武汉大学学术丛书
Wuhan University Academic Library

流形的拓扑学

苏竞存 著

武汉大学出版社
WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学学术丛书

流形的拓扑学

苏竞存 著

武汉大学出版社

内 容 简 介

拓扑学的方法与结果在各个数学分支中有广泛的应用，因此适当选择其中的内容供各个分支的研究者与教师之用是一个很重要的工作。本书作者以微分流形为中心写了这本书，涉及拓扑学的广泛的领域并在分析数学、几何学乃至理论物理学中均可得到重要的应用。本书的主要内容是：微分流形、矢量丛、Stokes 定理、同调理论与上同调理论、Lie 群、纤维丛理论、示性类理论、表示论大意、Hodge 理论、Hirzebruch 指标定理、Riemann-Roch 定理、Atiyah-Singer 指标定理和 Gauss-Bonnet 定理等。它适合现代数学的许多分支以及理论物理的研究生、教师和研究工作者的需要。

图书在版编目(CIP)数据

流形的拓扑学/苏竞存著.—2 版.—武汉:武汉大学出版社，2005.5
(武汉大学学术丛书)
ISBN 7-307-04509-5

Ⅰ.流… Ⅱ.苏… Ⅲ.流形拓扑 Ⅳ.O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 033810 号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：刘 欣　　版式设计：支 笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn 网址：www.wdp.whu.edu.cn)
印刷：武汉大学出版社印刷总厂
开本：880×1230 1/32　印张：22.5　字数：626 千字　插页：3
版次：2005 年 5 月第 1 版　　2005 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-04509-5/O·321　　定价：45.00 元

苏竞存

1932年出生。1955年毕业于台湾大学物理系。后在台湾中央研究院数学研究所开始数学研究。1962年在美国宾夕法尼亚州立大学师事著名数学家杨忠道，并得哲学博士学位。现任美国麻省州立大学数学系教授。1980年在武汉大学讲学，并任客座教授。

序 言

1980 年秋，我应武汉大学数学系之邀讲授拓扑学。这本书即为该课之用。在写这本讲义时，我怀有几个目的。首先，我知道在中国找到相关内容的参考书比较困难，所以我打算以这个讲义作为流形理论这个基本的一般科目的方便的参考。这样，尽管在这个科目上有众多极好的参考书，我想，把种种材料集中在一起也是不无助益的。结果，读者会看到这里的材料远远超过了一学期讲授之需。事实上，这讲义分为两部分，后一部分（从第 12 章起）是在我访问结束后才写成的。其次，在我看来，拓扑学的许多入门书都是按所用的方法与工具来划分的，例如分为代数拓扑、微分拓扑和微分几何等，我有一个想法，即拓扑学中有重要性的中心问题当然是流形问题，应该围绕这个问题而不是围绕种种技巧来写一本讲义。这里所采用的计划就是如此。我们从光滑流形的基本概念讲起，进而讨论各种专题，那时需要什么工具就介绍什么工具。这样，我们从流形上的微积分开始，因为流形就是为了搞微积分而设计的。我们先讲导数的局部理论。然后积分理论就导致一些整体性的东西，例如 de Rham 定理。为了解释它，我们开始建造通常用到的同调与上同调工具，而最终以流形的同调理论的核心事实即 Poincaré 对偶性结束。虽然这些东西是真正基本的而且肯定是必不可少的，然而像许多入门书那样，要想讲清楚它，通常是费劲且头疼的事。我想，如果选用一个比较实质性的主题作为最终的目标，则读者不致陷入一大堆表面的知识而不知所终，这样在启发读者上可能是有好处的。虽然不乏值得选择的问题，我觉得 Atiyah-Singer

指标定理是一个好的主题。主要是因为我觉得它最好不过地说明了现代拓扑学对于微分方程的整体理论的用处。这里还有一些个人的考虑。我的哥哥齐民友从事偏微分方程，而他也有兴趣来学习这些材料。当然，不是单单一本讲义就能充分地解释这个定理的，但是这本讲义的第二部分收集了的材料，我觉得至少可以向读者说明指标定理讲的是什么。

