全国高等农林院校"十一五"规划教材

线性代数学习指导与解题指南

梁保松　曹殿立　主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数
学习指导与解题指南

梁保松　曹殿立　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导与解题指南 / 梁保松，曹殿立主编.
北京：中国农业出版社，2006.8
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 7-109-09924-5

Ⅰ.线… Ⅱ.①梁…②曹… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 083777 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
出版人：傅玉祥
责任编辑 朱 雷

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm 1/16 印张：14.75
字数：262 千字
定价：20.00 元

前　　言

本书是梁保松、苏本堂主编的高等农林院校十五规划教材《线性代数及其应用》的配套使用教材．按照配套教材的要求，本书对总体框架进行了整合，内容按章编写，每章结构如下：

一、内容提要　此版块对每一章、节必须掌握的概念、性质和公式进行了归纳，供证明、计算时查阅．

二、范例解析　此版块对每章、节题型进行了分类解析，并对每种题型的解题思路、技巧进行了归纳总结，有些题给出了多种解法，对容易出错的地方还作了详尽注解．

三、自测题　此版块配置了适量难易程度适中的习题，并给出了参考答案。所选题型是编者多年教学实践中积累的成果，供读者自测本章内容掌握的程度．

四、考研题解析　此版块涵盖了1987年至2006年的考研试题，并作了详尽解答，供有志考研的读者选用．

本书在编写的过程中注意专题讲述与范例解析相结合，注重数学思维与数学方法的论述，以求思想观点、方法上的融会贯通．尤以“注意”的形式对相关专题加以分析和延拓，这是本书的特色．本书还具有概念清晰、内容全面、方法多样、综合性强等特点．

本书是编者在长期教学实践中积累的教学资料与经验之汇编，是在深入研究教学大纲与研究生数学考试大纲之后撰写而成的．我们期望本书不仅是广大学生学习数学的指导书、教师教学的参考书，而且也是报考硕士研究生者的一册广度与深度均较为合适的复习书，

更期望能使读者在思维方法与解决问题能力等方面都有相当程度的提高.

参加本书编写的有：梁保松、曹殿立、侯建文、叶耀军、陈振、胡丽萍、李晔、韩忠海、张香伟、孙成金、温建、李长旗、白洪远、侯贤敏、刘芳、王亚伟等. 最后由梁保松教授统一定稿.

错漏之处，敬请各位同仁与朋友们扶正，我们不胜感激！

编　者

2006年6月2日

内 容 提 要

本书是与高等农林院校十五规划教材《线性代数及其应用》（梁保松、苏本堂主编）配套使用的学习指导书、教师参考书和考研复习书．其主要内容有：行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵、二次型.

本书内容按章编写，每章分四个部分：一、内容提要；二、范例解析；三、自测题；四、考研题解析.

本书可作为学习指导书供学生使用，也可以作为教师参考书供教师使用，也可以作为考研复习书供考研者使用.

主　编　梁保松　曹殿立

副主编　侯建文　叶耀军　陈　振　胡丽萍

李　晔

编　委　韩忠海　张香伟　孙成金　温　建

李长旗　白洪远　侯贤敏　刘　芳

王亚伟

目　　录

第一章　行列式

内容提要

一、n 阶行列式

1. 排列的逆序与奇偶性

定义 1　在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，若一个大数排在一个小数的前面，则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序个数的总和，称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

定义 2　一个排列中的某两个数 i,j 互换位置，其余的数不动，得到一个新的排列. 对于排列所施行的这样的一个变换称为一次对换，用 (i,j) 表示. 相邻两个数的对换称为邻换.

定理 1　一次对换改变排列的奇偶性.

推论 1　奇排列变成自然排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然排列的对换次数为偶数.

推论 2　$n \geqslant 2$ 时，全体 n 级排列中，奇排列和偶排列的个数相等，各为 $n!/2$ 个.

2. n 阶行列式的定义

符号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它是 $n!$ 项的代数和. 每一项是取自于 D 的不同行与不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$. 项 $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)}$，当 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为奇排列时，这一项的符号为负，当 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为偶排列时，这一项的符号为正. 即

$$D=\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

二、行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

性质 2 交换行列式的两行(或两列),行列式改变符号.

推论 1 如果行列式有两行(列)完全相同,则行列式等于零.

性质 3 用一个数 k 乘行列式,等于行列式某一行(列)的所有元素都乘以 k. 也可以说,如果行列式某一行(列)的元素有公因子,则可以将公因子提到行列式外面.

推论 1 如果行列式有一行(列)元素全为零,则该行列式等于零.

