21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

微积分

全程导学及习题全解

下册

同济大学第二版

主编 杨蕤

副主编 杨晓叶 潘大伟

主审 苗明川

◆知识归纳 梳理主线重点难点

◆习题详解 精确解答教材习题

◆提高练习 巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

21世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

微积分

全程导学及习题全解

下册

同济大学第二版

主编　杨薤

副主编　杨晓叶　潘大伟

主审　苗明川

◆知识归纳　梳理主线重点难点

◆习题详解　精确解答教材习题

◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社

China Modern Economic Publishing House

图书在版编目（CIP）数据

微积分全程导学及习题全解．下册/杨蕤主编．—北京：中国时代经济出版社，2006.6

（21世纪高等院校经典教材同步辅导）

ISBN 7-80221-049-6

Ⅰ．微…　Ⅱ．杨…　Ⅲ．微积分-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 028544 号

微积分全程导学及习题全解（下册）

杨蕤 主编

出版者	中国时代经济出版社
地　址	北京东城区东四十条24号 青蓝大厦东办公区11层
邮政编码	100007
电　话	(010)68320825(发行部) (010)88361317(邮购)
传　真	(010)68320634
发　行	各地新华书店
印　刷	北京市优美印刷有限责任公司
开　本	880×1230　1/32
版　次	2006年9月第1版
印　次	2006年9月第1次印刷
印　张	11.75
字　数	350千字
印　数	1～5000册
定　价	15.00元
书　号	ISBN 7-80221-049-6/G·033

内容提要

本书是同济版《微积分》教材的一本配套学习辅导及习题解答教材。编写的重点在于原教材中各章节全部习题的精解详答，并对典型习题做了很详细的分析和提纲挈领的点评，思路清晰，逻辑缜密，循序渐进的帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。本书对各章的知识点进行了归纳和提炼，帮助读者梳理各章脉络，统揽全局。在《微积分》教材给出的习题的基础上，根据每章的知识重点，精选了有代表的例题，方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书可作为工科各专业本科学生《微积分》课程教学辅导材料和复习参考用书及工科考研强化复习的指导书。也可以作为《微积分》课程教师的教学参考书。

前　　言

《微积分》是解决工科数学问题和工程实际问题的重要理论基础和实用工具，也是工科各专业研究生入学考试的内容。为了帮助广大学生更好的学习和掌握《微积分》课程的理论精髓和解题方法，我们根据同济大学应用数学系编写的《微积分》教材，编写了这本辅导资料。

本辅导教材根据《微积分》教材中各章的内容，着重编写了以下几方面的内容：

知识点概要：精练了各章中的主要知识点，理清各知识点之间的脉络联系，囊括了主要定理及相关推论，重要公式和解题技巧等，帮助读者融会贯通，系统理解各章的体系结构，奠定扎实的理论基础。

典型例题讲解：精选具有代表性的重点习题进行讲解，分析问题的突破点，指引解决问题的思路，旨在帮助读者学会独立思考的方式和分析问题的办法。

习题全解：依据教材各章节的习题，进行详尽的解答。考虑到不同层次读者的需求，在解答过程中，对于重点和难点习题进行了分析和讲解，归纳解题技巧。

本教材由杨蕤、杨晓叶、潘大伟等同志编写，全书由苗明川老师主审。苗明川老师高深的造诣、严谨的治学态度，使编者受益匪浅，对此深表感谢。本书编写过程中得到任

卉、谢婧等同志的大力协助，并得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的大力支持，为此表示忠心的感谢！

对《微积分》教材作者同济大学应用数学系老师们，表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，本书难免有缺点和疏漏，这些不妥之处，敬请各位专家及广大读者批评指正。

编　者

2006年8月

目　　录

第五章　向量代数与空间解析几何

知识点概要

1. 空间直角坐标系

由过空间一点 O 的互相垂直的三条数轴组成的坐标系，记为 $\{O;X,Y,Z\}$ 或 $\{O;x,y,z\}$ 或 $O-XYZ$ 或 $O-xyz$.

2. 两点间的距离公式

空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的距离为

$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

3. 向量的概念

向量：既有大小又有方向的量称为向量，其坐标表示为

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}=\{a_1,a_2,a_3\}\text{或}(a_1,a_2,a_3).$$

向量的模：向量的大小称为向量的模，若 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，则向量的模

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}.$$

单位向量：模为 1 的向量. 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的同方向单位向量记为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}},\frac{a_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}},\frac{a_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}}\right)$$

其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与三坐标轴正向的夹角.