所以大家看到，我认为我的主要职责是一个收集者，同时花一些力量去组织这些材料。在这样做的时候，我遵循一些以我个人的看法为基础的指导原则。首先，我觉得拓扑学应该是几何而我就强调这一方面。其次，我认为拓扑学的现代发展，特别是它对其它领域的推动，集中表现在整体方面，所以，只要有可能，我就力图指出这一点。此外，现代拓扑学的语言可以说是很细致、很抽象的。我试图把一般性和抽象性保持在最低限度，仅仅是适合当前问题之所需，而将种种可能的更一般的表述留待读者自学。再则，只要做得到，总是用一些例子来引导出对某种工具的需要。所有这一切，说起来当然比做起来容易，我只希望读者花时间和精力在这本讲义上之前，了解我打算做的是什么。

最后，应该感谢张敦穆先生，他仔细阅读了这本教材并且提了许多宝贵的建议。当然对这本讲义的缺点，欢迎读者指出，以便改进。

作 者

1981 年 10 月

目　　录

第 1 章　基本定义

1.1　定义和例

我们都知道，拓扑空间的提出是为了使我们能谈到定义其上的函数连续性，流形则是可以在其上作微积分的一个拓扑空间.

令 M 为一拓扑空间(为简单起见，以后凡谈到拓扑空间总是设它为 Hausdorff 空间)，$f:M\to\mathbf{R}$ 为一实值函数，我们知道如何取导数，也知道求导是一件局部的事，所以第一个明显的条件应该是

($\mathbf{M}_1$)：每一点 $P\in M$ 都有一邻域 U 同胚于 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集.

令 $\varphi:U\to\varphi(U)$ 是这种同胚之一(我们称 (U,φ) 为一个局部坐标). 于是 $\tilde{f}=f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\mathbf{R}$ 成为定义在开集 $\varphi(U)\subset\mathbf{R}^n$ 上的函数而可以谈得上 $\tilde{f}$ 是否可微. 这显然依赖于局部坐标 φ. 若 ψ 是另一个局部坐标，$\check{f}=f\circ\psi^{-1}$ 可能不再可微了. 为了使得可微，需另加一个条件.

($\mathbf{M}_2$)：对任意两个局部坐标 (U,φ) 和 (V,ψ) 函数

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$$

都是可微的.

因为 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 的开集 $\varphi(U\cap V)$ 上而且在 $\mathbf{R}^n$ 中取值，所以这样说是有意义的. 这里讲的可微性指的是各阶偏导数都存在，即是说 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 是属于 C^∞ 类的.

我们可以用不同的办法修改这相容性条件：

1) 如果只要求 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 属于 C^k 类(即到 k 阶为止的偏导数存在且连续)，就得到一个 C^k 类流形.

2) 特别是，C^0 意味着除($\mathbf{M}_1$)以外不再加其它条件，有时称它为拓扑流形，而与此对照，称 C^∞ 流形为微分流形.

3) 我们可以要求 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 是实解析的，即它局部地有幂级数展开式. 这就是 C^ω 流形.

4) 我们可以用 $\mathbf{C}^n$(n 维复空间)代替 $\mathbf{R}^n$，并要求 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 为复解析的(也称为全纯的)，这样就得到一个 n 维复流形. 注意，它也是一个 $2n$ 维实流形.

今后我们主要讨论的是 C^∞ 流形. 但应该指出，C^0，C^∞ 和 C^ω 流形的理论差别很大. 后面我们可以看到其中的一部分.

总括起来说，流形是特别的一类拓扑空间. 它们是局部欧几里得的而又满足某些相容性条件. 这种空间在许多地方都会很自然地找到. 最普通的有：

1. n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 是一个 n 维流形.

2. n 维球面 $S^n=\{x\in\mathbf{R}^{n+1}\mid |x|=1\}$ 是一个 n 维流形. S^n 作为欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的子空间是一个拓扑流形(即局部欧)，容易看出，相容性则要用球极投影计算，这也是标准的作法.

