工 程 数 学

复变函数与积分变换

张高民　崔俭春　吕巍然　编

中国石油大学出版社

工　程　数　学

复变函数与积分变换

张高民　崔俭春　吕巍然　编

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/张高民,崔俭春,吕巍然编.—东营:中国石油大学出版社,2006.5

ISBN 7-5636-2175-X

Ⅰ.复...　Ⅱ.张...　Ⅲ.①复变函数②积分变换
Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 037697 号

书　　名:复变函数与积分变换
作　　者:张高民　崔俭春　吕巍然

责任编辑:宋秀勇 (0546—8392139)
封面设计:傅荣治

出 版 者:中国石油大学出版社(山东　东营　邮编 257061)
网　　址:http://www.uppbook.com.cn
电子信箱:yibian@hdpu.edu.cn
排 版 者:中国石油大学出版社排版中心
印 刷 者:山东理工大奥星科技发展有限公司
发 行 者:中国石油大学出版社(电话 0546—8392139)
开　　本:180×235　**印张**:10.875　**字数**:223 千字
版　　次:2006 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价:14.80 元

前言

“复变函数与积分变换”是理工科学校许多专业的一门重要基础课程，是工程数学课程体系的一项重要内容.其中复变函数是研究自变量和因变量均为复数的函数，它是实函数的微积分内容在复数范围内的推广与发展.复变函数在自然科学的众多领域，如力学、物理学、地质学、自动控制等都有着重要应用.积分变换是指通过积分运算把一个函数变成另一个函数的变换，本书包括傅立叶变换和拉普拉斯变换.积分变换的理论与方法在解决实际问题中应用广泛，已成为工程技术领域不可缺少的运算工具.

为了使在校理工科大学生更好地学习这门课程，我们参照高等学校工科数学课程指导委员会 1993 年审订的复变函数课程和积分变换课程基本要求并结合我们在数学过程中的体会编写了这本教材.教材编写本着“少而精”和“循序渐进”的原则，力求做到思路清晰，推证简洁，系统性强，适合工科专业的特点.

为了使教材内容相对完整，书中适当增加了一些超出基本要求的内容，并以“ * ”号标出.可根据不同专业选用.

本书编写过程中得到了中国石油大学(华东)数学与计算科学学院、中国石油大学出版社的大力支持，在此谨致以谢意.

编　者

2006 年 7 月

目 录

第 1 章 复数与复变函数 …… (1)
1.1 复数及其四则运算 …… (1)
1.2 复数的几种常见表示法 …… (2)
1.3 复数的乘幂与方根的运算 …… (6)
1.4 复平面上的点集 …… (8)
1.5 复变函数的极限与连续性 …… (10)
习题一 …… (14)
第 2 章 解析函数 …… (16)
2.1 解析函数的概念 …… (16)
2.2 函数可导与解析的充要条件 …… (18)
2.3 五类初等解析函数 …… (22)
2.4 解析函数在平面向量场中的应用 …… (29)
习题二 …… (35)
第 3 章 复变函数的积分 …… (37)
3.1 复变函数积分的概念及基本计算方法 …… (37)
3.2 柯西积分定理 …… (41)
3.3 复合闭路定理 …… (44)
3.4 柯西积分公式与高阶导数公式 …… (47)
3.5 解析函数与调和函数的关系 …… (52)
习题三 …… (53)
第 4 章 级数 …… (56)
4.1 复数数列与复数项级数 …… (56)
4.2 幂级数 …… (59)
4.3 泰勒级数 …… (64)
4.4 洛朗级数 …… (68)
习题四 …… (74)
第 5 章 留数及其应用 …… (76)
5.1 孤立奇点 …… (76)
5.2 留数 …… (83)

