◎ 教学月刊社 编

浙江高考第1套
重难点突破

江南才子书系

高考

数学

◎ 重难点突破，获取高考决定性胜利

◎ 一流学校奉献经典题例，题题精要

◎ 一流名师指点重点难点，点点到位

前 言

"浙江高考第一套·重难点突破"是"浙江高考第一套"系列图书中的一个重要品种。

早在2004年春浙江省准备第一次自主高考命题时，教学月刊社、浙江江南书社就在第一时间推出了由省内一流名师、特级教师编写的"浙江高考第一套"。经过两年的省内自主高考命题实践和应考实践，广大师生积累了不少经验，"浙江高考第一套"也与广大师生经受了实战的洗礼，为广大师生在高考中取得优异成绩作出了显著贡献，被广大师生称赞为"真正的浙江人自己的高考第一套"。

现在，"浙江高考第一套"除"实战演练"丛书（首批一级重点中学模拟卷）外，又隆重推出"重难点突破"丛书，这是在广大师生强烈要求下的又一重要举措。

"浙江高考第一套·重难点突破"共有《语文》《数学》《英语》《文科综合》《理科综合》5个分册。每个分册均抓住本科考试中出现的重点题型、难点题型、热点题型、新题型、在考试中容易失分从而影响或左右学生成绩的关键题型，对这些题型进行分类指导和提出开放性的解题思路，展开针对性的强化训练，帮助学生走出学习困境，提高高考成绩，取得高考关键分。这些题型在高考试题中比重大、分量重，并具有较大的区分度，而且又具有很强的新颖性。谁对这些题型的解法熟能生巧、灵活贯通，谁的解题水平、运用能力就提高得快，成绩也就高人一筹。

本书除了像一般复习用书关注知识、技能外，更注重的是以浙江省高考考纲为根本依据，以浙江省高考试题样式为模板，加大了对学生方法与能力培养的力度，力图体现高考新理念，同时又对书中各类题型进行了实用易懂的举例精讲，配套的训练题充分体现了高考命题新趋势，方向性明确，针对性强。因此，本丛书是学生高考复习的得力助手。

参加本书编写的作者都是浙江省的特级教师和名师。他们教学经验丰富，专业水平高，勇于探索，勤于实践。他们定能帮助莘莘学子指点迷津，解困答疑，掌握技巧，顺利解题，在高考中取得好成绩。

编者

2005年12月

目　　录

专题1 抽象函数突破

● **考点释要**

在近年来全国各地的高考模拟卷中经常可见这样一类函数问题：题设中只给出这类函数的一些性质，如单调性、周期性、奇偶性，其函数的解析式不确定，要求考生据此探索该函数的其他性质，我们把这类问题称为抽象函数问题．抽象函数问题，可以将函数、方程和不等式等内容综合于一题，也可以通过构造一定的背景，定义一些新知，将高等数学内容有机地渗透在具体问题中，从而在"抽象"中具体考查考生的逻辑推理能力、抽象思维能力与创新能力．

事实上，抽象函数可视为某些具体函数的"模特"，如下表：

	函数方程	代表函数
1	$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$	$f(x)=kx$
2	$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$	$f(x)=a^x$
3	$f(x_1-x_2)=\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}$	$f(x)=a^x$
4	$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$	$f(x)=\log_a x$
5	$f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)=f(x_1)-f(x_2)$	$f(x)=\log_a x$
6	$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$	$f(x)=x^2,f(x)=x^n$
7	$f(x_1)+f(x_2)=2f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot f\left(\dfrac{x_1-x_2}{2}\right)$	$f(x)=\cos x$
8	$f(x_1)+f(x_2)=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$	$f(x)=\log_a \dfrac{1-x}{1+x}$
9	$f(x)=-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$f(x)=\log_a x,f(x)=x-\dfrac{1}{x}$

● **考题例析**

例1 (1) 设$f(x)$是定义在R上的奇函数，且$y=f(x)$的图象关于直线$x=\frac{1}{2}$对称，则$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=$ ________；

(2) 已知函数$f(x)$的定义域为N，且对任意正整数x，都有$f(x)=f(x-1)+f(x+1)$．若$f(2)=2006$，则$f(2006)=$ ________．

【解析】 (1) 因为$y=f(x)$的图象关于直线$x=\frac{1}{2}$对称，故有$f(x)=f(1-x)$．又由$f(x)$是定义在R上的奇函数，有$f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x)=f(1-x)=-f(x-1)$．

$\therefore f(x)+f(x-1)=0$，$\therefore f(1)+f(0)=0$，$f(2)+f(3)=0$，$f(4)+f(5)=0$.

$\because$ 又易知 $f(0)=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=0$.

(2) 因为 $f(x)=f(x-1)+f(x+1)$，所以 $f(x+1)=f(x)+f(x+2)$，两式相加得 $0=f(x-1)+f(x+2)$，即 $f(x+3)=-f(x)$，$\therefore$ $f(x)$是以 6 为周期的周期函数，$2006=6\times334+2$. $\therefore$ $f(2006)=f(2)=2006$.

【说明】 关于周期性，有以下重要结论：

(1)已知函数 $f(x)$对任意实数 x，都有 $f(x+m)=-f(x)$，则 $2m$ 是 $f(x)$的一个周期；

(2) 已知函数 $f(x)$对任意实数 x，都有 $f(x+m)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$，则 $2m$ 是 $f(x)$的一个周期；

(3) 已知函数 $f(x)$对任意实数 x，都有 $f(x+m)=-\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$，则 $4m$ 是$f(x)$的一个周期；

(4) 已知函数 $f(x)$对任意实数 x，都有 $f(a+x)=f(a-x)$，且 $f(b+x)=f(b-x)$，则 $2|a-b|$是 $f(x)$的一个周期($a\neq b$).

例 2 (1) 已知函数 $f(2^x)$的定义域是$[1,2]$，则函数 $f(x)$的定义域是(　　)

A. $[0,1]$　　B. $[2,4]$

C. $\mathbf{R}$　　D. $(0,+\infty)$

(2)函数 $y=f(x-1)$的反函数是 $y=f^{-1}(x-1)$，则下列等式正确的是(　　)

A. $f(x)=f(x-1)$

B. $f(x)=-f(x-1)$

C. $f(x)-f(x-1)=1$

D. $f(x)-f(x-1)=-1$

【解析】 (1) $f(2^x)$的定义域是$[1,2]$，是指 $1\leqslant x\leqslant 2$，而 $f(x)$的定义域是指 2^x 在$[1,2]$上的值域，故选 B.