推论 2 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则这个行列式等于零.

性质 4 如果行列式的某一行(列)元素都可以表示为两项的和,则这个行列式可以表示为两个行列式的和.

性质 5 行列式的第 i 行(列)元素的 k 倍加到第 j 行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

三、行列式按行(列)展开

定义 1 在 n 阶行列式 D 中任意取定 k 行和 k 列,位于这些行列交叉处的元素所构成的 k 阶行列式叫做行列式 D 的一个 k 阶子式.

定义 2 在 n 阶行列式 D 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素,剩余的元素按原次序构成的一个 $n-1$ 阶行列式,称为 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij}. 称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式,记为 A_{ij}. 即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

定理 1 一个 n 阶行列式 D,如果其第 i 行(或第 j 列)的元素除 a_{ij} 外都为 0,则行列式 D 等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积,即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

定理 2 行列式等于它的任一行(列)的所有元素与它们对应的代数余子式乘积的和. 即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{t=1}^{n}a_{it}A_{it}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{t=1}^{n}a_{tj}A_{tj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

定理 3 行列式的某一行(列)的元素与另外一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

四、克莱姆法则

定理 1 (克莱姆(Cramer)法则)含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$,当其系数行列式$|\boldsymbol{A}|\neq 0$时,有且仅有一个解

$$x_1=D_1/|\boldsymbol{A}|,\quad x_2=D_2/|\boldsymbol{A}|,\cdots,\quad x_n=D_n/|\boldsymbol{A}|.$$

其中,D_j 是把系数行列式$|\boldsymbol{A}|$的第 j 列换为方程组的常数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所得到的 n 阶行列式($j=1,2,3,\cdots,n$).

定理 2　n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是方程组的系数行列式等于零.

范 例 解 析

例 1　在 6 阶行列式 $D_6=|a_{ij}|_{6\times 6}$中,证明 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$是 D_6 的一项,并求这项应带的符号.

解　调换项中元素位置,使行下标为自然排列,得 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}=a_{13}a_{26}a_{32}a_{44}a_{51}a_{65}$. 此时右端列下标排列为 362415. 因为右端是位于 D_6 的不同行不同列的 6 个元素的乘积,故它是 D_6 的一项. 该项所带符号可由右端列下标排列的逆序数的奇偶性确定. 因 $\tau(362415)=8$,故所给项应带正号.

例 2　问 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$,$a_{13}a_{14}a_{44}a_{21}$是不是下列 4 阶行列式 D_4 中的项. 若是,应带什么符号?

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} \\ a_{21} & a_{32} & a_{23} & a_{34} \\ a_{31} & a_{14} & a_{42} & a_{43} \\ a_{12} & a_{41} & a_{13} & a_{24} \end{vmatrix}.$$

解　注意到 a_{ij} 的下标并不表示 a_{ij} 在 D 中的位置,不能形式地根据下标判别所给两项是不是 D 中的项. 应根据这些元素实际在 D_4 中所处位置的行下标、列下标来判定.

由于 a_{11},a_{22}均位于 D_4 的第一行,即为同行元素,$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$不是 D_4 的项. 而 $a_{13}a_{14}a_{44}a_{21}$中 4 元素依次位于 D_4 中的第 4,3,1,2 行,第 3,2,4,1 列. 因而它们是位于 D_4 中不同行不同列 4 个元素的乘积,故 $a_{13}a_{14}a_{44}a_{21}$是 D_4 中一项,因 $\tau(4312)+\tau(3241)=5+4=9$,故这一项在 D_4 中带负号.

例 3　一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数如果比 n^2-n 多,则此行列式的值等于零. 为什么?

解　根据行列式定义,行列式的每一项都是 n 个元素的连乘积. 而 n 阶行列

式共有 n^2 个元素，若等于零的元素个数大于 n^2-n，那么不等于零的元素个数就小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，因而该行列式的每一项至少含一个零元素，所以每项都等于零. 故此行列式的值等于零.

例 4 求多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

中 x^4 和 x^3 项的系数.

解 $f(x)$中含 x 因子的元素有 $a_{11}=5x, a_{21}=x, a_{22}=x, a_{33}=x, a_{41}=x, a_{44}=2x$. 因而，含有 x 为因子的元素 a_{ij} 的列下标只能取 $j_1=1, j_2=1,2, j_3=3, j_4=1,4$.