5.3 留数在计算定积分中的应用 …… (90)
*5.4 对数留数与辐角原理 …… (94)
习题五 …… (97)
第6章 共形映射 …… (99)
6.1 共形映射的概念 …… (99)
6.2 共形映射的基本问题 …… (102)
6.3 分式线性映射 …… (103)
6.4 几个初等函数所构成的映射 …… (112)
习题六 …… (114)
第7章 傅立叶变换 …… (116)
7.1 傅立叶级数与傅立叶积分 …… (116)
7.2 傅立叶变换 …… (119)
7.3 单位脉冲函数 …… (122)
7.4 傅立叶变换的性质 …… (125)
7.5 卷积 …… (129)
习题七 …… (134)
第8章 拉普拉斯变换 …… (136)
8.1 拉普拉斯变换的概念 …… (136)
8.2 拉普拉斯变换的性质 …… (140)
8.3 卷积 …… (146)
8.4 拉普拉斯逆变换 …… (148)
8.5 拉普拉斯变换的应用 …… (150)
习题八 …… (153)
附录1 傅氏变换简表 …… (155)
附录2 拉氏变换简表 …… (157)
习题答案 …… (161)

第 1 章　复数与复变函数

所谓复变函数指的是变量的变化范围是复数的函数，其定义域、值域都是复平面上的点集. 因此，作为预备内容，本章首先讨论复数的表示及运算、复平面上的几种特殊类型的点集特别是区域的概念，然后将《高等数学》中的极限、连续的概念移植到复变函数中. 这样，我们便为后面研究复变函数建立了一个分析上的框架.

1.1　复数及其四则运算

1. 复数的概念

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 的表达式称为**复数**，其中的 x 和 y 为实数，分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，并记为

$$x=\mathrm{Re}(z),\quad y=\mathrm{Im}(z).$$

i 称为**虚数单位**，满足 $\mathrm{i}^2=-1$. 特别地，当 $x=0, y\neq 0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 称为**纯虚数**.

称 $x-\mathrm{i}y$ 为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**共轭复数**，记为 $\bar{z}$. 显然，实数的共轭是其本身.

两个复数相等是指二者的实部和虚部分别相等. 特别地，若 $x=y=0$，则称 $z=0$.

注　两个复数之间无法比较大小，除非二者都是实数.

2. 复数的四则运算

记 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则两个复数的和、差与乘积定义如下：

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2),\tag{1.1.1}$$

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1).\tag{1.1.2}$$

由乘积定义，对于 $z=x+\mathrm{i}y$，显然有 $z\bar{z}=x^2+y^2$.

当 $z_2\neq 0$ 时，称满足 $z_2z=z_1$ 的复数 z 为 z_1 除以 z_2 的商，记为 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$. 由乘积运算定义不难推出

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\mathrm{i}.\tag{1.1.3}$$

显然，(1.1.3)式又可表示为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{z_2\bar{z}_2}z_1\bar{z}_2.$$

这说明复数的除法是通过分子、分母同乘分母的共轭后转化成乘法来运算的.

3. 运算法则

由定义不难证明,复数运算有着与实数运算相同的规律:

(1) $z_1+z_2=z_2+z_1$,$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$,即复数加法遵循交换律与结合律;

(2) $z_1z_2=z_2z_1$,$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$,即复数乘法遵循交换律与结合律;

(3) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$,即乘法对加法满足分配律.

我们所熟知的有关实数四则运算的恒等式对于复数同样成立,如

$$(z_1\pm z_2)^2=z_1^2\pm 2z_1z_2+z_2^2, \tag{1.1.4}$$

$$z_1^2-z_2^2=(z_1+z_2)(z_1-z_2). \tag{1.1.5}$$

另外,关于共轭运算还有以下公式:

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2,\quad \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2, \tag{1.1.6}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\quad \overline{(\bar{z})}=z, \tag{1.1.7}$$

$$z+\bar{z}=2x,\quad z-\bar{z}=2\mathrm{i}y. \tag{1.1.8}$$

其中 $z=x+\mathrm{i}y$.

以上公式很容易验证,这些工作留给读者自行完成.

例 1.1 设 $z=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$,求 $\bar{z}$,$z\bar{z}$.

解 $z=\dfrac{(1-2\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})}=\dfrac{-5-10\mathrm{i}}{25}=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$,

所以

$$\bar{z}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i},\quad z\bar{z}=\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{1}{5}.$$

1.2 复数的几种常见表示法

1. 复平面、复数的向量表示

通过以下对应方式

$$z=x+\mathrm{i}y\leftrightarrow\text{有序数组}(x,y)\leftrightarrow\text{直角坐标平面中一个点}$$

可以建立全体复数与直角坐标平面中的点之间的一种一一对应关系.基于这个原因,我们把此时的直角坐标平面称为**复平面**(因为其上的点也代表复数).复平面中的 x 轴和 y 轴分别称为**实轴**和**虚轴**(因为其上的点分别代表实数和纯虚数).