(2) $y=f(x-1)$的反函数是 $y=f^{-1}(x-1)$，故 $x-1=f(y)$，$x=f(y)+1$，即 $y=f^{-1}(x-1)$的反函数是 $y=f(x)+1$，从而 $f(x)+1=f(x-1)$，故选 D.

【说明】 关于定义域、反函数、周期性等的抽象函数问题是高考选择填空题中的热点之一，解答该类问题关键是要弄清概念. 如本例中的第(1)小题，有些同学根据 $f(2^x)$的定义域是$[1,2]$，得到的是 $1\leqslant 2^x\leqslant 2$. 第(2)小题求抽象函数的反函数也可以遵循"一解二换"的步骤.

例 3 函数 $f(x)$满足 $f(x+y)+1=f(x)+f(y)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，且 $x>\dfrac{1}{2}$时，$f(x)<0$.

(1)设 $a_n=f(n)$，$(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列 a_n 的通项；

(2)证明当 $x\in\left[\dfrac{1}{2^{n+1}},\dfrac{1}{2^n}\right](n\in\mathbf{N}^*)$时，$f(x)\leqslant 1-\dfrac{1}{2^n}$；

(3)判断 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的单调性，并加以证明.

【解析】 (1) $\because f(x+y)+1=f(x)+f(y)$，$\therefore f(0)=1$.

又 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，$\therefore f(1)=f\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)-1=-1$.

令 $x=n$，$y=1$，则 $f(n+1)=f(n)+f(1)-1=f(n)-2$，

$\therefore a_1=-1$，$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-f(n)=-2$.

故$\{a_n\}$是首项 $a_1=-1$，公差 $d=-2$ 的等差数列，$a_n=f(n)=1-2n$.

(2)证明：①当 $n=1$ 时，$x\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$，则 $2x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，$\therefore f(2x)\leqslant 0$.

又 $f(2x)+1=2f(x)$，$\therefore f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f(2x)\leqslant\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$.

故当 $n=1$ 时命题成立.

②假设当 $n=k$ 时命题成立，即当 $x\in\left[\frac{1}{2^{k+1}},\frac{1}{2^k}\right](k\in\mathbf{N}^*)$时，$f(x)\leqslant1-\frac{1}{2^k}$.

则当 $n=k+1$ 时，$x\in\left[\frac{1}{2^{k+2}},\frac{1}{2^{k+1}}\right]$，$2x\in\left[\frac{1}{2^{k+1}},\frac{1}{2^k}\right]$，

则 $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f(2x)\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^{k+1}}$，故当 $n=k+1$ 时命题成立.

综上①②所述，当 $x\in\left[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right](n\in\mathbf{N}^*)$时，$f(x)\leqslant1-\frac{1}{2^n}$.

(3) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调递减. 证明如下：设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)-1$.

当 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$时，$f(x_2-x_1)<0$，

$\therefore f(x_2)-f(x_1)<0$；

当 $0<x_2-x_1\leqslant\frac{1}{2}$时，由(2)知当 $x\in\left[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right]$时，$f(x)\leqslant1-\frac{1}{2^n}<1$.

$\therefore$ 当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$时，$f(x)<1$，即 $f(x_2-x_1)-1<0$，

$\therefore f(x_2)-f(x_1)<0$.

$\therefore$ 当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_2)<f(x_1)$，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

例 4 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称，对任意 $x_1,x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，且 $f(1)=a>0$.

(1)求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$及 $f\left(\frac{1}{4}\right)$的值；

(2)求证：$f(x)$是周期函数；

(3)记 $a_n=f\left(2n+\frac{1}{2n}\right)$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln a_n)$ 的值.

【解析】 (1)因为对 $x_1,x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，

所以 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant0$，$x\in[0,1]$.

$f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$，

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot f\left(\frac{1}{4}\right)=\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2$，$f(1)=a>0$，

$f\left(\frac{1}{2}\right)=a^{\frac{1}{2}}$，$f\left(\frac{1}{4}\right)=a^{\frac{1}{4}}$.

(2)证明：依题意 $y=f(x)$关于直线 $x=1$ 对称，则 $f(1+x)=f(1-x)$，即 $f(x)=f(2-x)(x\in\mathbf{R})$，

又由 $f(x)$是偶函数知 $f(-x)=f(x)(x\in\mathbf{R})$，

$\therefore f(-x)=f(2-x)(x\in\mathbf{R})$，将上式中的 $-x$ 以 x 代换，得

$f(x)=f(x+2)(x\in\mathbf{R})$.

这表明 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，且 2 是它的一个周期.

(3)由(1)知 $f(x)\geqslant0$，$x\in[0,1]$.

$\because f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(n\cdot\frac{1}{2n}\right)=f\left(\frac{1}{2n}+(n-1)\cdot\frac{1}{2n}\right)=f\left(\frac{1}{2n}\right)\cdot f\left((n-1)\frac{1}{2n}\right)$

$=\cdots=f\left(\frac{1}{2n}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2n}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2n}\right)\cdot\cdots$

$\cdot f\left(\frac{1}{2n}\right)=\left[f\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^n$,

$f\left(\frac{1}{2}\right)=a^{\frac{1}{2}}$, $\therefore f\left(\frac{1}{2n}\right)=a^{\frac{1}{2n}}$,

$\because f(x)$的一个周期是 2,

$\therefore f\left(2n+\frac{1}{2n}\right)=f\left(\frac{1}{2n}\right)$,因此 $a_n=a^{\frac{1}{2n}}$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}\ln a\right)=0$.

【说明】 本题主要考查函数的概念、图象,函数的奇偶性和周期性以及数列极限等基础知识;考查运算能力和逻辑思维能力.认真分析处理好各知识的相互联系,抓住条件 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 找到问题的突破口.技巧与方法主要体现在由 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 变形为 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$.

例 5 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足:对任意实数 m,n,总有 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$,且当 $x>0$ 时,$0<f(x)<1$.

(1)试求 $f(0)$的值;

(2)判断 $f(x)$的单调性并证明你的结论;

(3)设 $A=\{(x,y)\mid f(x^2)\cdot f(y^2)>f(1)\}$,$B=\{(x,y)\mid f(ax-y+\sqrt{2})=1,a\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,试确定 a 的取值范围;

(4)试举出一个满足条件的函数 $f(x)$.

【解析】 (1)在 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$中,令 $m=1,n=0$,得:$f(1)=f(1)\cdot f(0)$.

因为 $f(1)\neq 0$,所以 $f(0)=1$.

(2)要判断 $f(x)$的单调性,可任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,且设 $x_1<x_2$.

在已知条件 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$中,若取 $m+n=x_2$,$m=x_1$,则已知条件可化为:$f(x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2-x_1)$.

