5. 在直角坐标系中, 以原点为顶点,  $x$  轴正半轴为始边, 画出下列各角, 并指出它们分别属于第几象限.

(1)  $385^\circ$     (2)  $60^\circ$     (3)  $-780^\circ$     (4)  $1180^\circ$

6. 在  $0^\circ \sim 360^\circ$  之间, 找出与下列各角终边相同的角, 并判断它们各属于第几象限

(1)  $-135^\circ$     (2)  $495^\circ$     (3)  $760^\circ$     (4)  $-1180^\circ$

## § 5.2 弧度制



### 课前学习导引

1. 正确理解并掌握弧度制的概念.
2. 能区分弧度和角度的异同并作出相应的转换, 熟记特殊角的弧度数.
3. 理解弧度制下角的集合和实数集之间的一一对应关系.



### 重点难点导析

#### 1. 弧度制与角度制的异同

弧度制和角度制是两种单位不同的度量角的制度. 弧度制就是以“弧度”为单位来度量角的制度, 其中长度等于半径长的圆弧所对应的圆的圆心角叫作 1 弧度的角, 弧度记为  $\text{rad}$ ; 角度制初中我们已经学过, 这里不再赘述. 它们都是度量角的制度, 但单位不同.

#### 2. 弧度制度量角的意义

用弧度制度量角时, 一个角的弧度数就是这个角所对应的实数, 角的集合和实数集  $\mathbf{R}$  之间是一种一一对应的关系 (见图 5-2), 弧度数和实数之间不需要进行单位换算, 给三角函数的研究带来了极大的方便.

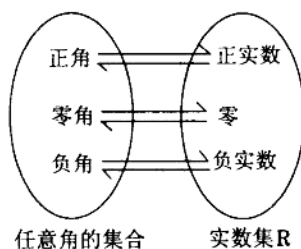


图 5-2

#### 3. 弧度和角度的相互转换

我们知道, 一个圆周角对应的弧长为  $l = 2\pi r$  (其中  $r$  为圆的半径), 它的弧度数是

$$\frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

$$\text{即 } 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

因此有:



$$180^\circ = \pi \text{rad}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{rad} \approx 0.01745 \text{rad}$$

$$1 \text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ$$

注:用弧度作单位表示角的大小时,“弧度”两字或“rad”可省略,角度则不能,应注意  $\sin 1$  与  $\sin 1^\circ$  是不相等的两个正弦值.

4. 在今后的学习中要注意,凡是要求写出与  $\alpha$  终边相同的角的集合时,一般地,若  $\alpha$  给出的是角度数,则应写成  $\beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$  的形式,不能出现二者混用的情况.

5. 弧度制下的弧长公式,扇形面积计算公式

$$(1) l = |\alpha| \cdot r \text{ (由于弧长 } l \text{ 为正, 所以用 } |\alpha| \text{)}$$

$$(2) S_{\text{扇}} = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha|r^2$$



### 典型例题剖析

例 1. 用弧度制表示出与下列各角终边相同的角

(1)  $30^\circ$ ; (2)  $45^\circ$ ; (3)  $120^\circ$ ; (4)  $210^\circ$ .

剖析:  $k \cdot 360^\circ$  的弧度是  $2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ , 只要将所给角用弧度制表示, 再按终边相同的角的集合表示即可.

解: 所给各角对应的弧度制表示分别为:

$$\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{2}{3}\pi; \frac{7}{6}\pi$$

$$\therefore (1) \text{ 与 } 30^\circ \text{ 终边相同的角可表示为 } \{\alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$$

$$(2) \text{ 与 } 45^\circ \text{ 终边相同的角可表示为 } \{\alpha \mid \alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$$

$$(3) \text{ 与 } 120^\circ \text{ 终边相同的角可表示为 } \{\alpha \mid \alpha = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$$

$$(4) \text{ 与 } 210^\circ \text{ 终边相同的角可表示为 } \{\alpha \mid \alpha = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

例 2. 如图 5-3 所示,  $\widehat{AB}$  所对的圆心角是  $120^\circ$ , 半径为 45.

求  $\widehat{AB}$  的弧长, 求扇形  $AOB$  的面积 (精确到 0.1).