有了复平面的概念,后面我们便对“点”和“复数”的称呼不加区分了.即点代表一

个复数,一个复数也代表复平面上的一个点.

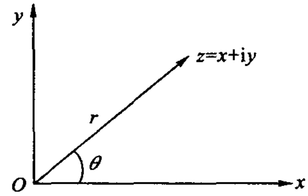


图 1.1

在复平面上,我们还可以用以原点为起点、z 为终点的向量$\overrightarrow{Oz}$表示复数 z(图 1.1).称向量$\overrightarrow{Oz}$的长度为复数 z 的**模或绝对值**,记为 r 或 $|z|$. 显然,复数的模实际上就是它到原点的距离,且有

$$|z|^2=|\bar{z}|^2=z\bar{z}=x^2+y^2.$$

当 $z\neq 0$ 时,称从正实轴到$\overrightarrow{Oz}$的旋转角度为复数 z 的**辐角**,记为 θ 或 $\operatorname{Arg} z$. 此时,有

$$\tan\theta=\tan(\operatorname{Arg} z)=\frac{y}{x}.$$

当 $z=0$ 时,规定其辐角为任意值.

复数 z 的辐角是多值的. 若 θ 是 z 的一个辐角,则 $\theta+2k\pi$ 也是,即

$$\operatorname{Arg} z=\theta+2k\pi,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

我们称取值在区间$(-\pi,\pi]$上的辐角为**辐角主值**,记为 $\arg z$,即

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi.$$

如此规定之后,一个非零复数的辐角主值便是唯一的了. 并且不难发现,它与反正切主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$有以下关系:

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x>0,\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0,y>0,\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0,y<0,\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{当 } x<0,y\geqslant 0,\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{当 } x<0,y<0.\end{cases}$$

根据复数的四则运算法则可知,两个复数的加、减运算与相应向量的加、减运算一致(图 1.2).

注意到,$|z|$表示向量$\overrightarrow{Oz}$的长度,$|z_1-z_2|$表示 z_1 点与 z_2 点之间的距离. 这样,

由图 1.2,我们立即得到

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\tag{1.2.1}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.\tag{1.2.2}$$

(1.2.1)式和(1.2.2)式称为复数的**三角不等式**.

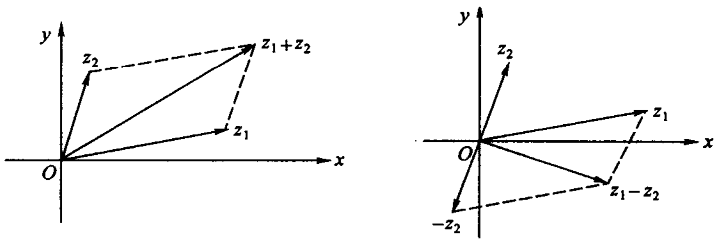


图 1.2

2. 复数的三角表示和指数表示

由定义,复数 z 的模 r 和辐角 θ 实际上就是点 z 的两个极坐标(图 1.3).这样,由直角坐标与极坐标的关系,有

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

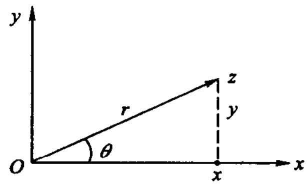


图 1.3

从而复数 z 可表示为

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).\tag{1.2.3}$$

(1.2.3)式称为复数的**三角表达式**.

应用**欧拉公式** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$(我们将在第 2 章介绍该公式),又有

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.\tag{1.2.4}$$

(1.2.4)式称为复数的**指数表达式**.