于是含 x^4 的项中元素 a_{ij} 的列下标只能取 $j_1=1, j_2=2, j_3=3, j_4=4$，相应的 4 元排列只有一个自然顺序排列 1234，故含 x^4 的项为

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=(-1)^0\,5x\cdot x\cdot x\cdot 2x=10x^4.$$

含 x^3 项中元素 a_{ij} 的列下标只能取 $j_2=1, j_3=3, j_4=4$ 与 $j_2=2, j_3=3, j_4=1$. 相应的 4 元排列只有 2134，4231，含 x^3 的相应项为

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{41}=-2x^3, (-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-3x^3,$$

故 $f(x)$中 x^3 的系数为$-2-3=-5$，x^4 的系数为 10.

例 5 计算下列行列式：

(1) $$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix};$$

(2) $$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & a & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & a & a & 1 & 2 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a & a & a & a & \cdots & a & 1 \end{vmatrix}.$$

解 (1)D_n 中第 1 行的元素相同，将其他各行改写成两分行之和，去掉与第 1 行成比例的分行，得

$$
D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1+0 & 1+1 & 1+0 & \cdots & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+2 & \cdots & 1+0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & \cdots & 1+(n-1) \end{vmatrix}
=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}
=1\cdot 1\cdot 2\cdots(n-1)=(n-1)!.
$$

(2) D_n 虽有第 1 列元素相同，但将其他各列写成两分列之和，使其一分列与第 1 列成比例，去掉成比例的分列后，并不能将行列式化简，因此自第 n 列起，后列减去前列，再去掉与第 1 列成比例的分列，即得三角形行列式

$$
D_n \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{c_{i+1}-c_i} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1-a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 0 & 1-a & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a-1 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a-2 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a-2 & -1 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a-2 & -1 & -1 & \cdots & -a & 0 \\ 1 & n-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -a \end{vmatrix}
=(-1)(-a)^{n-2}=(-1)^{n-1}a^{n-2}.
$$

例 6 证明

$$
D_4=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0.
$$

证 将 D_4 的第 2、3、4 列展开，去掉与第 1 列成比例的分列，得

$$D_4=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{成比例的分列}]{\text{去掉与第 2 列}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 4a+8 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 4b+8 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 4c+8 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 4d+8 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{成比例的分列}]{\text{去掉与第 3 列}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a & 2 & 4a \\ b^2 & 2b & 2 & 4b \\ c^2 & 2c & 2 & 4c \\ d^2 & 2d & 2 & 4d \end{vmatrix} \xlongequal{\text{2、4 两列成比例}} 0.$$

例 7 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

解 D_n 的行、列和都等于 $a+n-1$，先将各列加到第 1 列，再化成三角形行列式，有

$$D_n=\begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a+n-1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a+n-1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}(a+n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&a-1&0&\cdots&0&0\\0&0&a-1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a-1&0\\0&0&0&\cdots&0&a-1\end{vmatrix}$$

$=(a+n-1)(a-1)^{n-1}$.

例 8 设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\2&3&4&5\\6&7&8&9\end{vmatrix}$，求 $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}$. 其中 A_{i2} 为 D 中元素 $a_{i2}(i=1,2,3,4)$ 的代数余子式.

解法一 因 A_{i2} 为 D 中元素 a_{i2} 的代数余子式($i=1,2,3,4$)，故将 D 中第 2 列元素依次换为 3,7,4,8 即得

$$3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}=\begin{vmatrix}1&3&3&4\\5&7&7&8\\2&4&4&5\\6&8&8&9\end{vmatrix}=0.$$

解法二 因 3,7,4,8 恰为 D 中第 3 列元素，而 $A_{12},A_{22},A_{32},A_{42}$ 为 D 中第 2 列元素的代数余子式，故 $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}$ 表示 D 中第 3 列元素与第 2 列的对应元素的代数余子式乘积的和，故 $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}=0$.

例 9 已知 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=27,$$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$. 其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4,5)$ 为 D_5 中第 4 行第 j 列元素的代数余子式.

解 由已知条件得

$$\begin{cases}(1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43})+(2\cdot A_{44}+2\cdot A_{45})=27,\\(2\cdot A_{41}+2\cdot A_{42}+2\cdot A_{43})+(1\cdot A_{44}+1\cdot A_{45})=0.\end{cases}$$

解上面方程得 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9$；$A_{44}+A_{45}=18$.

例 10 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

解 将第 2,3,…,n 列依次乘以 $x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 后都加到第 1 列,再按第 1 列展开得:

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}.$$

例 11 计算行列式

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$;

(2) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b & & & & & a & \\ b & & & & & & & a \end{vmatrix}$.

解 (1)按第 1 行展开法:

$$D_n=a\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$