剖析: 利用弧度制下的弧长公式, 扇形面积公式计算.

$$\text{解: } \because 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore l = |\alpha| \cdot r = \frac{2}{3}\pi \cdot 45$$

$$= 30\pi$$

$$\approx 94.2$$

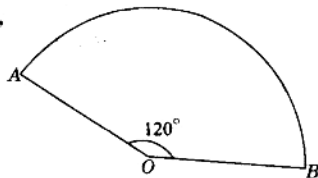


图 5-3



$$S_n = \frac{1}{2} \times 94.2 \times 45$$

$$= 2119.5$$



## 同步创新训练

1.  $4\text{rad}$  是第几象限的角 ( )  
A. 一 B. 二 C. 三 D. 四
2. 单位圆中,  $\frac{\pi}{4}$  圆心角所对的弧长为 ( )  
A.  $\frac{\pi}{4}$  B.  $\frac{\pi}{2}$  C.  $\frac{\pi}{8}$  D. 1
3.  $1\text{rad}$  的圆心角和  $1^\circ$  的圆心角所对的弧长 ( )  
A.  $1^\circ$  所对的弧长大 B.  $1\text{rad}$  所对的弧长大  
C. 相等 D. 要看半径大小才能确定
4. 一条弦长等于半径, 试求这条弦所对的圆心角的度数.
5. 在半径为 1 的圆中,  $30^\circ$  的圆心角所对的弧长是多少?
6. 已知圆的半径为 1.5m, 试求  $2\text{rad}$ ,  $3\text{rad}$  的圆心角所对的弧长.

## § 5.3 任意角的三角函数



## 课前学习导引

1. 理解掌握任意角三角函数的定义.
2. 掌握各三角函数的定义域、值域以及在各象限的符号.
3. 会用公式一进行相关的计算、化简.



## 重点难点导析

1. 关于任意角三角函数的定义

任意角三角函数的定义是本章最基本的概念, 是以往所学的三角函数定义的扩充. 对其理解应注意以下两点:

(1) 定义中  $\frac{y}{r}$ ,  $\frac{x}{r}$ ,  $\frac{y}{x}$ ,  $\frac{x}{y}$ ,  $\frac{r}{x}$ ,  $\frac{r}{y}$  只与  $\alpha$  的大小有关, 而与  $P$  点在终边上的位置无关, 这个结论可由三角形相似的性质证明.

(2) 函数符号是一个整体, 表示的是一个比值, 如  $\sin\alpha$ , 不是“sin”和“ $\alpha$ ”的乘积, 自变量  $\alpha$  离开 sin 没有任何意义.



## 2. 三角函数的定义域与值域

| 三角函数          | 定义域                                                                  | 值域                                |
|---------------|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| $\sin \alpha$ | $\{\alpha \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$                              | $[-1, 1]$                         |
| $\cos \alpha$ | $\{\alpha \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$                              | $[-1, 1]$                         |
| $\tan \alpha$ | $\{\alpha \mid \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ | $(-\infty, +\infty)$              |
| $\cot \alpha$ | $\{\alpha \mid \alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$                 | $(-\infty, +\infty)$              |
| $\sec \alpha$ | $\{\alpha \mid \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ | $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ |
| $\csc \alpha$ | $\{\alpha \mid \alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$                 | $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ |

## 3. 任意角三角函数值的符号

由于 $\alpha$ 终边上一点 $P(x, y)$ 到原点的距离 $r$ 总为正, 所以 $\alpha$ 各三角函数值的符号由 $\alpha$ 终边的位置和相应的定义来确定. 如 $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ 的符号由 $y$ 决定, 在一、二象限 $y > 0, \sin \alpha > 0$ ; 三、四象限 $y < 0, \sin \alpha < 0$ . 同理可判断其它三角函数值的符号, 如图 5-4 所示

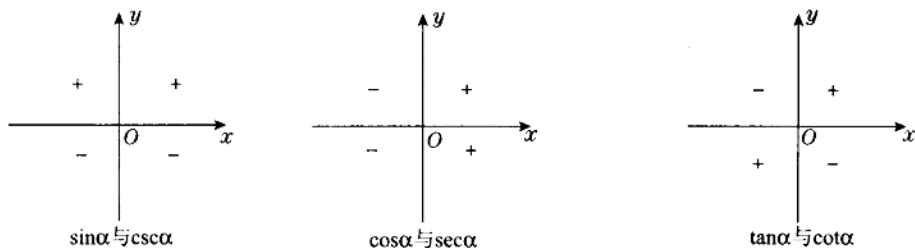


图 5-4



## 典型例题剖析

例 1. 已知角 $\alpha$ 的终边过点 $P(-3, 4)$ , 求 $\alpha$ 的六个三角函数值.