由于 $x_2-x_1>0$,所以 $1>f(x_2-x_1)>0$.

为比较 $f(x_2)$,$f(x_1)$的大小,只需考虑 $f(x_1)$的正负即可.

在 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$中,令 $m=x$,$n=-x$,则得 $f(x)\cdot f(-x)=1$.

$\because x>0$ 时,$0<f(x)<1$,$\therefore$ 当 $x<0$ 时,$f(x)=\frac{1}{f(-x)}>1>0$.

又 $f(0)=1$,所以,综上可知,对于任意 $x_1\in\mathbf{R}$,均有 $f(x_1)>0$.

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=f(x_1)[f(x_2-x_1)-1]<0$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

(3)首先利用 $f(x)$的单调性,将有关函数值的不等式转化为不含 f 的式子.

$\because f(x^2)\cdot f(y^2)>f(1)$,即 $x^2+y^2<1$.

$f(ax-y+\sqrt{2})=1=f(0)$,即 $ax-y+\sqrt{2}=0$.

又 $A\cap B=\varnothing$,所以,直线 $ax-y+\sqrt{2}=0$ 与圆面 $x^2+y^2<1$ 无公共点.

所以,$\frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{a^2+1}}\geqslant 1$,解得 $-1\leqslant a\leqslant 1$.

(4)如 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 等.

【说明】 根据题意,将一般问题特殊化,也即选取适当的特值(如本题中令 $m=1,n=0$;以及 $m+n=x_2,m=x_1$ 等)是解决有关抽象函数问题的非常重要的手段;另外,如果能找到一个适合题目条件的函数,则有助于问题的思考和解决.

例 6 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足:

①值域为$(-1,1)$,且当 $x>0$ 时,$-1<f(x)<0$;

②对于定义域内任意的实数 x,y,均满足:$f(m+n)=\frac{f(m)+f(n)}{1+f(m)f(n)}$.

试回答下列问题：

(1)试求 $f(0)$的值；

(2)判断并证明函数 $f(x)$的单调性；

(3)若函数 $f(x)$存在反函数 $g(x)$，求证：$g\left(\frac{1}{5}\right)+g\left(\frac{1}{11}\right)+\cdots+g\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)>g\left(\frac{1}{2}\right)$.

【解析】 (1)在 $f(m+n)=\frac{f(m)+f(n)}{1+f(m)f(n)}$中，令 $m>0$，$n=0$，则有 $f(m)=\frac{f(m)+f(0)}{1+f(m)f(0)}$，即 $f(m)[1+f(m)f(0)]=f(m)+f(0)$，也即 $f(0)[(f(m))^2-1]=0$.

由于函数 $f(x)$的值域为$(-1,1)$，所以，$[(f(m))^2-1]\neq 0$，所以 $f(0)=0$.

(2)函数 $f(x)$的单调性必然涉及到 $f(x)-f(y)$，于是，由已知 $f(m+n)=\frac{f(m)+f(n)}{1+f(m)f(n)}$，我们可以联想到：

是否有 $f(m-n)=\frac{f(m)-f(n)}{1-f(m)f(n)}$ (*).

这个问题实际上是 $f(-n)=-f(n)$是否成立.

为此，我们首先考虑函数 $f(x)$的奇偶性，也即 $f(-x)$与 $f(x)$的关系. 由于$f(0)=0$，所以，在 $f(m+n)=\frac{f(m)+f(n)}{1+f(m)f(n)}$中，令 $n=-m$，得 $f(m)+f(-m)=0$.

所以，函数 $f(x)$为奇函数. 故(*)式成立.

所以，$f(m)-f(n)=f(m-n)[1-f(m)f(n)]$.

任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，故 $f(x_2-x_1)<0$ 且 $-1<f(x_2)$，$f(x_1)<1$. 所以，$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)[1-f(x_2)f(x_1)]<0$.

所以，函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

(3)由于函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以，函数 $f(x)$必存在反函数 $g(x)$，由原函数与反函数的关系可知：$g(x)$也为奇函数；$g(x)$在$(-1,1)$上单调递减；且当 $-1<x<0$时，$g(x)>0$.

为了证明本题，需要考虑 $g(x)$的关系式.

在(*)式的两端，同时用 g 作用，得 $m-n=g\left[\frac{f(m)-f(n)}{1-f(m)f(n)}\right]$，令 $f(m)=x$，$f(n)=y$，则 $m=g(x)$，$n=g(y)$，则上式可改写为：

$$g(x)-g(y)=g\left(\frac{x-y}{1-xy}\right).$$

不难验证：对于任意的 $x,y\in(-1,1)$，上式都成立.(根据一一对应)

这样，我们就得到了 $g(x)$的关系式. 这个式子给我们以提示：即可以将 $\frac{1}{n^2+3n+1}$写成$\frac{x-y}{1-xy}$的形式，则可通过裂项相消的方法化简求证式的左端.

事实上，由于

$$\frac{1}{n^2+3n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)-1}=\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{1-\frac{1}{(n+1)(n+2)}}=\frac{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{n+2}\right)},$$

所以 $g\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)=g\left(\frac{1}{n+1}\right)-g\left(\frac{1}{n+2}\right)$.

所以 $g\left(\frac{1}{5}\right)+g\left(\frac{1}{11}\right)+\cdots+g\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)$

$$=\left[g\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{3}\right)\right]+\left[g\left(\frac{1}{3}\right)-\right.$$

$g\left(\frac{1}{4}\right)\Big]+\cdots+\left[g\left(\frac{1}{n+1}\right)-g\left(\frac{1}{n+2}\right)\right]$

$=g\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{n+2}\right)$

$=g\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(-\frac{1}{n+2}\right)>g\left(\frac{1}{2}\right)$.

【说明】 一般来说，涉及函数奇偶性的问题，首先应该确定 $f(0)$ 的值.

例 7 已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足下列条件：对任意的实数 x_1,x_2，都有 $\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$ 和 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$，其中 λ 是大于 0 的常数. 设实数 a_0,a,b 满足 $f(a_0)=0$ 和 $b=a-\lambda f(a)$.

(1)求证 $\lambda\leqslant1$，并且不存在 $b_0\neq a_0$，使得 $f(b_0)=0$；

(2)求证 $(b-a_0)^2\leqslant(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$；

(3)求证 $[f(b)]^2\leqslant(1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

【解析】 (1)不妨设 $x_1>x_2$，由 $\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)\cdot[f(x_1)-f(x_2)]$，可知 $f(x_1)-f(x_2)>0$，$\therefore f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，$\therefore$ 不存在 $b_0\neq a_0$，使得 $f(b_0)=0$. 又 $\because\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)\cdot[f(x_1)-f(x_2)]\leqslant(x_1-x_2)^2$，$\therefore\lambda\leqslant1$.