令 $P=(0,\cdots,0,1)$,$Q=(0,\cdots,0,-1)$ 是北极和南极(图 1-1). $U=S^n-\{P\}$,$V=S^n-\{Q\}$,取 $x\in U$，连接 x 和 P 的直线是 $y=\lambda x+(1-\lambda)P$. 当 $\lambda=1/(1-x_{n+1})$ 时，它和 $y_{n+1}=0$ 相交，定义

$$\varphi:U\to\mathbf{R}^n=\{y\in\mathbf{R}^{n+1}\mid y_{n+1}=0\}$$

为

$$\varphi(x)=\frac{x}{1-x_{n+1}}-\frac{x_{n+1}}{1-x_{n+1}}P.$$

同样，利用 Q 可以作出 $\psi:V\to\mathbf{R}^n$. 容易看到 $\varphi(U\cap V)=\mathbf{R}^n-\{0\}$，而且在 $\varphi(U\cap V)=\mathbf{R}^n-\{0\}$ 上 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 正是 $\psi\circ\varphi^{-1}(y)=y/|y|^2$，当 $y\neq 0$ 时，它显然是 C^∞ 的.

3. 一个重要的例子是 n 维射影空间 $\mathbf{P}^n$. 有几种方法来描述它. 最直接的一种是：$\mathbf{P}^n$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中过原点之一切直线之集，即矢量空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 之一切一维子空间之集. $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的一条直线由基底矢量 $x\neq 0$ 决定，若 x 与 y 成比例，即有一个纯量(scalar)$\lambda\neq 0$ 使 $x=\lambda y$，则

x, y将给出相同的直线, 所以$\mathbf{P}^n$也可以这样描述, 在$\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}$中, 关系$x\sim y$ iff 有一纯量$\lambda\neq 0$使$x=\lambda y$, 这显然为一等价关系. $\mathbf{P}^n$就是商空间$(\mathbf{R}^{n+1}-\{0\})/\sim$. 我们可以取$x,y$为单位矢量(即它们在$S^n$上). 这时$x\sim y$ iff $x=\pm y$, 也有$\mathbf{P}^n=S^n/\sim$. 对于$x=(x_0,x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}$, 用$[x]=[x_0,x_1,\cdots,x_n]$表示它在$\mathbf{P}^n$中的等价类. 把$\mathbf{P}^n$描述成商空间给了它一个拓扑, 但它是否是流形还不清楚. 作法是: 对每个整数$i=0,1,\cdots,n$, 定义

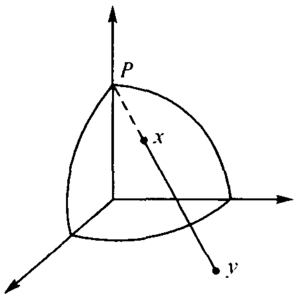

图 1-1

$$U_i=\{[x]=[x_0,x_1,\cdots,x_n]\in\mathbf{P}^n\mid x_i\neq 0\}.$$

它是$\mathbf{P}^n$中的一开集. 定义$\varphi_i:U_i\to\mathbf{R}^n$为

$$\varphi_i[x_0,x_1,\cdots,x_n]=(x_0/x_i,\cdots,\hat{x_i}/x_i,\cdots,x_n/x_i),$$

$\hat{}$表示这一项要除去(所以只留下n个坐标). 这定义了局部坐标(U_i,φ_i), $i=0,1,\cdots,n$. 若$i\neq j$例如$i<j$, 容易算出

$$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$
$$=(y_1/y_j,\cdots,1/y_j,\cdots,\hat{y_j}/y_j,\cdots,y_n/y_j),$$

$1/y_j$出现在第$i+1$个位置上. 这是一个光滑映射, 因为对于$y\in\varphi_i(U_i\cap U_j)$, 总有$y_j\neq 0$.

4. 上例的作法可以用于复空间$\mathbf{C}^{n+1}$, 得到的射影空间是n维复射影空间$\mathbf{CP}^n$(所以例3是n维实射影空间, 有时记作$\mathbf{RP}^n$). $\mathbf{CP}^n$是

复流形之一例.

这有两个一般的作法.

5. n 维流形 M 的任一开子集 $U \subset M$ 若继承 M 的流形结构，则 U 本身也是一个 n 维流形，叫做 M 的开子流形(和以后要讨论的闭子流形相对照). 下面是一个重要的例子.

令 $M(n)$ 是一切 $n \times n$ 矩阵之集. 很清楚，$M(n)$ 作为一个集和 $\mathbf{R}^{n^2}$ 可以建立一一对应，并由例 1，可使 $M(n)$ 是一流形. 令 $GL(n) \subset M(n)$ 是所有非异 $n \times n$ 矩阵之集. 矩阵 A 非异 iff 其行列式 $\det(A) \neq 0$，因为 $\det(A)$ 显然是 A 的连续函数，故 $GL(n) \subset M(n)$ 是开的，$GL(n)$ 在矩阵乘法下又是一个群. 这是 Lie 群的重要例子.