剖析: 此题考查对任意角的三角函数定义的掌握, 解题中谨防漏掉负号.

解:  $\because x = -3, y = 4, \therefore \sqrt{x^2 + y^2} = 5$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3} \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x} = -\frac{5}{3}, \quad \csc \alpha = \frac{r}{y} = \frac{5}{4}$$

例 2. 确定下列各函数值的符号

(1)  $\cos 315^\circ$       (2)  $\tan \frac{13}{3}\pi$



**剖析:**对于  $0 \sim 2\pi$  之间的角的符号,只需熟记图 5-4 对比即可,对于大于  $2\pi$  的角,则首先需用公式一化到  $0 \sim 2\pi$  内,再进行判断.

**解:**(1)  $\because 315^\circ$  是第四象限的角

$$\therefore \cos 315^\circ > 0$$

$$(2) \because \tan \frac{13}{3}\pi = \tan(\frac{\pi}{3} + 4\pi) = \tan \frac{\pi}{3}$$

又  $\because \frac{\pi}{3}$  是第一象限的角

$$\therefore \tan \frac{13}{3}\pi > 0$$



### 同步创新训练

1. 用“>”或“<”填空.

$$\sin \frac{\pi}{3} \quad \quad \quad 0$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \quad \quad \quad 0$$

$$\tan \frac{\pi}{3} \quad \quad \quad 0$$

$$\sin \frac{5\pi}{6} \quad \quad \quad 0$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} \quad \quad \quad 0$$

$$\tan \frac{5\pi}{6} \quad \quad \quad 0$$

$$\sin(-\frac{\pi}{8}) \quad \quad \quad 0$$

$$\cos(-\frac{\pi}{8}) \quad \quad \quad 0$$

$$\tan(-\frac{\pi}{8}) \quad \quad \quad 0$$

2. 若  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$ , 则  $\alpha$  属于第几象限

( )

A. 二

B. 四

C. 一或三

D. 二或四

3. 设  $\alpha$  为第二象限的角,  $M(x, \sqrt{5})$  为其终边上的一点,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}x$ , 则  $\sin \alpha$  的值为( )

A.  $\frac{\sqrt{10}}{4}$

B.  $\frac{\sqrt{6}}{4}$

C.  $-\frac{\sqrt{10}}{4}$

D.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

4. 若  $\alpha$  的终边过  $P(-3, -2)$ , 则

( )

A.  $\sin \alpha \cot \alpha > 0$

B.  $\sin \alpha \cos \alpha > 0$

C.  $\sin \alpha \tan \alpha > 0$

D.  $\cos \alpha \tan \alpha > 0$

5. 与  $-1778^\circ$  终边相同且绝对值最小的角是\_\_\_\_\_.

6.  $\sin 2\cos 1 \tan \pi =$  \_\_\_\_\_.

7. 已知角  $\alpha$  的终边过点  $P(-3\cos\theta, 4\cos\theta)$ , 其中  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 求  $\alpha$  的正弦、余弦、正切函数值.

### § 5.4 同角三角函数的基本关系式



### 课前学习导引

1. 理解掌握同角三角函数的基本关系式.

2. 会用基本关系式进行相关的证明、化简及计算.





## 重点难点导析

## 1. 关于同角三角函数基本关系式的理解及应用

同角三角函数基本关系式可由三角函数定义很容易得到,学习中,同学们应注意以下几点:

(1) 首先,基本关系式强调的是“同角”,离开“同角”这一基础,关系式便无从谈起.其次,确保所涉及到的角均属于有关函数的定义域.

(2) 在书写中应注意  $\sin^2 \alpha$  是  $(\sin \alpha)^2$  的简写,不能写作  $(\sin \alpha^2)$ ,两者的含义有很大的差别,前者是“ $\alpha$  正弦的平方”,而后者是“ $\alpha$  平方的正弦”.也要注意不能写成  $\sin 2\alpha$ .

(3) 在利用关系式求某一三角函数值时,只有在遇到开平方或求绝对值时,才须选择符号,而不必开平方或求绝对值时,只需将有关三角函数值代入关系式计算即可.

(4) 三角函数式要化到最简形式.所谓最简形式是指应用所学过的公式,无论进行任何可能的合理变形,都无法使结果进一步化简.