(2)要证 $(b-a_0)^2\leqslant(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$，即证 $\lambda[(a-a_0)^2+f^2(a)]\leqslant2f(a)(a-a_0)$ (*).

不妨设 $a>a_0$，由 $\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)\cdot[f(x_1)-f(x_2)]$，得 $f(a)-f(a_0)\geqslant\lambda(a-a_0)$，即 $f(a)\geqslant\lambda(a-a_0)$，则 $2f(a)(a-a_0)\geqslant2\lambda(a-a_0)^2$. ①

由 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$ 得 $f(a)-f(a_0)\leqslant a-a_0$，即 $f(a)\leqslant a-a_0$，则 $\lambda[(a-a_0)^2+f^2(a)]\leqslant2\lambda(a-a_0)^2$. ②

由①②可得 $\lambda[(a-a_0)^2+f^2(a)]\leqslant2f(a)(a-a_0)$，$\therefore(b-a_0)^2\leqslant(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$.

(3) $[f(b)]^2=[f(b)-f(a)+f(a)]^2=[f(b)-f(a)]^2+2f(a)[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2$. 由条件可知 $[f(b)-f(a)]^2\leqslant(b-a)^2$，$f(a)=\frac{a-b}{\lambda}$，代入上式得，原式 $\leqslant(b-a)^2-2\frac{b-a}{\lambda}[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2=\lambda^2[f(a)]^2-\frac{2}{\lambda}(b-a)[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2\leqslant\lambda^2[f(a)]^2-\frac{2}{\lambda}\lambda(b-a)^2+[f(a)]^2=\lambda^2[f(a)]^2-2\lambda^2[f(a)]^2+[f(a)]^2=(1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

例 8 已知函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有定义，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$，且满足 $x,y\in(-1,1)$ 时，有 $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

(1)求证：$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为奇函数；

(2)对数列 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\frac{2x_n}{1+x_n^2}$，求 $f(x_n)$；

(3)求证 $\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\cdots+\frac{1}{f(x_n)}>-\frac{2n+5}{n+2}$.

【解析】 (1)令 $x=y=0$，则 $2f(0)=f(0)$，$\therefore f(0)=0$.

令 $y=-x$，则 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$，$\therefore f(-x)=-f(x)$，$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 为奇函数.

(2) $f(x_1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$，$f(x_{n+1})=f\left(\frac{2x_n}{1+x_n^2}\right)=f\left(\frac{x_n+x_n}{1+x_n\cdot x_n}\right)=f(x_n)+f(x_n)=2f(x_n)$，$\therefore\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=2$. 即 $\{f(x_n)\}$ 是以 -1 为首项、2 为公比的等比数列，$\therefore f(x_n)=-2^{n-1}$.

(3) $\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\cdots+\frac{1}{f(x_n)}$

$$=-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=-\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=-\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=-2+\frac{1}{2^{n-1}}>-2,$$

而 $-\frac{2n+5}{n+2}=-\left(2+\frac{1}{n+2}\right)=-2-\frac{1}{n+2}<-2$,

$\therefore \frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\cdots+\frac{1}{f(x_n)}>-\frac{2n+5}{n+2}$.

【说明】 本例是函数、方程、数列、不等式等代数知识的交汇题，是考查分析问题和解决问题能力的典型范例. 从一般的数列问题中化归出等比(等差)数列是解决数列问题常用的技巧.

●精题集萃

一、选择题

1. 若奇函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(2)=1$, $f(x+2)=f(x)+f(2)$, 则 $f(5)=$ ( )

A. 0　B. 1　C. $\frac{5}{2}$　D. 5

2. 已知 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$, 将 $y=f(2x-1)$ 的图象向左平移 2 个单位, 再关于 x 轴对称后所得到的函数的反函数是 ( )

A. $y=\frac{-3-f^{-1}(x)}{2}$

B. $y=\frac{-3+f^{-1}(-x)}{2}$

C. $y=\frac{3-f^{-1}(x)}{2}$

D. $y=\frac{3-f^{-1}(-x)}{2}$

3. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 且 $f(3)=0$, 则不等式 $xf(x)<0$ 的解集是 ( )

A. $(-3,3)$　B. $(-3,0)\cup(0,3)$

C. $(-3,0)$　D. $(0,3)$

4. 若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的定义域都是全体实数, 且它们的图象关于直线 $x=a$($a\neq0$ 的常数) 对称. 则下面等式一定成立的是 ( )

A. $f(a)-g(a)=0$

B. $f(a)+g(a)=0$

C. $f(-a)=g(a)$

D. $f(a)=g(-a)$

5. 函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $(-\infty,0]$ 上是增函数. 若 $f(a)\leqslant f(2)$, 则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $a\leqslant2$　B. $a\geqslant-2$

C. $-2\leqslant a\leqslant2$　D. $a\leqslant-2$ 或 $a\geqslant2$

6. 若函数 $f(x)$ 同时具有以下两个性质: ①$f(x)$ 是偶函数; ②对任意实数 x, 都有 $f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$. 则 $f(x)$ 的解析式可以是 ( )

A. $f(x)=\cos x$

B. $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

C. $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$

D. $f(x)=\cos6x$

7. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 且 $f(x)>0$, $f'(x)>0$, 那么函数 $y=xf(x)$ ( )

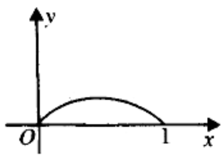
A. 存在极大值　B. 存在极小值

C. 是增函数　D. 是减函数

8. 在 $y=2^x$, $y=\log_2x$, $y=x^2$, $y=\cos2x$ 这四个函数中, 当 $0<x_1<x_2<1$ 时, 使 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 恒成立的函数的个数是 ( )

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

9. 已知函数 $f(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的图象的一段圆弧(如图所示). 若 $0<x_1<x_2<1$,则 ( )



A. $\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_2)}{x_2}$

B. $\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_2)}{x_2}$

C. $\frac{f(x_1)}{x_1}>\frac{f(x_2)}{x_2}$

D. 前三个判断都不正确

10. 设 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,且定义域内任意的 $x_1\neq x_2$,都有 $f(x_1-x_2)=\frac{1+f(x_1)f(x_2)}{f(x_2)-f(x_1)}$,则 $f(x)$ 是 ( )