例 1.2 求下列复数的三角表达式及指数表达式:

$$z_1=-1-\sqrt{3}\mathrm{i},\quad z_2=\mathrm{i},\quad z_3=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}.$$

解 $|z_1|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2,\quad \arg z_1=-\dfrac{2}{3}\pi,$

$$|z_2|=1,\quad \arg z_2=\frac{\pi}{2}.$$

因此,有

$$z_1=2\left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right]=2\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}},$$

$$z_2=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}.$$

对 z_3 直接变形,有

$$
\begin{aligned}
z_3 &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) \\
&= \cos\frac{3}{10}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{10}\pi=\mathrm{e}^{\frac{3}{10}\pi\mathrm{i}}.
\end{aligned}
$$

例 1.3　已知 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$r\neq 0$，试求：

(1) $1+\frac{z}{\bar{z}}$的三角表达式；(2) $1+\frac{z}{\bar{z}}$的最大模和最小模.

解　(1) $1+\frac{z}{\bar{z}}=1+\frac{r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}=1+(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^2$

$$
\begin{aligned}
&=1+\cos^2\theta+2\mathrm{i}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta \\
&=2\cos^2\theta+2\mathrm{i}\sin\theta\cos\theta \\
&=2\cos\theta(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).
\end{aligned}
$$

由此，当 $\cos\theta\geqslant 0$ 时，上式便可视为 $1+\frac{z}{\bar{z}}$的三角表达式；当 $\cos\theta<0$ 时，其三角表达式可写为

$$
\begin{aligned}
1+\frac{z}{\bar{z}} &= -2\cos\theta(-\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta) \\
&= -2\cos\theta[\cos(\theta+\pi)+\mathrm{i}\sin(\theta+\pi)].
\end{aligned}
$$

(2) 根据(1)中 $1+\frac{z}{\bar{z}}$的三角表达式不难发现：

当 $\theta=k\pi$ 时，$\left|1+\frac{z}{\bar{z}}\right|=2$ 为最大；当 $\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}$时，$\left|1+\frac{z}{\bar{z}}\right|=0$ 为最小，其中的 k 为任意整数.

3. 复数的球面表示

取一与复平面相切于原点 O 的球面(图 1.4)，通过 O 点作垂直于复平面的直线与球面相交于另一点 N. 我们称 N 为北极，O 为南极.

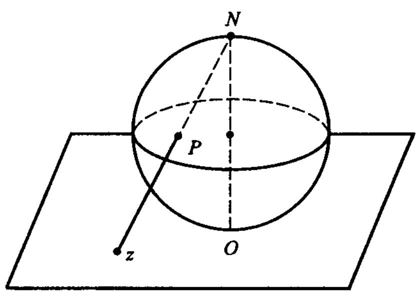


图 1.4

显然，对于复平面上的任一点 z，连线 zN 与球面有唯一的交点 P. 反之，对于球

面上除 N 点外的任一点 P，NP 的延长线也必然与复平面有唯一的交点 z. 这样，我们就可以建立复平面上的点与球面上除 N 外的点之间的一种一一对应关系，因此也就可以用球面上的点 P 表示复数 z，称为复数的**球面表示**.

不难看出，用以上方法，复平面上的任何一个有限点都不可能与球面上的北极点 N 对应. 但显然，随着球面上的点 P 逐渐接近于 N 点，复平面上相应的点 z 逐渐远离原点 O. 因此，我们规定与北极点 N 对应的是复平面上的**无穷远点**，它所代表的复数称为**无穷大**，记为∞，复平面加上无穷远点后称为**扩充复平面**. 不包括无穷远点的复平面称为**有限复平面**.

∞是一特殊的复数. 对其而言，实部、虚部、辐角都是没有意义的，唯一能刻画它的量是其模为正无穷大，即 $|\infty|=+\infty$. 另外，在扩充复平面上，∞可像普通的有限复数一样参加运算. 关于∞的四则运算规定如下：

$$\infty\cdot\infty=\infty, \alpha\pm\infty=\infty\pm\alpha=\infty, \frac{\alpha}{\infty}=0, \frac{\infty}{\alpha}=\infty,$$

其中的 α 为任意的有限复数. 若 $\alpha\neq 0$，还有

$$\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty, \quad \frac{\alpha}{0}=\infty.$$

注意，如无特殊声明，本书后面所谓的“复平面”一般仍指有限复平面.