6. 若 M 是一个 k 维流形，N 是一个 l 维流形，其积可以自然地做成一个 $k+l$ 维流形. 只要在 M 和 N 中各取坐标(U, φ) 和(V, ψ)，就可以作出 $M \times N$ 的一个坐标为

$$U \times V \xrightarrow{\varphi \times \psi} \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^l = \mathbf{R}^{k+l}.$$

这些例子是否真正不同? 从纯拓扑的观点看，流形是一个有很好的局部性质的拓扑空间，比如说，我们知道它是局部紧的、局部

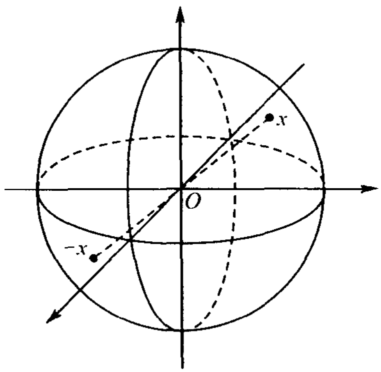

图 1-2

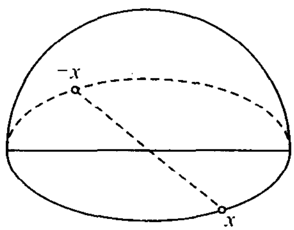

图 1-3

连通的，等等. 但这些性质不能把它们区分开来(说到底，所有的流形都有这样的性质). 要把它们区分开来，就要用整体性质. 例如，$\mathbf{R}^n$ 和 S^n 不同，因为容易看到，一个是紧的，另一个不是. 但是 S^n 和 $\mathbf{P}^n$(都紧)或 $\mathbf{R}^{n^2}$ 和 $GL(n)$(都不紧)又怎样呢?进一步观察，得到 S^2 和 $\mathbf{P}^2$ 是不一样的. S^2 只是一个球面，$\mathbf{P}^2$ 有一种描述：$\mathbf{P}^2$ 可以从 S^2 中将它的对径点 $x \in S^2$ 和 $-x$ 等同(identify)起来而得到(图1-2). 所以如果取上半球的 x，就可以抛掉下半球的 $-x$. 但赤道上的点 x 必须要与 $-x$ 重合(图1-3)，如果真正想实现这样的重合(图1-4)，我们就会发现，我们不能想象出它. 这句话的意思是说，这种重合不可能在 $\mathbf{R}^3$ 中物理地实现(但是用理解力却很容易做到)，也就是说 $\mathbf{P}^2$ 不能嵌入在 $\mathbf{R}^3$ 中，既然 S^2 显然地可以嵌入在 $\mathbf{R}^3$ 中，它就和 $\mathbf{P}^2$ 不一样了. 这并不是 S^2 和 $\mathbf{P}^2$ 不同胚的一个证明，只是一种可信的论证，它指出作为一个一般性的拓扑问题，不容易判断两个已给的空间同胚与否(用上面论证可以轻易地使你信服 $\mathbf{P}^1$ 和 S^1 是一样的).

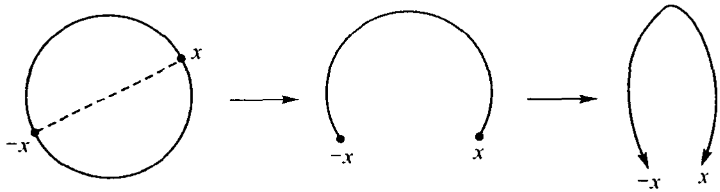

图 1-4

我们所需要的是拓扑空间的一些系统的整体不变量. 迄今为止，这一类不变量中最有用的是同调不变量，以后我们会用很多时间讨论它.

我们可以作一个局部的论断：不同维数的流形是不同的. 这是以下定理的推论.

定理(区域不变性)　*若 $n \neq m$，$\mathbf{R}^n$ 的开集不能同胚于 $\mathbf{R}^m$ 中的开集.*