A. 奇函数

B. 偶函数

C. 既是奇函数也是偶函数

D. 非奇非偶函数

11. 已知函数 $f(x)$,当 $x\in[4,6]$ 时,$y\in[4,6]$. 那么函数 $f(2-x)$ 与 $f(x)$ ( )

A. 图象关于原点对称,且 $x\in[4,6]$ 时,$y\in[4,6]$

B. 图象关于直线 $x=1$ 对称,且 $x\in[-4,-2]$ 时,$y\in[4,6]$

C. 图象关于原点对称,且 $x\in[-4,-2]$ 时,$y\in[-4,-2]$

D. 图象关于直线 $x=1$ 对称,且 $x\in[-6,-4]$ 时,$y\in[2,4]$

12. 已知 $f(x)$ 是奇函数,且当 $x_1>x>x_2>0$ 时,恒有 $f(x)>\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)$. 则 ( )

A. $f(-x_1)>f(-x_2)$

B. $f(-x_1)<f(-x_2)$

C. $f(-x_1)=f(-x_2)$

D. 不能确定

13. 已知 $f(x)$ 是 **R** 上的偶函数,对 $x\in$ **R** 都有 $f(x+6)=f(x)+f(3)$ 成立. 若 $f(1)=2$,则 $f(2005)=$ ( )

A. 2005 B. 2 C. 1 D. 0

14. 已知函数 $y=f(x)$ 在 $(0,2)$ 上是增函数,$y=f(x+2)$ 是偶函数. 则下列结论正确的是 ( )

A. $f(1)<f\left(\frac{5}{2}\right)<f\left(\frac{7}{2}\right)$

B. $f\left(\frac{7}{2}\right)<f(1)<f\left(\frac{5}{2}\right)$

C. $f\left(\frac{7}{2}\right)<f\left(\frac{5}{2}\right)<f(1)$

D. $f\left(\frac{5}{2}\right)<f(1)<f\left(\frac{7}{2}\right)$

15. 已知定义在 **R** 上的函数 $y=f(x)$ 满足下列三个条件:①对任意的 $x\in$ **R** 都有 $f(x+4)=f(x)$;②对于任意的 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$;③$y=f(x+2)$ 的图象关于 y 轴对称. 则下列结论中,正确的是 ( )

A. $f(4.5)<f(6.5)<f(7)$

B. $f(4.5)<f(7)<f(6.5)$

C. $f(7)<f(4.5)<f(6.5)$

D. $f(7)<f(6.5)<f(4.5)$

16. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**. 有下列三个命题:

(1)若存在常数 M,使得对任意 $x\in$ **R**,有 $f(x)\leqslant M$,则 M 是函数 $f(x)$ 的最大值;

(2)若存在 $x_0\in$ **R**,使得对任意 $x\in$ **R**,且 $x\neq x_0$,有 $f(x)<f(x_0)$,则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值;

(3)若存在 $x_0\in$ **R**,使得对任意 $x\in$ **R**,有 $f(x)\leqslant f(x_0)$,则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值.

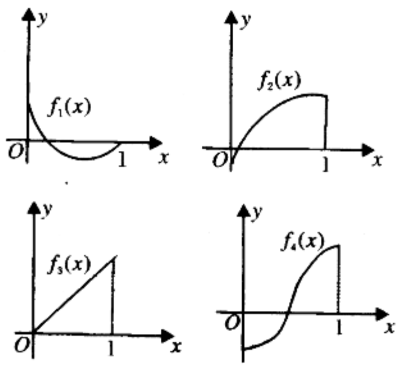
这些命题中,真命题的个数是 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

17. 已知函数 $y=f(2x+1)$ 是定义在 **R** 上的奇函数,函数 $y=g(x)$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称. 则 $g(x)+g(-x)$ 的值为 ( )

A. 2　　B. 0　　C. 1　　D. -2

18. 如图所示，$f_i(x)(i=1,2,3,4)$是定义在$[0,1]$上的四个函数，其中满足性质"对$[0,1]$中任意的x_1和x_2，任意$\lambda\in[0,1]$，$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$恒成立"的只有　　（　　）



A. $f_1(x),f_3(x)$　　B. $f_2(x)$

C. $f_2(x),f_3(x)$　　D. $f_4(x)$

19. 若$f(x)$和$g(x)$都是定义在实数集$\mathbf{R}$上的函数，且方程$x-f[g(x)]=0$有实数解，则$g[f(x)]$不可能是　　（　　）

A. $x^2+x-\frac{1}{5}$　　B. $x^2+x+\frac{1}{5}$

C. $x^2-\frac{1}{5}$　　D. $x^2+\frac{1}{5}$

20. 已知$f(x+y)=f(x)+f(y)$，且$f(1)=2$. 则$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$不能等于　　（　　）

A. $f(1)+2f(1)+\cdots+nf(1)$

B. $f\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$

C. $n(n+1)$

D. $n(n+1)f(1)$

二、填空题

21. 已知$f(2x+1)$是偶函数. 则函数$f(2x)$的图象的对称轴是________.

22. 已知函数$f(x)$对一切实数x、y满足$f(0)\neq0$，$f(x+y)=f(x)f(y)$；且当$x<0$时，$f(x)>1$. 则当$x>0$时，$f(x)$的取值范围是________.

23. 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，$f(x+2)=f(x)$；当$0\leqslant x\leqslant1$时，$f(x)=x$，则$f(7.5)$等于________.

24. 若函数$y=f(x)$的反函数是$y=g(x)$，$f(a)=b$，$ab\neq0$. 则$g(b)$等于________.

25. 若单调函数$y=f(x+1)$的图象经过点$(-2,1)$，则函数$y=f^{-1}(x-1)$的图象必过点________.

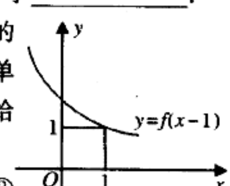
26. 已知函数

$$f(n)=\begin{cases}n-3 & (n\geqslant10),\\ f[f(n+5)] & (n<10),\end{cases}$$（其中$n\in\mathbf{N}$），那么$f(7)=$________.

27. 若函数$f(x)$具有性质：①$f(x)$为偶函数；②对任意$x\in\mathbf{R}$，都有$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$，则函数$f(x)$的解析式可以是________.（只须写出满足条件的$f(x)$的一个解析式即可）

28. 设函数$f(x)=\frac{1-2x}{1+x}$. 若$g(x)$的图象与$y=f^{-1}(x+1)$的图象关于直线$y=x$对称，那么$g(2)$的值等于________.

29. 定义在$\mathbf{R}$上的函数$y=f(x-1)$是单调递减函数（如图）. 给出四个结论：



①$f(0)=1$；②$f(1)<1$；③$f^{-1}(1)=0$；④$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=0$. 其中正确结论的个数是________.