1.3 复数的乘幂与方根运算

1. 三角表达式下复数的积、商运算规则

记 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\sin\theta_2)$，则由三角函数公式立即得到

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)],\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

这说明，两个复数乘积的模等于各自模的乘积，乘积的辐角等于各自辐角之和，即

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2.\tag{1.3.3}$$

两个复数商的模等于各自模的商，商的辐角等于被除数与除数的辐角之差，即

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2.\tag{1.3.4}$$

从而，在三角表达式下，复数的积、商运算变得非常简单.

注意，由于辐角的多值性，(1.3.3)式的第二式和(1.3.4)式的第二式属于集合等式. 其含义是指，对于等式右端 Arg z_1 的任意一个值和 Arg z_2 的任意一个值，等式左端必有一个值与其对应. 以后遇到类似的情况都应这样理解.

若记 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，则由(1.3.1)式和(1.3.2)式得

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad (r_2 \neq 0).$$

2. 复数的乘幂运算

对于正整数 n，称 n 个 z 相乘为 z 的 n 次幂，记为 z^n.

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，那么由(1.3.3)式立即得到

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta). \tag{1.3.5}$$

(1.3.5)式称为**乘幂运算公式**. 特别地，当 $r=1$ 时，有

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta. \tag{1.3.6}$$

(1.3.6)式称为**棣莫弗(De Moivre)公式**.

另外，(1.3.5)式也可表示为 $z^n = r^n e^{in\theta}$.

例 1.4　已知 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r\neq 0$，试求 $\frac{1}{z^n}$，其中 n 为正整数.

解　由(1.3.4)式和(1.3.5)式，有

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)} = r^{-n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)]. \tag{1.3.7}$$

同实数一样，对于正整数 n，定义 $z^{-n}=\frac{1}{z^n}(z\neq 0)$. 这样，例 1.4 说明，当 n 为负整数时，乘幂运算公式(1.3.5)仍然成立.

3. 复数的方根运算

对于正整数 n，若 $w^n=z$，则称复数 w 为 z 的 n 次方根，记为 $w=\sqrt[n]{z}$.

记 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，那么，由乘幂运算公式得

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

两端比较，并注意到，若两个复数相等，则二者的模一定相等，而二者的辐角可相差 2π 的整数倍，由此得到

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi,$$

即　$\rho=\sqrt[n]{r}$，$\varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}$，其中 k 为任意整数.

至此，我们得到复数的**方根运算公式**：

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\ e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}. \tag{1.3.8}$$

考虑到三角函数的周期性，公式中的 k 只需连续地取 n 个整数即可，比如，可取 $k=0,1,\cdots,n-1$，当 k 取其他整数时，根值又重复出现.

例 1.5 求 $\sqrt{-1}$ 和 $\sqrt[3]{-1+\mathrm{i}}$.

解

$$\sqrt{-1}=\sqrt{\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi}$$
$$=\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}=\begin{cases}\mathrm{i}, & k=0,\\ -\mathrm{i}, & k=1.\end{cases}$$
$$\sqrt[3]{-1+\mathrm{i}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right)}$$
$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{3}\right),$$

代入 $k=0,1,2$，得到三个不同的根：

$$w_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),\quad w_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{11}{12}\pi\right),$$
$$w_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{19}{12}\pi\right).$$

注 由方根运算公式不难看出，任一非零复数开 n 次方有且仅有 n 个不同的根，且这 n 个根恰是圆心在原点、半径为 $\sqrt[n]{r}$ 的圆内接正 n 边形的 n 个顶点.

1.4 复平面上的点集

复变函数的定义域和值域应是复平面上的点集. 故此，本节便来介绍几个关于平面点集的常见概念和术语，特别是区域的概念.

1. 平面点集的几个基本概念

复平面上以 z_0 为圆心、r 为半径的圆周内部的点构成的集合称为 z_0 的一个半径为 r 的**邻域**，记为

$$U(z_0,r)=\{z \mid |z-z_0|<r\}. \tag{1.4.1}$$

而 $U^\circ(z_0,r)=\{z \mid 0<|z-z_0|<r\}$ 称为 z_0 的一个半径为 r 的**去心邻域**.