2. 用同角三角函数基本关系式求解“已知  $\alpha$  一个三角函数值,求  $\alpha$  其它的三角函数值”的问题时,过程较为复杂,在充分理解掌握这一方法的基础上,可以按照教材“阅读空间”所示进行计算.注意运用时体会“一画、二用、三求、四定”各步骤.



## 典型例题剖析

例 1. 已知  $\tan \alpha = m$ , 求下列各式的值.

$$(1) 2\sin \alpha \cos \alpha \quad (2) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$$

剖析: 此题可由基本关系式求出  $\sin \alpha, \cos \alpha$  关于  $m$  的表示式,再代入各式求值,但较繁琐,如果能注意到  $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ ,便可有下列解法:

$$\begin{aligned} \text{解: (1)} \quad 2\sin \alpha \cos \alpha &= \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{2\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} \quad (\text{分子分母同除以 } \cos^2 \alpha) \\ &= \frac{2m}{m^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha)^2 + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &= 1 - \frac{1}{2}(2\sin \alpha \cos \alpha)^2 \\ &= \frac{m^4 + 1}{(m^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

例 2. 证明:  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2\sin^2 \alpha - 1$

剖析: 此类证明题一般采用从高次幂往低次幂证明的方法,若再观察到左式可以使用平方差公式,此题即可迎刃而解.



$$\begin{aligned}
 \text{证明: } \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \\
 &= \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \\
 &= \sin^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha) \\
 &= 2\sin^2 \alpha - 1 \\
 \therefore \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= 2\sin^2 \alpha - 1
 \end{aligned}$$



## 同步创新训练

- 下列各式中肯定错误的是 ( )  
 A.  $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$                       B.  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$   
 C.  $\sin \alpha + \cos \alpha < 1$                       D.  $\sin \alpha + \cos \alpha = 2$
- 已知  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\alpha$  是第四象限角, 则  $\sin \alpha =$  ( )  
 A.  $\frac{4}{5}$                       B.  $-\frac{4}{5}$                       C.  $\frac{3}{4}$                       D.  $-\frac{3}{4}$
- 已知  $\tan \alpha = \sqrt{3}$ , 且  $\alpha$  为第三象限角, 则  $\sin \alpha - \cos \alpha =$  ( )  
 A.  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$                       B.  $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$                       C.  $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$                       D.  $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$
- 已知  $\tan \alpha = 5$ , 求  $3\tan \alpha \cdot \cos^2 \alpha$  的值.
- 证明: 如果  $\alpha \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ , 则  $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$ .
- 化简:  $\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^4 \alpha$ .

## 二 三角函数公式

## § 5.5 三角函数的简化公式



## 课前学习导引

- 了解三角函数的简化公式的推导过程.
- 会用简化公式求解任意角的三角函数值.



## 重点难点导析

1. 注意体会、理解简化公式推导过程中对平面几何知识的运用, 其中  $-\alpha$  角的简化公式是用关于  $x$  轴对称的两点坐标的关系推出的, 而  $\alpha \pm \pi$  的简化公式的推导利用的则是关于坐



标原点成中心对称的两点之间的关系.

2. 由公式二可以看出, 正弦、正切函数是奇函数, 而余弦函数是偶函数.



### 典型例题剖析

例. 求下列各角的函数值

$$(1) \sin(-\frac{19}{4}\pi) \quad (2) \cos(-\frac{8}{3}\pi)$$

剖析: (1) 中  $-\frac{19}{4}\pi$  不属于  $0 \sim 2\pi$ , 需首先利用公式一化为  $0 \sim 2\pi$  之间的角; (2) 中则需要先用公式二化为正角.

$$\begin{aligned} \text{解: } (1) \sin(-\frac{19}{4}\pi) &= -\sin(\frac{19}{4}\pi) \\ &= -\sin(\frac{3}{4}\pi + 4\pi) \\ &= -\sin \frac{3}{4}\pi \\ &= -\sin[-(-\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{2}] \\ &= -\cos(-\frac{\pi}{4}) \\ &= -\cos \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \cos(-\frac{8}{3}\pi) &= \cos \frac{8}{3}\pi \\ &= \cos(\frac{2}{3}\pi + 2\pi) \\ &= \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= \cos(-\frac{\pi}{3} + \pi) \\ &= -\cos \frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



### 同步创新训练

1.  $\sin(8\pi - \alpha) = -\frac{1}{2}$ , 则  $\sin(5\pi + \alpha) =$

( )