零向量：模为零的向量. 记为 $\mathbf{0}$

两向量的夹角：记 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 φ 为：

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}\ (0\leqslant\varphi\leqslant\pi).$$

投影：向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影可表示为 $\mathbf{Prj}_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

4. 向量的运算及性质

(1)向量的线性运算

①加法运算：两向量相加满足如图 5－1 所示的平行四边形法则或三角形法则，用

坐标表示式,记 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$则

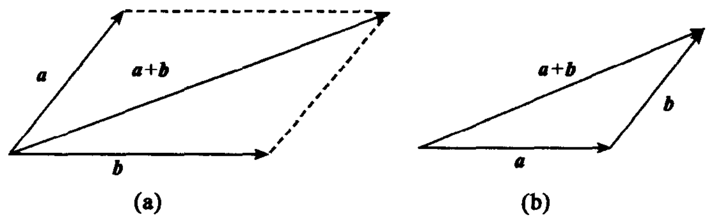


图 5-1

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$.

相应的减法运算为一向量加上另一向量的负向量即

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$其坐标表示为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$.

向量的加法运算满足下列运算律:

(ⅰ)交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,

(ⅱ)结合律:$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$.

②数乘运算:对于任意实数 λ,定义数乘:设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线(当 $\lambda>0$ 时同向,当 $\lambda<0$ 时异向)且 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

向量的数乘运算满足下列运算律:

(ⅰ)结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$;

(ⅱ)向量按数乘因子的分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(ⅲ)向量按向量因子的分配律:$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

③向量的数量积(也称点积,内积)

定义:两向量的数量积定义为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. 其中 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,$0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi$,当$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$ 时,称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

向量的数量积满足下列运算律:

(ⅰ)交换律:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$; (ⅱ)结合律:$\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$;

(ⅲ)分配律:$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$; (ⅳ)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

④向量的向量积(也称叉积,外积)

定义:$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量,模为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,方向由右手法则确定

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$则:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\quad \boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

向量积满足下列运算定律：

(ⅰ)反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；(ⅱ)分配律：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$；

(ⅲ)结合律：$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$；(ⅳ)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

几何意义：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$表示以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积.

⑤向量的混和积

向量的混合积定义为$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{abc})$

设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

三矢量的混和积具有轮换性：$[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}]$以及三向量共面$\Leftrightarrow[\boldsymbol{abc}]=0$

几何意义：$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$表示以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为相邻三棱的平行六面体的体积.

5. 空间平面与直线

(1)空间平面方程

①矢量式方程：$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0$.　其中$\boldsymbol{n}$为平面法向量，$\boldsymbol{r}_0$为已知点向量.

②点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. 其中$\{A,B,C\}$为平面法向量，$M_0(x_0,y_0,z_0)$为平面上一点.

③一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$. 其中$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$为平面法向量.

特殊的：$Ax+By+Cz=0$，表示通过原点的平面.

$Ax+By+D=0,D\neq0$，表示该平面与z轴平行.

$Ax+D=0,D\neq0$，表示该平面与yOz平面平行.

$x=0$表示yOz平面.

④截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，$a,b,c$为平面在三坐标轴上的截距.

⑤三点式方程：若$M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$为平面上三点，则

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

(2)直线方程

①向量式方程：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{s}t$，其中$\boldsymbol{r}_0$为直线上已知点向量，$\boldsymbol{s}$为直线方向.

②标准式方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，其中$(x_0,y_0,z_0)$为已知点，$\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$为与直线平行的非零向量即为方向向量.

③一般式方程：视为两个不平行平面的交线.

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

方向向量 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}$ 其中$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}$不成立.

④参数式方程为$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$ t 为参数，$\{x_0,y_0,z_0\}$ 为已知点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$为方向向量.

6. 直线，平面间的位置关系

(1)点到平面的距离：点 $M(x_0,y_0,z_0)$到平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+Bx_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(2)两异面直线间距离：设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$为直线 l 上一定点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$为直线 l 的方向向量. 则点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和直线 l：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$$

(3)平面 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与平面 π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的夹角 θ 为

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2}\cdot\sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2+C_2{}^2}}.$$

(4)两直线 l_1 与 l_2 的夹角 θ 为

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1{}^2+n_1{}^2+p_1{}^2}\cdot\sqrt{m_2{}^2+n_2{}^2+p_2{}^2}}$$

其中$\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$为 l_1 的方向矢量，

$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$为 l_2 的方向矢量.