以下设 D 为一个平面点集.

称 z_0 为平面点集 D 的一个**内点**，若存在 z_0 的某个邻域 $U(z_0,r)$，使得它完全被 D 包含，即

$$U(z_0,r)\subset D.$$

称 z_0 为平面点集 D 的一个**边界点**，若 z_0 的任意一个邻域内都既有属于 D 的

点，也有不属于 D 的点. D 的所有边界点的全体称为 D 的**边界**，记为 ∂D. 如，以 z_0 为圆心、r 为半径的圆周便是 z_0 点的半径为 r 的邻域的边界.

若平面点集 D 中的每一点都是内点，则称 D 是一个**开集**. 如，根据定义，任何一个圆周内部的点构成的集合都是开集.

2. 区域

若平面点集 D 是一开集，且又具有连通性，则称其为一个**区域**.

所谓连通性是指：对于 D 内任意两点 z_1 和 z_2，总能够用一条完全位于 D 内的折线连接起来(图 1.5).

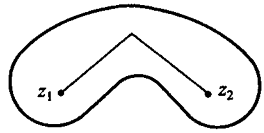


图 1.5

若一个区域能被某个圆周所包含，则称其为**有界区域**，否则称为**无界区域**.

区域加上其边界后构成的集合称为**闭区域**.

如，任何一个圆周的内部点构成的集合是一有界区域，而其外部点构成的集合则是一无界区域；满足不等式 $R_1 \leqslant |z-z_0| \leqslant R_2\,(0<R_1<R_2)$ 的点 z 构成的集合是一闭区域；而点集 $\{z \mid |z|<1\} \cup \{z \mid |z-2|<1\}$ 虽是开集，但不具连通性，因而不是区域.

3. 平面曲线复方程及简单闭曲线

我们知道，一个参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \tag{1.4.2}$$

在几何上可以代表一条平面曲线，自然地，我们称

$$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$$

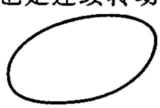
为这条平面曲线的复数形式的参数方程，简称为**复方程**.

如，$z=R(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\,(R>0, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 表示以原点为心、半径为 R 的圆圈；$z=x+x^2\mathrm{i}\,(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 表示一段抛物线.

若(1.4.2)式中，$x(t)$ 和 $y(t)$ 均为 t 的连续函数，则称曲线是**连续**的；若 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 存在且连续，$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$，则称曲线是**光滑**的. 光滑曲线的几何特征是有切线，且动点连续变化时切线也是连续转动的. 若曲线是由有限段光滑曲线连接

简单曲线

(a)



简单闭曲线

(b)

非简单曲线

(c)

图 1.6

而成的，则称其为**逐段光滑**或**分段光滑**.

一条连续但自身不相交的曲线称为**简单曲线**(图 1.6(a))；一条自身闭合(即首尾相接)的简单曲线称为**简单闭曲线**(图 1.6(b)).

4. 区域的单连通与多连通

若区域 D 内的任意一条简单闭曲线所围的内部都仍然在 D 内，则称 D 为一个**单连通区域**. 不是单连通的区域称为**多连通区域**.

如，圆盘 $\{z \mid |z-z_0|<R\}(R>0)$ 是一单连通区域，而圆环域 $\{z \mid R_1<|z-z_0|<R_2\}$ $(0<R_1<R_2)$ 则是多连通的.

单连通区域 D 的一个显著特征是：属于 D 的任何一条简单闭曲线，在 D 内可经过连续的变形而缩成一点，多连通区则不具备这个特征.

显然，复平面上的任何一条简单闭曲线的内部为有界单连通区域，而其外部则是无界多连通区域.

1.5 复变函数的极限与连续性

1. 复变函数概念

有了《高等数学》中实变量函数的概念作为基础，复变函数的概念也就不难理解了. 简单讲，复变函数就是两个复变量之间的一种对应关系：若复变量 z 在平面点集 D 内任取一值时，按照某种对应关系，复变量 w 总有确定的值与其对应，则称 w 是 z 的**复变函数**，记为 $w=f(z)$. 其中，点集 D 称为**定义域**，由函数值 w 构成的集合 G 称为**值域**.