30. 已知定义在$\mathbf{R}$上的偶函数$f(x)$满足条件：$f(x+1)=-f(x)$，且在$[-1,0]$上是增函数. 给出下面关于$f(x)$的命题：①$f(x)$是周期函数；②$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称；③$f(x)$在$[0,1]$上是增函数；④$f(x)$在$[1,2]$上是减函数；

⑤ $f(2)=f(0)$. 其中正确的命题序号是____________.(注:把你认为正确的命题序号都填上)

三、解答题

31. 已知函数 $f(x)$ 对定义域内的任意两个实数 a,b,当 $a<b$ 时,都有 $f(a)<f(b)$. 求证:方程 $f(x)=0$ 至多有一个实根.

32. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义,$f(0)=f(1)$,且对于任意 $x_1,x_2\in[0,1]$,都有 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$. 求证:对于任意 $x_1,x_2\in[0,1]$,都有 $|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

33. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,1)$ 上的函数,且满足:① 对任意 $x\in(0,1)$,恒有 $f(x)>0$;② 对任意 $x_1,x_2\in(0,1)$,恒有 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}+\frac{f(1-x_1)}{f(1-x_2)}\leqslant 2$. 求证:

(1) 对任意 $x\in(0,1)$,都有 $f(x)=f(1-x)$;

(2) 对任意 $x_1,x_2\in(0,1)$,都有 $f(x_1)=f(x_2)$.

34. 设 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^+$ 上的函数,当 $x>1$ 时,$f(x)<0$,且对于任意正实数 x_1,x_2,恒有 $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=f(x_1)-f(x_2)$.

(1) 求证:当 $0<x<1$ 时,$f(x)>0$;

(2) 若 $f\left(\frac{1}{3}\right)=1$,试解不等式 $f(x)-f\left(\frac{1}{x-5}\right)\geqslant -2$.

35. 函数 $y=f(x)$ $(x\neq 0)$ 是奇函数,且当 $x\in\mathbf{R}^+$ 时是增函数. 若 $f(1)=0$,求不等式 $f\left[x\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]<0$ 的解集.

36. 已知函数 $f(x)$ 对任意的正实数 x,y,都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2y(x+y)+1$,且 $f(1)=1$.

(1) 若 $x\in\mathbf{N}^*$,试求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 若 $x\in\mathbf{N}^*$ 且 $x\geqslant 2$ 时,不等式 $f(x)\geqslant(a+7)x-(a+10)$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

37. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的函数,且对于任意的 $a,b\in\mathbf{R}$,都满足 $f(a\cdot b)=af(b)+bf(a)$.

(1) 求 $f(0)$,$f(1)$ 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性,并证明你的结论;

(3) 若 $f(2)=2$,$u_n=\frac{f(2^{-n})}{n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,求数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项的和 S_n.

38. 已知 $f(x)=\frac{g(x)-1}{g(x)+1}$,且 $f(x)$,$g(x)$ 的定义域都是 $\mathbf{R}$,$g(x)>0$,$g(1)=2$,$g(x)$ 是增函数,$g(m)\cdot g(n)=g(m+n)$,$(m,n\in\mathbf{R})$. 求证:

(1) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数;

(2) 当 $n\in\mathbf{N}$,$n\geqslant 3$ 时,$f(n)>\frac{n}{n+1}$.

39. 已知定义域为 $\mathbf{R}^+$ 的函数 $f(x)$,对于任意 $x,y\in\mathbf{R}^+$ 时,恒有 $f(xy)=f(x)+f(y)$.

(1) 求证:当 $x\in\mathbf{R}^+$ 时,$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$;

(2) 若 $x>1$ 时,恒有 $f(x)<0$. 求证:$f(x)$ 必有反函数;

(3) 设 $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数. 求证:$f^{-1}(x)$ 在定义域内恒有 $f^{-1}(x_1+x_2)=f^{-1}(x_1)\cdot f^{-1}(x_2)$.

40. 已知定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足:$f(1)=1$;当 $x<0$ 时,$f(x)<0$;对于任意的实数 x,y,都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(1) 求证:$f(x)$ 为奇函数;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足条件:$0<a_1<1$,$2-a_{n+1}=f(2-a_n)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. 求证:$0<a_n<1$.

专题 2　信息迁移题透视

●**考点释要**

在近几年的高考试卷中，相继出现了一些内容立意新、情景设置新、设问方式新或题型结构新的新型题．由于新型题设计思想新颖，题目形式新鲜，解答要求有新意，能有效地避免试题的模式化，能够使考生在新的情景中实现知识的迁移，从而创造性地解决问题，真正表现出自己的学习能力．

新型信息问题没有统一的解法，但可通过归纳猜想寻找问题的规律，也可先通过转化，化归为熟悉的知识再寻求解题思路．

信息题的主要类型有：定义新知型，学科交汇型，实际应用型，图表信息型，结论开放型等．

●**考题例析**

例 1　(1)在 **R** 上定义运算⊗：$x\otimes y=x(1-y)$．若不等式 $(x-a)\otimes(x+a)<1$ 对任意实数 x 成立，则　(　　)

A. $-1<a<1$　　B. $0<a<2$

C. $-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$

(2)给定实数 x，定义 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数，则下列结论不正确的是　(　　)

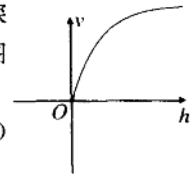
A. $x-[x]\geqslant 0$

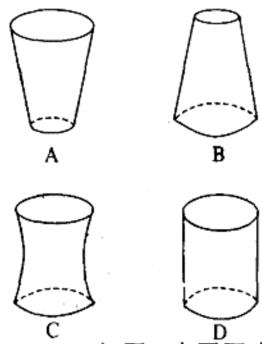
B. $x-[x]<1$

C. $x-[x]$ 是周期函数

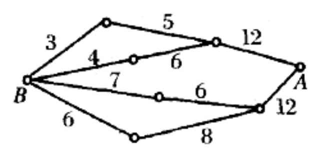
D. $x-[x]$ 是偶函数

(3)向高为 H 的水瓶中注水，注满为止．如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图象如图所示，那么水瓶的形状是　(　　)





(4)如图，小圆圈表示网络的结点，结点之间的连线表示它们有网线相联，连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量．现从结点 A 向结点 B 传递信息，信息可以分开沿不同的路线同时传递，则单位时间内传递的最大信息量为　(　　)



A. 26　　B. 24　　C. 20　　D. 19

(5)将正整数 n 表示成 k 个正整数的和(不计较各数的次序)，称为正整数 n 分成 k 个部分的一个划分；一个划分中的各加数与另一个划分中的各加数不全相同，则称为不同的划分．将正整数 n 划分成 k 个部分的不同划分个数记为 $P(n,k)$，则 $P(10,3)$ 等于　(　　)

A. 8　　B. 10　　C. 3　　D. A_{10}^3

【解析】 (1)本题定义了一种新的运算法则，由此运算法则可将$(x-a)\otimes(x+a)<1$转化为$(x-a)[1-(x+a)]<1$，去括号化简可得$x^2-x-a^2+a+1>0$，因为对任意实数x成立，所以$\Delta=1-4(-a^2+a+1)<0$，解得$-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$，选C.