(5)两平面 π_1,π_2 平行，垂直的充要条件

$$\pi_1//\pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1//\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

$$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

(6)两直线 l_1 与 l_2 平行,垂直的充要条件

$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 /\!/ \boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 \perp \boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

(7)直线 l 与平面 π 平行,垂直的充要条件

$$l /\!/ \pi \Leftrightarrow \boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{n} \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$$

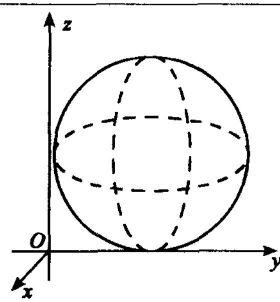
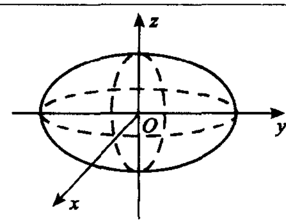
$$l \perp \pi \Leftrightarrow \boldsymbol{s} /\!/ \boldsymbol{n} \Leftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

7. 曲面与空间曲线

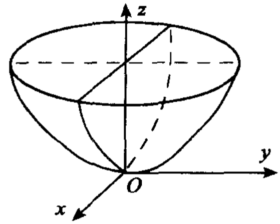
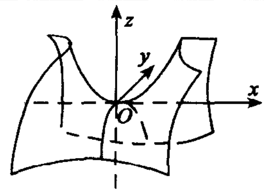
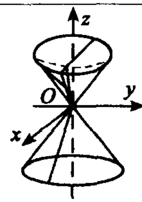
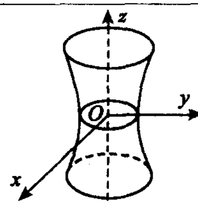
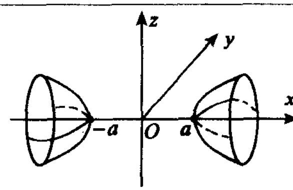
(1)曲面方程:用 $F(x,y,z)=0$ 或 $z=f(x,y)$ 或 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$(参数式)来表示空间曲面方程.

(2)曲线方程:用 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=y(x)\\z=z(x)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ 表示空间曲线方程.

(3)二次曲面

曲面名称	方程	图形
球面	$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. 球心:$(a,b,c)$. 半径为 R.	
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 中心$(0,0,0)$半长轴为 a,b,c	

续表

椭圆抛物面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz(p>0)$ 顶点(0,0,0) z 轴为对称轴	
双曲抛物面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$ 顶点(0,0,0) z 轴为对称轴.	
锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 顶点(0,0,0)中心轴 z 轴	
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	

(4)柱面:一般地,若曲面方程 $F(x,y,z)=0$ 中缺某个变量 $F(x,y)=0$(缺 z),则它表示空间中母线平行于 Oz 轴的柱面,其在 xOy 面上的曲线表示为

$$\begin{cases}F(x,y)=0\\z=0\end{cases}$$

类似地，母线平行于 Ox 轴，Oy 轴的柱面为$\begin{cases}F(y,z)=0\\x=0\end{cases}$和$\begin{cases}F(x,z)=0\\y=0\end{cases}$

(5)旋转曲面

已知 yOz 面上的曲线$\begin{cases}F(y,z)=0\\x=0\end{cases}$则它绕 Oz 轴旋转一周所得的旋转曲面的方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

类似地，可得出其他情况.

(6)空间曲线在坐标面上的投影的求法

设曲线 L 的一般方程为$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$由方程组消去 z 后得方程 $H(x,y)=0$. 它是含曲线 L 的母线平行于 z 轴的柱面，称它为曲线 L 的投影柱面，它与 xOy 面的交线为$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$，即为曲线 L 在 xOy 面上的投影曲线.

类似地可推得曲线 L 在 xOz 面及 yOz 面上的投影曲线.

典型例题讲解

例 1 设$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$. 则$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=$______.

解：

∵在由 3 个向量组成的混合积中若有相同向量，则该混和积必为 0.

∴$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4$.

例 2 已知△ABC 的两边矢量：$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$；$\overrightarrow{BC}=3\boldsymbol{i}+s\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 求△ABC 的面积.

解：

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&-1\\3&2&1\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}+(-5)\boldsymbol{j}+(-2)\boldsymbol{k}=4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}.$$

而△ABC 的面积为$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|$. 故

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}|=\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

例 3 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为普通几何空间中 3 个矢量，试证：若存在不全为零的三个数 k_1，

k_2,k_3 使得 $k_1\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+k_3\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$ 则 3 个矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 共线.

证明:

由 $k_1\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+k_3\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 且 k_1,k_2,k_3 不全为零,不妨设 $k_1\neq0$,则 $\boldsymbol{c}\cdot(k_1\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+k_3\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=0$,即 $k_1[\boldsymbol{cab}]+k_2[\boldsymbol{cbc}]+k_3[\boldsymbol{cca}]=0$

又$\because[\boldsymbol{cbc}]=[\boldsymbol{cca}]=0$ 故$[\boldsymbol{cab}]=0$ 即 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$,$\therefore\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三矢量共面,又 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 均垂直于该平面,因而它们共线.

例 4 设 L 为空间中平行于向量 $\boldsymbol{l}$ 的直线,点 p_1 不在 L 上,(1)试证 p_1 到直线 L 的距离为 $d=\frac{|\boldsymbol{l}\times\overrightarrow{p_0p_1}|}{|\boldsymbol{l}|}$ 其中 p_0 为 L 上一点;(2)由此求点$(2,1,-1)$到直线 $x=3t$, $y=1+2t,z=-5-t$ 的距离.