若对给定的 z 值，都有唯一的 $w=f(z)$ 与之对应，则称 $f(z)$ 为**单值函数**，否则称为**多值函数**. 例如，$w=z^n$(n 为正整数)是单值函数，而 $w=\sqrt{z}$ 和 $w=\operatorname{Arg} z$ 则是多值函数.

按照函数 $w=f(z)$ 的对应关系，对于值域 G 中的每一个 w，一定存在 D 中的一个或多个 z，使得 $f(z)=w$，由此确定了 z 也是 w 的函数，称为 $w=f(z)$ 的**反函数**，记为 $z=f^{-1}(w)$.

若记 $w=u+\mathrm{i}v, z=x+\mathrm{i}y$，则 u 和 v 皆为 x 和 y 的实变函数，因而复变函数又可表示为

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y), \tag{1.5.1}$$

即用一对实的二元函数来表示. 其中的 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 分别称为函数的实部和虚部.

例如，$w=z^2=(x+\mathrm{i}y)^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$，其实部为 $u=x^2-y^2$，虚部为 $v=$

$2xy$.

不难看出，通过表达式 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，我们可以将某些关于 $f(z)$ 的复变函数问题转化为两个二元实变函数的相应问题. 事实上，后面在很多场合下我们正是这样做的.

2. 映射

所谓映射，指的是两个集合间的一种对应关系(图 1.7)：若对集合 A 中的任一元素 a，按照某种对应关系 σ，总有集合 B 中的元素 b(一个或多个)与其对应，则称 σ 是集合 A 到集合 B 的一个**映射**，记作 $\sigma(a)=b$，或 $\sigma:a\to b$. 映射前的元素 a 和映射后的

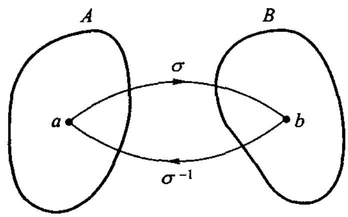


图 1.7

元素 b 分别称为**原像**和**像**.

反过来，不妨假设集合 B 中的每一元素都是映射 σ 的像(否则把非像元素从 B 中剔除即可)，那么对于集合 B 中的任一元素 b，总有集合 A 中的元素 a 存在，使得 $\sigma(a)=b$，由此，我们又确立了一个从集合 B 到集合 A 的映射，称为 σ 的**逆映射**，记为 σ^{-1}.

引入映射的概念后，数学中的各类函数就都可以理解为从自变量的变化范围(定义域)到因变量的变化范围(值域)的映射，而反函数则是相应的逆映射. 特别地，复变函数就是从复平面中的某个点集(定义域)到另一点集(值域)的映射.

映射能在一定程度上反映一个复变函数在几何方面的一些特性. 例如，如果我们把自变量 z 所在的平面称为 z 平面，而把因变量 $w=u+\mathrm{i}v$ 用另外一个平面(称其为 w 平面)表示，那么，由 $w=z^n=(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$($n$ 为正整数)不难发现，函数 $w=z^n$ 作为映射有下面的特性：将 z 平面上的顶点在原点、夹角为 α 的角形域映射成 w 平面上的顶点在原点、夹角为 $n\alpha$ 的角形域(图 1.8(a))；将 z 平面上的圆心在原点的单位圆周映射成 w 平面上的仍然是圆心在原点的单位圆周(图 1.8(b)). 再如 $w=z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$($\alpha$ 为实常数)，显然 w 与 z 的模相等，但 w 的辐角比 z 的辐角增加 α，因此 $w=z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 作为映射具有旋转的特性. 同理可以分析 $w=z+z_0$(z_0 为常数)具有平移的特性.

若 $w=f(z)$ 与它的反函数 $z=f^{-1}(w)$ 都是单值的，则称 $w=f(z)$ 是一一对应的. 此时，也称其定义域 D 与值域 G 这两个集合是一一对应的. 若对 D 中任意两个点 z_1 和 z_2，只要 $z_1\neq z_2$，就有 $f(z_1)\neq f(z_2)$，则称 $w=f(z)$ 是**单叶**的. 单叶解析函数