(2)$\because f(x)=x-[x]$，$f(0.2)=0.2$，$f(-0.2)=-0.2+1=0.8$，显然$f(0.2)\neq f(-0.2)$，$\therefore f(x)=x-[x]$不是偶函数. 选D.

(3)运用已学知识无法建立四个函数的全部解析式，也无法作出它们的图象，因此，解答时，应跳出常规思维的圈子，从函数图象的特征结合四个几何体的形状整体分析. 因为函数$V=f(h)$是增函数，当h从0递增到H的过程中，V的增大由急趋缓，所以结合选择支应选B. 当然，本题也可以做出定量的判断，如可取h轴上点$\left(\frac{H}{2},0\right)$作$h$轴垂线，交图象于点$P\left(\frac{H}{2},f\left(\frac{H}{2}\right)\right)$，由图象知$f\left(\frac{H}{2}\right)>\frac{1}{2}f(H)$，结合选择项只有B适合此条件.

(4)可以说本题并不需要学生运用太多的技巧，做太多的运算，解决问题的关键是正确理解"最大信息量"的含义，从图中应该得到最大信息量为$3+4+6+6=19$，故选择D.

(5)关于正整数的n个划分问题不是中学数学的内容，因此对于学生而言可谓新知识，根据题中给出的定义，知求$P(10,3)$相当于求"将正整数10表示成3个不同的正整数的和共有几种表示法(不计较各数的次序)"，不难算得有8种表示法，故应选A.

例2　(1)定义运算$a*b$为：$a*b=\begin{cases}a(a\leqslant b),\\ b(a>b),\end{cases}$例如，$1*2=1$. 则函数$f(x)=\sin x*\cos x$的值域为__________.

(2)已知凸函数的性质定理："如果函数$f(x)$在区间D上是凸函数，则对于区间D内的任意$x_1,x_2,\cdots,x_n$，有$\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]\leqslant f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$"，若函数$y=\sin x$在区间$(0,\pi)$上是凸函数，那么在$\triangle ABC$中，$\sin A+\sin B+\sin C$的最大值是__________.

(3)若函数$f(x)$具有性质：①$f(x)$为偶函数；②对任意$x\in\mathbf{R}$，都有$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$. 则函数$f(x)$的解析式可以是__________.(只须写出满足条件的$f(x)$的一个解析式即可).

(4)对于任意实数x,y，定义运算$x\oplus y=ax+by+cxy$，其中a,b,c是常数，等式右边的运算是通常的加法与乘法运算. 现已知$1\oplus2=3$，$2\oplus3=4$，并且有一个非零实数m，使得对于任意实数x，都有$x\oplus m=x$，则实数m的值为__________.

(5)已知n次多项式$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$. 如果在一种算法中，计算$x_0^k(k=2,3,4,\cdots,n)$的值需要$k-1$次乘法，计算$P_3(x_0)$的值共需要9次运算(6次乘法，3次加法)，那么计算$P_n(x_0)$的值共需要__________次运算.

下面给出一种减少运算次数的算法：$P_0(x)=a_0$，$P_{k+1}(x)=xP_k(x)+a_{k+1}(k=0,1,2,\cdots,n-1)$. 利用该算法，计算$P_3(x_0)$的值共需要6次运算，计算$P_n(x_0)$的值共需要__________次运算.

【解析】 (1)由题意可得函数在一个周期内的表达式. 即

$$f(x)=\begin{cases}\sin x(\sin x\leqslant\cos x)\\ \cos x(\sin x>\cos x)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sin x\left(0<x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)\\ \cos x\left(\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{5\pi}{4}\right)\\ \sin x\left(\dfrac{5\pi}{4}\leqslant x<2\pi\right)\end{cases}$$

作出图象易得函数的值域为 $\left[-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

(2)由凸函数的性质可得：$\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\leqslant\sin\dfrac{A+B+C}{3}=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，当 $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ 时取等号.

(3)根据题中给出的信息，可构造函数 $y=\cos 4x$ 或 $y=a(a\in\mathbf{R})$ 等.

(4) $m=4$，$\begin{cases}a+2b+2c=3,\\2a+3b+6c=4,\\ax+mb+cmx=x,\end{cases}$ 并且 $ax+mb+cmx=x$ 对一切 x 都成立，

$\therefore\begin{cases}a+cm=1,\\mb=0,\end{cases}$ $\because m\neq0$，$\therefore b=0$ 代入解得 $a=5$，$c=-1$，$\therefore m=4$.

(5)由题意知道 x_0^k 的值需要 $k-1$ 次运算，即进行 $k-1$ 次 x_0 的乘法运算可得到 x_0^k 的结果. 对于 $P_3(x_0)=a_0x_0^3+a_1x_0^2+a_2x_0+a_3$，这里 $a_0x_0^3=a_0\times x_0\times x_0\times x_0$ 进行了 3 次运算，$a_1x_0^2=a_1\times x_0\times x_0$ 进行了 2 次运算，a_2x_0 进行 1 次运算，最后，$a_0x_0^3$，$a_1x_0^2$，a_2x_0，a_3 之间的加法运算进行了 3 次，这样，$P_3(x_0)$ 总共进行了 $3+2+1+3=9$ 次运算.

对于 $P_n(x_0)=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n$ 总共进行了 $n+n-1+n-2+\cdots+1=\dfrac{(n+1)n}{2}$ 次乘法运算及 n 次加法运算，所以总共进行了 $\dfrac{n(n+1)}{2}+n=\dfrac{n(n+3)}{2}$ 次.

由改进算法可知：

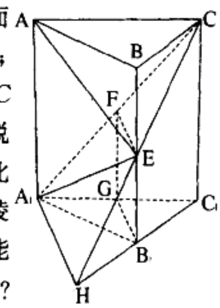
$P_n(x_0)=x_0P_{n-1}(x_0)+a_n$，$P_{n-1}(x_0)=x_0P_{n-2}(x_0)+a_{n-1}$，…，$P_1(x_0)=x_0P_0(x_0)+a_1$，$P_0(x_0)=a_0$.