证明:

(1)如图 5—2 所示:$d=|\overrightarrow{p_0p_1}|\cdot\sin\theta$.

故$|\boldsymbol{l}\times\overrightarrow{p_0p_1}|=|\boldsymbol{l}||\overrightarrow{p_0p_1}|\cdot\sin\theta=|\boldsymbol{l}|\cdot d$ 从而 $d=\frac{|\boldsymbol{l}\times\overrightarrow{p_0p_1}|}{|\boldsymbol{l}|}$.

(2)在直线 $x=3t,y=1+2t,z=-5-t$ 上任取一点 $p_0=(0,1,-5)$,对应 $t=0$,向量 $\boldsymbol{l}=(3,2,-1)$故

$$d=\frac{|\boldsymbol{l}\times\overrightarrow{p_0p_1}|}{|\boldsymbol{l}|}=\frac{|(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k})|}{|3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}|}=\frac{|8\boldsymbol{i}-14\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}|}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{138}}{7}.$$

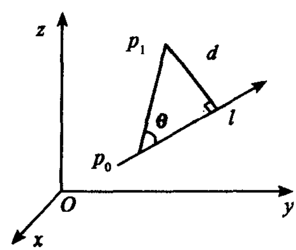


图 5—2

例 5 直线$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$绕 Oz 轴旋转一周,求旋转曲面的方程.

解:

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$为直线 L: $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 上任一点,有 $x_1=1$,即 M_1 为 $(1,y_1,z_1)$,直线绕 Oz 轴旋转到某一位置时,M_1 变为另一点 $M(x,y,z)$,则点 M,M_1 到 Oz 轴距离不变,且 $r^2=1^2+{y_1}^2=x^2+y^2$,而 M_1 又在 L 上,故有 $y_1=z_1=z$.

$\therefore 1+{y_1}^2=1+{z_1}^2=1+z^2$,故 $1+z^2=x^2+y^2$,

$\therefore x^2+y^2-z^2=1$ 为所求旋转曲面的方程.

例 6 已知准线方程为$\begin{cases}x+2y-2z-2=0\\x-y+z=0\end{cases}$母线平行于直线 $x=y=z$,求此柱面方程.

解:

∵母线平行于直线 $x=y=z$，∴母线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(1,1,1)$. 又∵准线为一直线 L，可见柱面是过 L 的一个平面，而过 L 的平面束方程为

$x+2y-2z-2+\lambda(x-y+z)=0$，

即 $(1+\lambda)x+(2-\lambda)y-(2-\lambda)z-2=0$.

由于母线垂直于柱面的法向量，因此有

$1\cdot(1+\lambda)+1\cdot(2-\lambda)+1\cdot(\lambda-2)=0$ 即 $\lambda=-1$，代入平面束方程可得

$x+2y-2z-2-x+y-z=0$，$3y-3z-2=0$

即为所求柱面方程.

例 7　试证：平面 $2x-12y-z+9=0$ 与双曲抛物面 $x^2-9y^2=3z$ 的交线是两条相交的直线，并写出它们的对称式方程.

证明：

由已知平面方程 $2x-12y-z+9=0$，得 $z=2x-12y+9$，

代入双曲抛物面方程 $x^2-9y^2=3z$ 得

$x^2-9y^2=6x-36y+27$，即 $x^2-6x-9y^2+36y-27=0$.

由 $(x-3)^2-9(y-2)^2=0$，

而有 $(x-3)+3(y-2)=0$ 或 $(x-3)-3(y-2)=0$

即 $x+3y-9=0$ 或 $x-3y+3=0$

故已知平面与双曲抛物面的交线是如下两条相交直线.

$L_1:\begin{cases}2x-12y-z+9=0\\x+3y-9=0\end{cases}$　　　$L_2:\begin{cases}2x-12y-z+9=0\\x-3y+3=0\end{cases}$

L_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-12&-1\\1&3&0\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+18\boldsymbol{k}=(3,-1,18)$.

在 L_1 上取一点 $(0,3,-27)$，

从而可得 L_1 的对称式方程为

$$\frac{x}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+27}{18}.$$

L_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-12&-1\\1&-3&0\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}=(-3,-1,6)$.

在 L_2 上取一点 $B(0,1,-3)$，从而可得 L_2 的对称式方程为

$$\frac{x}{-3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+3}{6}.$$

例 8　求直线 $\frac{x-1}{9}=\frac{9+1}{-4}=\frac{z}{-7}$ 在平面 $2x-y-3z+6=0$ 上的投影直线方程.

分析：先求过已知直线垂直于已知平面的平面方程. 那么所求投影直线方程即为两