运算次数从后往前算，和为：$2+2+\cdots+2=2n$ 次. 故应填 $\dfrac{1}{2}n(n+3)$；$2n$.

例 3 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1$，E 是棱 BB_1 的中点.

(1)求证：平面 $A_1EC\perp$ 平面 AA_1C_1C；

(2)若平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成锐二面角为 $60°$，则称此正三棱柱为"黄金棱柱". 试问此三棱柱能否成为"黄金棱柱"？请说明理由.



(3)设 $AB=a$，求 V_{A-A_1EC} 的值.

【解析】(1)延长 CE 交 C_1B_1 延长线于 H，取 A_1C 的中点记为 F，连 EF，则 $EF\mathbin{/\mkern-5mu/}A_1H$.

$\because\angle A_1B_1H=180°-\angle A_1B_1C_1=120°$，又 $A_1B_1=B_1C_1$，

$\therefore\angle HA_1B_1=30°$，$\therefore\angle HA_1C_1=90°$，即 $HA_1\perp A_1C_1$. 又 $AA_1\perp A_1H$，

$\therefore HA_1\perp$ 平面 AA_1C_1C，$\therefore EF\perp$ 平面 AA_1C_1C. $EF\subset$ 平面 A_1EC，$\therefore$ 平面 $A_1EC\perp$ 平面 AA_1C_1C.

(2)若此正三棱柱为"黄金棱柱"，则平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成锐二面角为 $60°$. 由(1)知 $\angle CA_1C_1=60°$，$\therefore CC_1=\sqrt{3}A_1C_1$. $\because A_1C_1=AB$，$CC_1=AA_1$，$\therefore AA_1=\sqrt{3}AB$，这与已知 $AB=AA_1$ 矛盾，所以此三棱柱不能成为"黄金棱柱".

(3) $V_{A-A_1EC}=V_{E-AA_1C}=\dfrac{1}{3}\cdot EF\cdot\dfrac{1}{2}AA_1\cdot AC=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\times a\times a=\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

【说明】 本题(1)还可作如下证明：取 A_1C, A_1C_1 的中点，分别记为 F, G，连 EF, B_1G, FG，则 $EFGB_1$ 为平行四边形，证明 $B_1G\perp$ 平面 AA_1C_1C，从而 $EF\perp$ 平面 AA_1C_1C，平面 $A_1EC\perp$ 平面 AA_1C_1C. (2)可利用公式 $\cos\theta=\dfrac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}$ 求得.

例 4 对于函数 $f(x)$, $x\in[a,b]$，以及函数 $g(x)$, $x\in[a,b]$，若对任意的 $x\in[a,b]$，总有 $\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)}\right|\leqslant\dfrac{1}{10}$，那么称 $f(x)$ 可被 $g(x)$ 替代(通常 $g(x)\neq f(x)$).

(1)试给出一个可以替代函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 的函数；

(2)试判断 $f(x)=\sqrt{x}$ $(x\in[4,16])$ 是否可被函数 $g(x)=\dfrac{x+6}{5}$ $(x\in[4,16])$ 替代.

【解析】 (1)由定义解得 $\dfrac{9}{10x^2}\leqslant g(x)\leqslant\dfrac{11}{10x^2}$，取 $g(x)=\dfrac{21}{20x^2}$.

(2) $\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)}=1-\dfrac{1}{5}\left(\sqrt{x}+\dfrac{6}{\sqrt{x}}\right)\in\left[-\dfrac{1}{10},\dfrac{5-2\sqrt{6}}{5}\right]$, $\therefore$ $\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)}\right|\in\left[0,\dfrac{1}{10}\right]$，可被替代.

例 5 这是一个计算机程序的操作说明：

(1)初始值 $x=1$, $y=1$, $z=0$, $n=0$；

(2) $n=n+1$(将当前 $n+1$ 的值赋予新的 n)；

(3) $x=x+2$(将当前 $x+2$ 的值赋予新的 x)；

(4) $y=2y$(将当前 $2y$ 的值赋予新的 y)；

(5) $z=z+xy$(将当前 $z+xy$ 的值赋予新的 z)；

(6)如果 $z>7000$，则执行语句(7)，否则回语句(2)继续进行；

(7)打印 n, z；

(8)程序终止.

由语句(7)打印出的数值为__________，__________.

【解析】 设 $n=i$ 时，x, y, z 的值分别为 x_i, y_i, z_i. 依题意，$x_0=1$, $x_n=x_{n-1}+2$, $\therefore\{x_n\}$ 是等差数列，且 $x_n=2n+1$. $y_0=1$, $y_n=2y_{n-1}$, $\therefore\{y_n\}$ 是等比数列，且 $y_n=2^n$, $z_0=0$, $z_n=z_{n-1}+x_ny_n$

$\therefore z_n=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=3\cdot2+5\cdot2^2+7\cdot2^3+\cdots+(2n+1)\cdot2^n$,

$\therefore 2z_n=3\cdot2^2+5\cdot2^3+7\cdot2^4+\cdots+(2n-1)\cdot2^n+(2n+1)\cdot2^{n+1}$.

以上两式相减，得

$$\begin{aligned}z_n&=-3\cdot2-2\cdot2^2-\cdots-2\cdot2^n+(2n+1)\cdot2^{n+1}\\&=-2^{n+2}+2+(2n+1)\cdot2^{n+1}\\&=(2n-1)\cdot2^{n+1}+2.\end{aligned}$$

依题意，程序终止时：$z_n>7000$, $z_{n-1}\leqslant7000$，即 $\begin{cases}(2n-1)2^{n+1}+2>7000,\\(2n-3)2^n+2\leqslant7000,\end{cases}$ 可求得 $n=8$, $z=7682$.

例 6 记函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{D}$，若存在 $x_0\in\mathbf{D}$，使 $f(x_0)=x_0$，则称以 (x_0,x_0) 为坐标的点为函数 $f(x)$ 图象上的不动点.

(1)若函数 $f(x)=\dfrac{3x+a}{x+b}$ 的图象上有两个关于原点对称的不动点，求 a, b 满足的条件；

(2)在(1)的条件下，若 $a=8$，记函数 $f(x)$ 上的两个不动点分别为 A, A_1, P 为函数 $f(x)$ 图象上的另一点，且其纵坐标 $y_p>3$，求点 P 到直线 AA_1 距离的最小值及取得最小值时 P 点的坐标；

(3)命题"若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 的图象上存在有限个不动点，则不动